УДК 512.71
DOI: 10.32626/2308-5878.2023-24.5-13

Л. А. Вотякова, канд. фіз.-мат. наук,
В. А. Боденчук, магістр математики

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

МАТРИЧНА АЛГЕБРА *B* ЯК ЕВКЛІДОВИЙ ПРОСТІР

Представлення інформації за допомогою гіперкомплексних числових систем використовується в різних задачах науки і техніки: у класичній механіці, механіці твердого тіла, електродинаміці, радіоелектроніці, комп'ютерній анімації та інших [1].

Часто під гіперкомплексною системою (тобто системою, елементи якої вважаються гіперкомплексними числами) розуміють будь-яку скінченновимірну алгебру над полем. Важливе місце серед таких алгебраїчних структур займають матричні алгебри.

Неможливість побудови алгебр з діленням зовсім не означає неможливість побудови алгебр без ділення, але за своїми властивостями близьких до перших (використання доозначеного ділення).

Оскільки кожна алгебра скінченного рангу може бути мономорфно занурена у деяку повну матричну алгебру, то це спричинило, так би мовити, інверсний підхід до побудови нових алгебр. З повної матричної алгебри виділяється деяка підалгебра, яка є матричним поданням алгебри скінченного рангу. Саме реалізація такого підходу дає можливість наділяти елементи алгебри скінченного рангу матричними характеристиками, зокрема будується канонічне подання елементів алгебри через спектральне подання матриці, а сама алгебра наділяється топологічною структурою через одну із матричних норм. При цьому часто накладають іще додаткову умову, щоб це була алгебра над полем дійсних або комплексних чисел; у першому випадку кажуть про «дійсну» гіперкомплексну систему, у другому – про «комплексну».

У статті побудовано дійсну алгебру скінченного рангу, елементами якої є матриці другого порядку з однаковою сумою рядків і стовпців. Ми наділили її нормою і скалярним добутком, продемонструвавши, що вона є евклідовим простором. Ця алгебра є матричним поданням алгебри гіперкомплексних чисел, які ми назвали у своїх дослідженнях бінарними [4].

Ключові слова: *алгебра скінченного рангу, матриця, норма, евклідовий простір, гіперкомплексна система.*

Вступ. У другій половині XX століття теорія матриць збагатилася новим напрямом дослідження, який дістав назву «матричний аналіз». Термін «матричний аналіз» тлумачиться з одного боку як спільна назва тих розділів лінійної алгебри, які виникли з потреби математичного аналізу, а з іншого боку матричний аналіз є підхід до задач лінійної алгебри, який поряд з суто алгебраїчними засобами використовує основні поняття математичного аналізу – граничний перехід, неперервність, степеневі ряди, тощо [5]. У роботах [2, 3] нами побудовано і досліджено матричні алгебри, які є представленнями гіперкомплексних систем. Побудуємо ще одну таку алгебру.

Основний зміст. Нехай маємо множину матриць

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in R \right\}.$$

Стандартні операції додавання матриць і множення матриці на дійсне число над елементами множини B не виводять за межі цієї множини і задовольняють вісім аксіом лінійного простору. Отже, множина B відносно вказаних операцій є лінійним простором над полем R .

Матриці

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

є лінійно незалежними. Дійсно. Матриця $\alpha E_0 + \beta E_1$ є нуль-матрицею тоді і лише тоді, коли $\alpha = \beta = 0$. Кожен елемент множини B подається у вигляді

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = xE_0 + yE_1.$$

Тому маємо лінійний простір над полем R , причому (E_0, E_1) – базис цього простору.

Покажемо, що множина B замкнена відносно операції множення матриць. Нехай маємо два довільні елементи з множини B :

$$B_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Добуток цих елементів

$$B_1 B_2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 & x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

належить множині B , тому B – замкнена відносно операції множення матриць. Ця операція асоціативна і комутативна.

Врахувавши, що E_0 – одинична матриця, маємо що множина матриць B відносно стандартних операцій додавання і множення матриць, множення матриць на дійсне число є комутативна алгебра рангу 2 над полем дійсних чисел.

Визначник матриці B

$$\det B = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 - y^2,$$

дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли $x = \pm y$.

Таким чином, для кожного елемента B, визначник якого відмінний від нуля, існує обернений:

$$B^{-1} = \frac{1}{x^2 - y^2}\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Елементи алгебри B мають таку властивість: суми елементів першого і другого рядків та першого і другого стовпців рівні. Цю суму іноді називають характеристикою матриці і позначають:

$$chB = ch\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = x + y.$$

Очевидно, що для будь-яких елементів B_1, B_2 алгебри

$$ch\lambda B = \lambda chB, ch\left(B_1 + B_2\right) = chB_1 + chB_2,$$

$$ch\left(B_1 B_2\right) = chB_1 chB_2, chB^{-1} = \left(chB\right)^{-1}.$$

Означення 1. Матрицю

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix},$$

назвемо спряженою до матриці

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Підстава для такого терміну:

$$\overline{B}B = B\overline{B} = \left(x^2 - y^2\right)E_0 = \det B \cdot E_0.$$

Очевидні такі властивості:

$$\overline{\lambda B} = \lambda \overline{B}, \overline{B_1 + B_2} = \overline{B_1} + \overline{B_2}, \overline{B_1 \cdot B_2} = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2}.$$

Означення 2. Якщо матриця B_2 неособлива, то часткою від ділення матриці B_1 на B_2 назвемо матрицю

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{1}{\det B_2} B_1 \overline{B_2}.$$

Означення 2 дає можливість виконувати дії над дробами: якщо матриці B_2 і B_4 неособливі, то

$$\frac{B_1}{B_2} + \frac{B_3}{B_4} = \frac{B_1 B_4 + B_2 B_3}{B_2 B_4},$$

$$\frac{B_1}{B_2}\frac{B_3}{B_4}=\frac{B_1B_3}{B_2B_4},$$

якщо ж матриця B_3 неособлива, то

$$\frac{B_1}{B_2}:\frac{B_3}{B_4}=\frac{B_1B_4}{B_2B_3}.$$

В алгебрі B можна виконувати ділення, але не завжди. Більше того, алгебра B є алгеброю з дільниками нуля. Як приклад:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Оскільки в матриці B характеристичне рівняння

$$\det(\lambda E_0-B)=\begin{pmatrix}\lambda-x & -y\\ -y & \lambda-x\end{pmatrix}=(\lambda-x)^2-y^2=0,$$

має корені $\lambda_1=x+y,\lambda_2=x-y$, а її резольвента має вигляд

$$\operatorname{Re}sB=(\lambda E_0-B)^{-1}=\frac{1}{(\lambda-x)^2-y^2}\begin{pmatrix}\lambda-x & y\\ y & \lambda-x\end{pmatrix}.$$

То матриця B як матричне подання лінійного оператора має власні проектори, що відповідають власним значенням $\lambda_1=x+y$, $\lambda_2=x-y$, які обчислюються за формулою

$$P_\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\lambda}\operatorname{Re}sBd\lambda,$$

де C_λ – коло з центром у точці x.

Таким чином, застосувавши до матриць

$$P_{x+y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{x+y}}\frac{\lambda-x}{(\lambda-x)^2-y^2}d\lambda & \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{x+y}}\frac{y}{(\lambda-x)^2-y^2}d\lambda\\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{x+y}}\frac{y}{(\lambda-x)^2-y^2}d\lambda & \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{x+y}}\frac{\lambda-x}{(\lambda-x)^2-y^2}d\lambda\end{pmatrix}$$

$$P_{x-y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{x+y}}\frac{\lambda-x}{(\lambda-x)^2-y^2}d\lambda & \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{x+y}}\frac{y}{(\lambda-x)^2-y^2}d\lambda\\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{x+y}}\frac{y}{(\lambda-x)^2-y^2}d\lambda & \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{x+y}}\frac{\lambda-x}{(\lambda-x)^2-y^2}d\lambda\end{pmatrix}$$

формулу Коші, отримаємо:

$$P_{x+y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$P_{x-y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$B = (x+y)P_{x+y} + (x-y)P_{x-y} = (x+y)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(x+y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-y)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

є спектральним поданням матриці B.

Теорема 1. n-й степінь елемента B матричної алгебри B має вигляд

$$B^n = (x+y)^n P_{x+y} + (x-y)^n P_{x-y}. \qquad (2)$$

Доведення. Покажемо, що

$$P_{x+y}P_{x-y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{x+y}P_{x+y} = P_{x+y}, P_{x-y}P_{x-y} = P_{x-y}.$$

Маємо

$$P_{x+y}P_{x-y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{x+y}P_{x+y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$P_{x-y}P_{x-y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Це і означає, що

$$B^n = (x+y)^n P_{x+y} + (x-y)^n P_{x-y}.$$

Теорему доведено.

Теорема 2. Відображення $f : B \to R$, яке діє за правилом:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{2x^2 + 2y^2}, \tag{3}$$

наділяє матричну алгебру нормою.

Доведення. Перевіримо, що (3) задовольняє три аксіоми норми. Насамперед, очевидно, що для будь-якої матриці B $f(B) \geq 0$ і $f(B) = 0$, тоді і лише тоді, коли B-нуль-матриця. Для будь-якого дійсного числа λ і будь-якого елемента B з B

$$f(\lambda B) = f\begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda y & \lambda x \end{pmatrix} = \sqrt{2\lambda^2 x^2 + 2\lambda^2 y^2} = |\lambda|\sqrt{2x^2 + 2y^2} = |\lambda| f(B).$$

І нарешті. Для будь-яких елементів B_1, B_2 алгебри B

$$f(B_1 + B_2) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}\right) = \left(2(x_1 + x_2)^2 + 2(y_1 + y_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\left(\sqrt{2x_1} + \sqrt{2x_2}\right)^2 + \left(\sqrt{2y_1} + \sqrt{2y_2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\left(\sqrt{2x_1}\right)^2 + \left(\sqrt{2y_1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\left(\sqrt{2x_2}\right)^2 + \left(\sqrt{2y_2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(2x_1^{\,2} + 2y_1^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2x_2^{\,2} + 2y_2^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} = f(B_1) + f(B_2).$$

Отже, і нерівність трикутника також виконується. Таким чином, відображення (3) задовольняє аксіоми норми. **Теорему доведено.**

Висновок. Матрична алгебра B є нормований простір, у якому

$$\|B\| = \left\|\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2x^2 + 2y^2}. \tag{4}$$

Теорема 3. Для будь-яких елементів B_1, B_2 алгебри B

$$\|B_1 B_2\| \leq \|B_1\| \|B_2\|. \tag{5}$$

Доведення. Розглянемо різницю

$$\|B_1\|^2 \|B_2\|^2 - \|B_1 B_2\|^2.$$

Маємо:

$$\left(2x_1^{\,2}+2y_1^{\,2}\right)\left(2x_2^{\,2}+2y_2^{\,2}\right)-\left(2\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2+2\left(x_1y_2+x_1y_1\right)^2\right)=$$

$$4x_1^{\,2}x_2^{\,2}+4x_2^{\,2}y_1^{\,2}+4x_1^{\,2}y_2^{\,2}+4y_1^{\,2}y_2^{\,2}-2x_1^{\,2}x_2^{\,2}-4x_1x_2y_1y_2-2y_1^{\,2}y_2^{\,2}-2x_1^{\,2}y_2^{\,2}-$$

$$-4x_1x_2y_1y_2-2x_2^{\,2}y_1^{\,2}=2x_1^{\,2}x_2^{\,2}+2x_2^{\,2}y_1^{\,2}+2x_2^{\,2}y_2^{\,2}+2y_1^{\,2}y_2^{\,2}-8x_1x_2y_1y_2=$$

$$=2\left(x_1x_2-y_1y_2\right)^2+2\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2\geq 0.$$

Отже, $\|B_1\|^2\|B_2\|^2-\|B_1B_2\|^2\geq 0$, звідси отримуємо нерівність (5). **Теорему доведено.**

Теорема 4. Норма (4) задовольняє правило паралелограма, тобто для будь-яких B_1, B_2 алгебри B

$$\|B_1+B_2\|^2+\|B_1-B_2\|^2=2\|B_1\|^2+2\|B_2\|^2\,. \tag{6}$$

Доведення.

$$\|B_1+B_2\|^2+\|B_1-B_2\|^2=2\left(x_1+x_2\right)^2+2\left(y_1+y_2\right)^2+2\left(x_1-x_2\right)^2+2\left(y_1-y_2\right)^2=$$

$$=2x_1^{\,2}+2x_2^{\,2}2y_1^{\,2}2y_2^{\,2}=2\left(x_1^{\,2}+y_1^{\,2}\right)+2\left(x_2^{\,2}+y_2^{\,2}\right)=2\|B_1\|^2+2\|B_2\|^2.$$

На підставі рівності (6) можна зробити висновок, що норма (4) породжена скалярним добутком. **Теорему доведено.**

Теорема 5. Відображення $f: B\times B\to R$, яке діє за правилом

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1\\ y_1 & x_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_2 & y_2\\ y_2 & x_2\end{pmatrix}\right)\mapsto 2x_1x_2+2y_1y_2\,, \tag{7}$$

наділяє алгебру B скалярним добутком.

Доведення. Перевіримо, що (7) задовольняє чотири аксіоми скалярного добутку.

Насамперед, очевидно, що $f\left(\left(B_1,B_2\right)\right)=f\left(\left(B_2,B_1\right)\right)$.

Для будь-яких елементів B_1, B_2, B_3 з B

$$f\left(\left(B_1+B_2,B_3\right)\right)=$$

$$=f\left(\begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2\\ y_1+y_2 & x_1+x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_3 & y_3\\ y_3 & x_3\end{pmatrix}\right)=2\left(x_1+x_2\right)x_3+2\left(y_1+y_2\right)y_3=$$

$$=2x_1x_3+2yy_3+2x_2x_3+2y_2y_3=f\left(B_1,B_3\right)+f\left(B_2,B_3\right).$$

Для будь-якого дійсного числа λ і будь-яких B_1, B_2 з B

$$f\left(\lambda B_1,B_2\right)=f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda y_1\\ \lambda y_1 & \lambda x_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_2 & y_2\\ y_2 & x_2\end{pmatrix}\right)=$$

$$=2\lambda x_1x_2+2\lambda y_1y_2=\lambda\left(2x_1x_2+2y_1y_2\right)=\lambda f\left(B_1,B_2\right).$$

Додатна визначеність білінійної форми (7) очевидна.

Відображення (7) наділяє алгебру B скалярним добутком, який позначатимемо

$$\langle B_1, B_2 \rangle = 2x_1x_2 + 2y_1y_2, \tag{8}$$

а тому алгебра B є евклідовий простір, наділений множенням елементів.

Для базису (E_0, E_1) маємо

$$\|E_0\| = \|E_1\| = \sqrt{2}, \langle E_0, E_1 \rangle = 0 ,$$

тобто обраний базис є ортогональним, а базис $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} E_0, \frac{1}{\sqrt{2}} E_1 \right)$ – ортонормований.

Висновки. Побудована нами матрична алгебра є також і метричним простором, оскільки кожна норма породжує метрику (відстань). А поняття відстані в свою чергу дозволяє будувати у цій алгебрі аналітичну частину, означивши в ній функції, увівши поняття граничного переходу, неперервності та інших класичних понять математичного аналізу, що значно розширює коло застосувань і подальших досліджень.

Список використаних джерел:

1. Синьков М. В., Боярінова Ю. Є., Каліновський Я. О. та ін. Розвиток теорії гіперкомплексного представлення інформації та її застосування. Київ: Ін-т проблем реєстрації інформації НАН України. С. 28-48
2. Вотякова Л. А. V_3-алгебри. *Наукові записки ВДПУ ім. М. Коцюбинського*. 2013. Вип. 8. С. 199-202.
3. Вотякова Л. А. Матрична алгебра M_2. *Наукові записки НПУ ім. М. П. Драгоманова*. 2013. № 4. С. 14-17.
4. Працьовитий М. В., Вотякова Л. А. Аналіз на алгебрі бінарних чисел. *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова*. 2015. С. 282-300.
5. Хорн Р., Джонсон У. Матричной анализ / [пер с англ.]. Москва: Мир, 1986. 534 с.

MATRIX ALGEBRA *B* AS EUCLIDEAN SPACE

Representation of information by means of hypercomplex numerical systems is used in various problems of science and technology: in classical mechanics, solid body mechanics, electrodynamics, radio electronics, computer animation, and others [1].

Often a hypercomplex system (that is, a system whose elements are considered to be hypercomplex numbers) is understood as any finite-dimensional algebra over a field. An important place among such algebraic structures is occupied by matrix algebras.

The impossibility of constructing algebras with division does not at all mean the impossibility of constructing algebras without division, but their properties are close to the first ones (use of defined division).

Since each algebra of finite rank can be monomorphically immersed in some complete matrix algebra, this caused, so to speak, an inverse approach to the construction of new algebras. A certain subalgebra stands out from a complete matrix algebra, which is a matrix representation of an algebra of finite rank. It is the implementation of such an approach that makes it possible to endow elements of algebra of finite rank with matrix characteristics, in particular, a canonical representation of algebra elements is constructed through the spectral representation of a matrix, and the algebra itself is endowed with a topological structure through one of the matrix norms. At the same time, an additional condition is often imposed, that it be an algebra over the field of real or complex numbers.

The article constructs a real algebra of finite rank, the elements of which are matrices of the second order with the same sum of rows and columns. We endowed it with a norm and a scalar product, demonstrating that it is a Euclidean space. This algebra is a matrix representation of the algebra of hypercomplex numbers, which we called binary in our research [4].

Key words: *algebra of finite rank, matrix, norm, Euclidean space, hypercomplex system.*

Отримано: 25.10.2023

UDC 517.927
DOI: 10.32626/2308-5878.2023-24.13-21

Kateryna Heseleva, Ph. D.

Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University,
Kamianets-Podilskyi

METHODS FOR SOLVING ONE TYPE OF LINEAR INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATION

The article considers one of the possible variants of the linear integro-functional equation. A method of transforming such equation into a Fredholm integral equation of the second kind is presented. Approximate solutions of this equation are constructed using collocation and collocation-iterative methods.

Key words: *one type of linear integro-functional equation, Fredholm's equation of the second kind, completely continuous operator, inverse operator, approximate solution, collocation and collocation-iterative methods.*

Introduction. In the study of different problems of a theoretical and applied character of differential, integral and integro-functional equations are totally used [3, 4, 6]. As the construction of exact solutions of such equations is possible only in separate cases. Therefore, methods of construction of approximate solutions of these equations are of great im-