няння до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Наближені розв′язки цього рівняння побудовані за допомогою колокаційного та колокаційно-ітеративного методів.

Ключові слова: *один тип лінійного інтегро-функціонального рівняння, рівняння Фредгольма другого роду, цілком неперервний оператор, обернений оператор, наближений розв′язок, колокаційний та колокаційно-ітеративний методи.*

Отримано: 14.11.2023

УДК 517.9
DOI: 10.32626/2308-5878.2023-24.21-30

М. В. Гритчук, аспірант,
І. І. Клевчук, д-р фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПОБУДОВА ОБЛАСТЕЙ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ АВТОНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Метою цієї статті є дослідження стійкості розв'язків лінійних автономних диференціальних рівнянь із запізненням аргументу. Дослідження стійкості можна звести до проблеми розміщення коренів характеристичного рівняння. Для лінійного диференціального рівняння із кількома запізненнями одержано необхідні і достатні умови, при яких всі корені характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини (отже, нульовий розв'язок відповідного диференціального рівняння є асимптотично стійким). Для скалярного диференціального рівняння із запізненням одержано область стійкості на площині параметрів. Досліджено умови обмеженості і побудовано області стійкості лінійного автономного диференціального рівняння із кількома запізненнями. Для побудови області стійкості використано принцип аргументу, метод *D*-розбиттів і числові методи. У цій статті ми досліджуємо стійкість розв'язків лінійних автономних диференціальних рівнянь із кількома запізненнями. Одержано необхідні і достатні умови, при яких всі корені характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини. Одержано обмеження на коефіцієнти рівняння за допомогою принципу аргументу і побудовано область стійкості лінійного автономного диференціального рівняння із двома запізненнями. Використано принцип аргументу, метод *D*-розбиттів і числові методи для побудови області стійкості лінійного автономного диференціального рівняння із двома запізненнями. В методі *D*-розбиттів ми шукаємо значення параметрів, для яких характеристичне рівняння має хоча б один нуль на уявній осі. Розглянуто деякі приклади диференціальних рівнянь із двома запізненнями. При певних значеннях запізнень область стійкості обмежена двома прямими лініями і скінченним числом параметрично заданих кривих.

Ключові слова: *диференціально-різницеве рівняння, область стійкості, принцип аргументу, D-розбиття.*

Вступ. Дослідження стійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь є важливою прикладною задачею. Необхідною і достатньою умовою асимптотичної стійкості розв'язків лінійних автономних систем диференціальних рівнянь із запізненням є від'ємність дійсних частин всіх коренів характеристичного квазіполінома [1-3]. Тому для знаходження області стійкості систем з багатьма запізненнями можна застосовувати амплітудно-фазовий метод, метод D -розбиттів, метод Меймана і Чеботарьова та ін.

Особливо простим є метод D -розбиттів, коли простір коефіцієнтів розбивається на області гіперплощинами, точкам яких відповідають квазіполіноми, що мають хоча б один нуль на уявній осі. Очевидно, що точкам кожної області такого D -розбиття відповідають квазіполіноми з однаковим числом нулів із додатною дійсною частиною. Часто існує нескінченне число областей D -розбиття, тому серед них важко виділити область стійкості.

Тому доцільно спочатку за допомогою принципу аргументу знайти обмеження, які задовольняє область стійкості, а потім уже застосовувати метод D -розбиттів. Такі задачі досліджено, зокрема, в [4-9]. У цій статті доведено обмеженість області стійкості і побудовано області стійкості при різних відхиленнях аргументу.

1. Основні результати. Розглянемо рівняння

$$\frac{dz}{dt} = a_1 z(t-1) + a_2 z(t-2) + \ldots + a_n z(t-n). \tag{1}$$

Згідно з [1-3] для того, щоб нульовий розв'язок рівняння (1) був асимптотично стійким, необхідно і досить, щоб всі корені характеристичного рівняння

$$\lambda = a_1 e^{-\lambda} + a_2 e^{-2\lambda} + \ldots + a_n e^{-n\lambda} \tag{2}$$

лежали в лівій півплощині $Re\,\lambda < 0$.

Означення. *Областю стійкості рівняння (2) називається множина точок* $(a_1, \ldots, a_n) \in R^n$, *для яких всі корені рівняння (2) задовольняють умову* $Re\,\lambda < 0$.

Нехай L – проста неперервна крива, на якій вказано напрямок руху. Через $\Delta Arg_{z \in L} f(z)$ позначимо зміну аргументу функції $f(z)$ при русі вздовж кривої L .

Лема 1. *Нехай функції* $f(z)$ *та* $g(z)$ *аналітичні в комплексній площині і для точок* z *із деякої простої неперервної кривої* L *виконуються нерівності* $|g(z)| < |f(z)|$. *Тоді*

$$\Delta Arg_{z\in L}\left(f(z)+g(z)\right) \geq \Delta Arg_{z\in L} f(z) - \pi. \qquad (3)$$

Доведення. Справджується рівність

$$\Delta Arg_{z\in L}\left(f(z)\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)\right) = \Delta Arg_{z\in L} f(z) + \Delta Arg_{z\in L}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

Оскільки $|g(z)/f(z)| < 1,$ то функція $1+g(z)/f(z)$ відображає криву L у внутрішність одиничного круга з центром в точці $z=1$. Тому образ кривої L при відображенні $1+g(z)/f(z)$ може змінити аргумент не більше, ніж на π. Із нерівності

$$\Delta Arg_{z\in L}\left(1+g(z)/f(z)\right) \geq -\pi.$$

випливає нерівність (3). **Лема 1 доведена.**

Позначимо $Q(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z.$

Лема 2. *Нехай для всіх* $\alpha \in [0;1]$ *існує* z *таке, що* $|z| = e^{-\alpha}$ *і виконується нерівність* $|Q(z)| \leq \pi + 1.$ *Тоді знайдеться стала* $K > 0$ *така, що* $|a_j| \leq K$ *для всіх* $j \in \{1,2,\ldots,n\}.$

Доведення. Розкладемо поліном $Q(z)$ на множники $Q(z) = a_n z(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1}).$ Тоді вірна нерівність

$$|a_n||z|\left|\left(|z|-|z_1|\right)\ldots\left(|z|-|z_{n-1}|\right)\right| \leq |Q(z)|. \qquad (4)$$

Розглянемо поліном $Q_1(x) = |a_n| x\left(x-|z_1|\right)\ldots\left(x-|z_{n-1}|\right).$ Згідно з умовою леми, із (4) випливає, що для всіх $x \in \left[e^{-1};1\right]$ виконується оцінка $|Q_1(x)| \leq \pi + 1.$

Застосовуючи теорему Чебишова, одержимо, що існує $x \in \left[e^{-1};1\right]$ таке, що

$$|Q_1(x)| \geq 2|a_n|\left(\frac{1-e^{-1}}{4}\right)^n.$$

Звідси випливає, що

$$|a_n| \le \frac{\pi+1}{2}\left(\frac{4e}{e-1}\right)^n.$$

Одержимо оцінку для a_{n-1}. Оскільки

$$\left|a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z\right| \le \left|a_n z^n+\ldots+a_1 z\right| + \left|a_n z^n\right| \le \pi+1+\frac{\pi+1}{2}\left(\frac{4e}{e-1}\right)^n,$$

то

$$|a_{n-1}| \le \frac{1}{2}\left(\pi+1+\frac{\pi+1}{2}\left(\frac{4e}{e-1}\right)^n\right)\left(\frac{4e}{e-1}\right)^{n-1}.$$

Аналогічно можна одержати оцінки для всіх коефіцієнтів. **Лема 2 доведена.**

Теорема 1. *Область стійкості рівняння (2) обмежена.*

Доведення. Позначимо $P(\lambda)=\lambda-Q\left(e^{-\lambda}\right)$. Тоді рівняння (2) перепишеться у вигляді $P(\lambda)=0$. Застосуємо принцип аргументу до прямокутника на рис. 1.

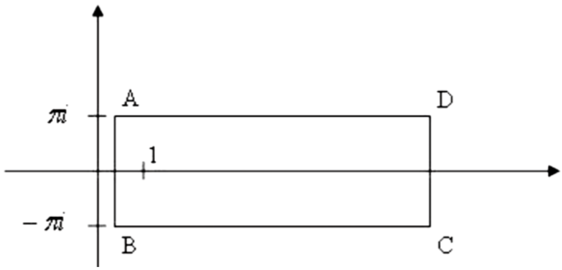

Рис. 1. *Розміщення коренів квазімногочлена*

Згідно з принципом аргументу, число нулів квазіполінома $P(\lambda)$ у прямокутнику дорівнює зміні аргументу функції $P(\lambda)$ при русі λ вздовж контура $ABCD$.

Сторона AB прямокутника перетинає дійсну вісь у точці $x=\alpha$, $0\le\alpha\le 1$. Число α ми виберемо пізніше. Сторону CD виберемо досить далеко від уявної осі. Тоді її образ при відображенні $P(\lambda)$ буде міститися в правій півплощині. На відрізку BC маємо

$$\lambda=-\pi i+x,\ x\ge\alpha\ge 0,\ P(\lambda)=-\pi i+x-Q\left(-e^{-x}\right).$$

Уявна частина функції $P(\lambda)$ залишається сталою, а дійсна частина прямує до $+\infty$ при $x\to+\infty$. На відрізку AD

$$\lambda = \pi i + x, x \geq \alpha \geq 0, P(\lambda) = \pi i + x - Q\left(-e^{-x}\right).$$

Тут знову уявна частина функції $P(\lambda)$ буде сталою. В результаті сумарна зміна аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж відрізків BC, CD і DA буде додатною. Залишилось оцінити зміну аргументу образу відрізка AB. Як ми побачимо, при досить великому $\max\limits_{1\leq j\leq n}|a_j|$ визначальним на відрізку AB для приросту аргументу функції $P(\lambda)$ буде вплив функції $Q\left(e^{-\lambda}\right)$.

Приріст аргументу функції $Q\left(e^{-\lambda}\right)$ при русі по відрізку AB дорівнює приросту аргументу функції $Q(z)$, коли z робить обхід кола $|z| = e^{-\alpha}$ проти годинникової стрілки. Згідно з принципом аргументу

$$\Delta Arg_{|z|=e^{-\alpha}} = 2\pi N,$$

де N – число нулів функції $Q(z)$ в крузі $|z| < e^{-\alpha}$. Але в цьому крузі завжди є нуль $z = 0$, тому $N \geq 1$, отже

$$\Delta Arg_{\pi\geq y\geq -\pi} Q\left(e^{-(\alpha+iy)}\right) \geq 2\pi.$$

Якщо виконуються умови леми 2, то коефіцієнти полінома $Q(z)$ обмежені. У протилежному випадку, при досить великому $\max\limits_{1\leq j\leq n}|a_j|$ знайдеться таке α, $0 \leq \alpha \leq 1$, що

$$\left|Q\left(e^{-(\alpha+iy)}\right)\right| \geq \pi + 1 \geq |\alpha + iy|, \ \pi \geq y \geq -\pi.$$

Використовуючи лему 1, оцінимо зміну аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж відрізка AB

$$\Delta Arg_{\pi\geq y\geq -\pi}\left(\alpha + iy - Q\left(e^{-(\alpha+iy)}\right)\right) \geq 2\pi - \pi = \pi.$$

Отже, при досить великому $\max\limits_{1\leq j\leq n}|a_j|$ зміна аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж контура $ABCD$ буде додатною. Отже, згідно з принципом аргументу, функція $P(\lambda)$ матиме нуль в прямокутнику $ABCD$, а тоді $(a_1,\ldots,a_n)$ не належить області стійкості рівняння (2).

Звідси випливає обмеженість області стійкості. **Теорема доведена.**

Лема 3. *Якщо вектор* $\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ *належить області стійкості рівняння (2), то* $a_1+a_2+\ldots+a_n<0.$

Доведення. Нехай $a_1+a_2+\ldots+a_n\geq 0.$ Тоді квазімногочлен $P\left(\lambda\right)=\lambda-a_1e^{-\lambda}-\ldots-a_ne^{-n\lambda}$ задовольняє умови

$$P\left(0\right)\leq 0,\ \lim_{\lambda\to+\infty}P\left(\lambda\right)=+\infty.$$

Значить, існує число λ_0, $0\leq\lambda_0<+\infty$, таке, що $P\left(\lambda_0\right)=0.$ Рівняння (2) має невід'ємний дійсний корінь. Отже, вектор $\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right)$ не належить області стійкості. **Лема 3 доведена.**

2. Рівняння із двома запізненнями. Застосуємо метод D-розбиттів до рівняння

$$\lambda=ae^{-m\lambda}+be^{-n\lambda}, \tag{5}$$

де m та n – взаємно прості натуральні числа, $m<n.$ Квазіполіном має нульовий корінь, якщо $a+b=0.$ Ця пряма і є однією з ліній, що утворюють межу D-розбиття.

Нехай тепер рівняння (5) має суто уявний корінь iy, $y\neq 0$:

$$a\left(\cos my-i\sin my\right)+b\left(\cos ny-i\sin ny\right)=i\,y.$$

Відокремлюючи дійсну і уявну частини, одержимо систему

$$a\cos my+b\cos ny=0,\ a\sin my+b\sin ny=-y. \tag{6}$$

Розв'яжемо систему (6), якщо

$$\begin{vmatrix}\cos my & \cos ny\\ \sin my & \sin ny\end{vmatrix}=\sin\left(n-m\right)y\neq 0.$$

Рівняння ліній D-розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a=\frac{y\cos ny}{\sin\left(n-m\right)y},\ b=-\frac{y\cos my}{\sin\left(n-m\right)y}.$$

Ці лінії розбивають площину параметрів $\left(a,b\right)$ на нескінченне число областей, всередині кожної з яких рівняння (5) має однакове число коренів з додатною дійсною частиною.

Система (6) може бути сумісною також у випадку, коли її головний визначник $\sin\left(n-m\right)y=0.$ Це можливо при $y\neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $\cos my=\cos ny=0$ або $my=\pi/2+k\pi,$ $ny=\pi/2+l\pi,$ $k\in\mathbb{Z},$ $l\in\mathbb{Z}.$ Такі рівності виконуються тільки у випадку, коли m та n непарні. Якщо ж m та n непарні, то досить взяти $k=\left(m-1\right)/2,$ $l=\left(n-1\right)/2$, $y=\pi/2$ і система (6) визначатиме пряму лінію $a\sin m\pi/2+b\sin n\pi/2=-\pi/2.$ Крім цієї прямої існуватиме ще зліченне число однаково віддалених взаємно паралельних прямих, які є лініями D-розбиття. У цьому випадку лініями D-розбиття будуть прямі, кут нахилу яких рівний $\pi/4$ або $-\pi/4.$ При непарних m та n відбувається біфуркація появи нових ліній D-розбиття.

У випадку, коли $m=1,$ $n-$ непарне натуральне число $(n>1),$ область стійкості обмежена $(n+3)/2$ дугами ліній, серед яких дві дуги будуть відрізками прямих. Інші дуги одержуються із параметричного зображення

$$a=\frac{y\cos ny}{\sin(n-1)y},\ b=-\frac{y\cos y}{\sin(n-1)y}$$

при $0<y<\pi/2.$

Як приклад знайдемо область стійкості рівняння

$$\lambda=ae^{-\lambda}+be^{-3\lambda}.$$

Щоб знайти оцінки для коефіцієнтів a та b, використаємо методику доведення теореми 1. Застосуємо принцип аргументу до прямокутника на рис. 1.

Спочатку припустимо, що $\alpha=0.$ Тоді при $\left||a|-|b|\right|\ge\pi$ маємо $\left|ae^{-iy}+be^{-3iy}\right|\ge\pi\ge|iy|$, тому зміна аргументу функції $P(\lambda)=$ $=\lambda-ae^{-\lambda}-be^{-3\lambda}$ при русі вздовж контура $ABCD$ буде додатною. Отже, функція $P(\lambda)$ буде мати нуль у прямокутнику $ABCD$.

Застосовуючи цю ж методику до прямокутника $ABCD$ при $\alpha=1,$ одержимо, що функція $P(\lambda)$ буде мати нуль у цьому прямокутнику при $\left||a|e^{-1}-|b|e^{-3}\right|\ge\sqrt{\pi^2+1}$.

Із наших міркувань випливає, що для точок (a,b) із області стійкості правильні нерівності

$$\left||a|-|b|\right|<\pi,\ \left||a|e^{-1}-|b|e^{-3}\right|<\sqrt{\pi^2+1}. \tag{7}$$

Згідно з лемою 3 область стійкості повинна задовольняти ще одну нерівність

$$a+b<0. \tag{8}$$

Нерівності (7) і (8) визначають на площині параметрів a та b деякий обмежений многокутник.

Для знаходження області стійкості застосуємо тепер метод D -розбиттів. Пряма $a+b=0$ є однією з ліній, що утворюють межу D -розбиття.

Якщо квазіполіном має суто уявний корінь iy, то рівняння меж D -розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a=\frac{y\left(4\cos^2 y-3\right)}{2\sin y},\ b=-\frac{y}{2\sin y}. \tag{9}$$

Побудуємо лінії, що відповідають випадку $\cos y=\cos 3y=0$. Ці рівняння мають сумісні корені $y=\pi/2+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Тому лініями D -розбиття будуть прямі $a-b=(-1)^{k+1}(\pi/2+k\pi)$.

Відзначимо, що лінії D -розбиття досить нанести в многокутнику, що обмежує область стійкості. Неважко переконатися, що зв'язна область, обмежена відрізками прямих

$$b=-a,-\frac{\pi}{4}\le a\le\frac{1}{2};b=a+\frac{\pi}{2},-3\frac{\pi}{4}\le a\le-\frac{\pi}{4}$$

та дугою лінії (9) при $0\le y\le\pi/2$ є областю стійкості. Область стійкості рівняння (5), у якому $m=1$, а $n=3$ – це заштрихована частина площини, зображена на рис. 2. Область стійкості рівняння (5), у якому $m=1,\ n=2$ зображена в [6].

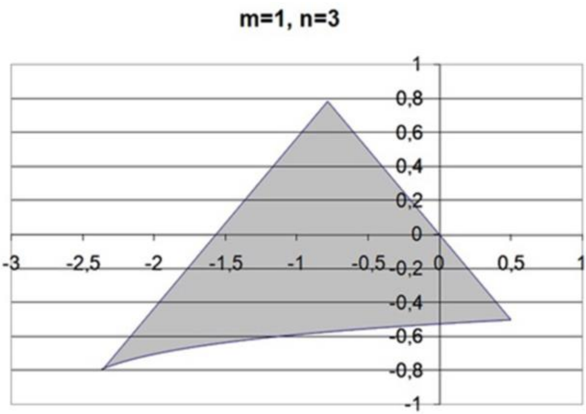

Рис. 2. *Область стійкості*

Зауваження. У статті [9] досліджено рівняння

$$\frac{dz}{dt}=cz(t)+a_1z(t-1)+a_2z(t-2)+\ldots+a_nz(t-n)$$

із фіксованим коефіцієнтом c.

Висновки. В пункті 1 доведено обмеженість області стійкості та одержано обмеження для точок, що належать області стійкості, а в пункті 2 побудовано області стійкості для рівняння із двома запізненнями.

Список використаних джерел:

1. Hale J. K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer, 1977. 365 p.
2. El'sgol'ts L. E., Norkin S. B. Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments. New York; London: Academic Press, 1973. 356 p.
3. Pinney E. Ordinary difference-differential equations. Los Angeles: University of California Press, 1958. 262 p.
4. Klevchuk I. I. Construction of stability domains for linear differential equations with many delays. *Collect. sci. Works «Integral transformations and their applications to boundary value problems».* Kiev, 1997, P. 126-133.
5. Klevchuk I.I. Reduction of boundary value problems to difference and differential-difference equations. *Nauk. Visn. Chernivets'kogo Univ., Math.* 2003. № 160. P. 80-83.
6. Klevchuk I. I., Pernay S. A., Cherevko I. M. Construction of stability domains for linear differential-difference equations. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*. 2012. № 7. P. 28-34.
7. Levitskaya I. S. Stability domain of a linear differential equation with two delays. *Comput. Math. Appl.* 2006. Vol. 51. № 1. P. 153-159.
8. Vaguina M. Yu., Kipnis M. M. Stability of the zero solution of delay differential equations. *Math. Notes.* 2003. Vol. 74. № 5. P. 740-743.
9. Klevchuk I. I., Hrytchuk M. V. Construction of stability domains for linear differential equations with several delays. *Bukovinian Math. Journal*. 2022. Vol. 10. № 1. P. 61-70.

CONSTRUCTION OF STABILITY DOMAINS FOR LINEAR AUNONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY

The aim of the present article is to investigate of solutions stability of linear autonomous differential equations with retarded argument. The investigation of stability can be reduced to the root location problem for the characteristic equation. For the linear differential equation with several delays it is obtained the necessary and sufficient conditions, for all the roots of the characteristic equation to have negative real part (and hence the zero solution to be asymptotically stable). For the scalar delay differential equation stability domains in the parameter plane are obtained. We investigate the boundedness conditions and construct a domain of stability for linear autonomous differential equation with several delays. We use *D*-partition method, argument principle and numerical methods to construct of stability domains. In this article, we investigate the solutions stability of linear autonomous differential equations with several delays. It is obtained the necessary and sufficient conditions, for all the roots of the characteristic equation to have negative real part. We investigate the boundedness conditions with the help of argument principle and construct a domain of stability for linear autonomous differential equation with two delays. We use *D*-partition method, argument principle and numerical methods to construct of stability domains for linear autonomous differential equation with two delays. In the *D*-partition method, we look for parameter values for which the characteristic equation has at least one zero on the imaginary axis. We consider some examples of equations with two delays. In these cases, the stability domains are limited by two straight lines and a finite number of parametrically defined curves.

Key words: *delay differential equation, stability domain, argument principle, D-partition.*

Отримано: 9.11.2023

УДК 517.958;517.956.4
DOI: 10.32626/2308-5878.2023-24.30-44

А. П. Громик*, канд. техн. наук,
І. М. Конет,** д-р фіз.-мат. наук, професор,
Т. М. Пилипюк*,** канд. фіз.-мат. наук

*Заклад вищої освіти «Подільський державний університет»,
м. Кам'янець-Подільський,
**Волинський національний університет
імені Лесі Українки, м. Луцьк,
***Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПІВПРОСТОРІ З ПОРОЖНИНОЮ

У пропонованій статті методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному за радіальною змінною r клиновидному за кутовою змінною φ циліндрично-круговому півпросторі з порожниною.

Розглянуто випадки задання на гранях клина крайових умов 1-го роду (Діріхле) і 2-го роду (Неймана) та їх можливих комбінацій (Діріхле – Неймана, Неймана – Діріхле).

Для побудови розв'язків досліджуваних початково-крайових задач застосовано скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної, інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі (0; +∞) щодо аплікатної змінної z та гіб-

