

principle and construct a domain of stability for linear autonomous differential equation with two delays. We use  $D$ -partition method, argument principle and numerical methods to construct of stability domains for linear autonomous differential equation with two delays. In the  $D$ -partition method, we look for parameter values for which the characteristic equation has at least one zero on the imaginary axis. We consider some examples of equations with two delays. In these cases, the stability domains are limited by two straight lines and a finite number of parametrically defined curves.

**Key words:** *delay differential equation, stability domain, argument principle, D-partition.*

Отримано: 9.11.2023

УДК 517.958;517.956.4

DOI: 10.32626/2308-5878.2023-24.30-44

**А. П. Громик\***, канд. техн. наук,

**І. М. Конет\*\***, д-р фіз.-мат. наук, професор,

**Т. М. Пилипюк\*\*\***, канд. фіз.-мат. наук

\*Заклад вищої освіти «Подільський державний університет»,

м. Кам'янець-Подільський,

\*\*Волинський національний університет

імені Лесі Українки, м. Луцьк,

\*\*\*Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПІВПРОСТОРІ З ПОРОЖНІНОЮ

У пропонованій статті методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному за радіальною змінною  $r$  клиновидному за кутовою змінною  $\varphi$  циліндрично-круговому півпросторі з порожниною.

Розглянуто випадки задання на гранях клина крайових умов 1-го роду (Діріхле) і 2-го роду (Неймана) та їх можливих комбінацій (Діріхле – Неймана, Неймана – Діріхле).

Для побудови розв'язків досліджуваних початково-крайових задач застосовано скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної, інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі  $(0; +\infty)$  щодо аплікатної змінної  $z$  та гіб-

ридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній осі ( $R_0; +\infty$ ) з  $n$  точками спряження щодо радіальної змінної.

Послідовне застосування інтегральних перетворень за геометричними змінними дозволяє звести тривимірні початково-крайові задачі спряження до задачі Коші для звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку, єдиний розв'язок якої виписано в замкнутому вигляді.

Послідовне застосування обернених інтегральних перетворень до одержаного розв'язку в просторі зображень відновлює в явному вигляді в просторі оригіналів розв'язки розглянутих параболічних крайових задач математичної фізики через їх інтегральне зображення.

При цьому головні розв'язки задач одержано в явному вигляді.

**Ключові слова:** *параболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, гібридні інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

**Вступ.** Теорія крайових і мішаних (початково-крайових) задач для різних типів диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, хімії, біології, медицини, економіки, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та початково-крайових задач для параболічних рівнянь і їх систем одержано в [1-6] та в працях інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок, обмеженість, необмеженість тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні та наближені) крайових задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрією області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливальних, механіки деформованого твердого тіла приводять до крайових

вих і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними функціями, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними функціями чи, зокрема, кусково-сталими [7-9].

Відомо, що крім методу відокремлення змінних (методу Фур'є) та його узагальнень, одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в однорідних середовищах є метод інтегральних перетворень, який дає можливість побудувати в аналітичному вигляді точні розв'язки розглянутих задач через їх інтегральне зображення.

У той же час для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх розв'язків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [10-12].

У цій статті, яка є логічним продовженням [13; 14], методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків вперше побудовано інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків параболічних початково-крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому півпросторі з порожниною.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 > 0, R_{n+1} = +\infty;$$

$$\varphi \in (0; \varphi_0), 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (0; +\infty)\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [15]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[ a_{rj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j(t, r, \varphi, z)|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h\right)u_j \Big|_{z=0} = w_j(t, r, \varphi); \quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (3)$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right)u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z); \quad \frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad (4)$$

одними з крайових умов на гранях клина [10]

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); \quad u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

$$u_j \Big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); \quad u_j \Big|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1} \quad (8)$$

та умовами спряження [10]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right)u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де  $a_{ij}, a_{\varphi j}, a_{zj}, \chi_j, h, \alpha_{11}^0, \beta_{11}^0, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$  – деякі сталі;

$$h \geq 0; \quad \alpha_{11}^0 \leq 0, \quad \beta_{11}^0 \geq 0, \quad |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0;$$

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)\};$$

$$g(r, \varphi, z) = \{g_1(r, \varphi, z), g_2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}(r, \varphi, z)\};$$

$$w(t, r, \varphi) = \{w_1(t, r, \varphi), w_2(t, r, \varphi), \dots, w_{n+1}(t, r, \varphi)\};$$

$$g_0(t, \varphi, z), \quad g_{pj}(t, r, z), \quad w_{pj}(t, r, z); \quad (p = \overline{1, 4}; j = \overline{1, n+1})$$

– задані дійсні обмежені неперервні функції;

$$u(t, r, \varphi, z) = \{u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z)\}$$

– шукана дійсна неперервно диференційовна за змінною  $t$  і двічі неперервно диференційовна за геометричними змінними  $(r, \varphi, z)$  функція.

Зауважимо, що:

- 1) у випадку  $\chi_j \equiv 0$  ( $j = \overline{1, n+1}$ ) рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням теплопровідності (дифузії) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;

- 2) якщо  $\alpha_{11}^k = 0$ ,  $\beta_{11}^k = 1$ ;  $\alpha_{12}^k = 0$ ,  $\beta_{12}^k = 1$ ;  $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$ ,  $\beta_{21}^k = 0$ ;  
 $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$ ,  $\beta_{22}^k = 0$ , де  $\lambda_1^k$ ,  $\lambda_2^k$  – коефіцієнти теплопровідності, то умови спряження (9) збігаються з умовами ідеального теплового (термічного) контакту;
- 3) якщо  $\alpha_{11}^k = b_k$ ,  $\beta_{11}^k = 1$ ;  $\alpha_{12}^k = 0$ ,  $\beta_{12}^k = 1$ ;  $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$ ,  $\beta_{21}^k = 0$ ;  
 $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$ ,  $\beta_{22}^k = 0$ , де  $b_k$  – коефіцієнти термоопору, то умови спряження (9) збігаються з умовами неідеального теплового контакту.

Отже, у зазначених випадках 1, 2 (або 1, 3) розглянуті параболічні крайові задачі математичної фізики моделюють процеси теплопровідності в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому півпросторі з порожниною [16].

**Основна частина.** Припустимо, що розв'язки параболічних початково-крайових задач (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених далі прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [10, 11].

Згідно з [10] визначимо скінченні пряме  $F_{m,ik}$  та обернене  $F_{m,ik}^{-1}$  інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної  $\varphi$  за формулами:

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \quad (10)$$

$$F_{m,ik}^{-1}[f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} U_{m,11}(\varphi) &= \sin(\beta_{m,11}\varphi); \quad \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0}; \\ U_{m,12}(\varphi) &= \sin(\beta_{m,12}\varphi); \quad \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}; \\ U_{m,21}(\varphi) &= \cos(\beta_{m,21}\varphi); \quad \beta_{m,21} = \beta_{m,12}; \\ U_{m,22}(\varphi) &= \cos(\beta_{m,22}\varphi); \quad \beta_{m,22} = \beta_{m,11}; \\ \varepsilon_0^{ik} &= 0; \quad \varepsilon_m^{ik} = 1 \text{ при } ik = 11, 12, 21; \quad m = 1, 2, 3, \dots; \\ \varepsilon_0^{22} &= \frac{1}{2}; \quad \varepsilon_m^{22} = 1 \text{ при } m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Безпосередньо перевіряється, що для інтегрального оператора  $F_{m,ik}$  виконується тотожність

$$F_{m,ik} \left[ \frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}; \quad i, k = 1, 2, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_{m,11}(f) &= \frac{\pi m}{\varphi_0} \left[ f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0) \right]; \\ \Phi_{m,12}(f) &= \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0}; \\ \Phi_{m,21}(f) &= -\frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0); \\ \Phi_{m,22} &= -\frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0}. \end{aligned}$$

Інтегральний оператор  $F_{m,ik}$ , який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) тривимірним початково-крайовим задачам спряження (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $D' = \{(t, r, z) : t > 0; r \in I_n^+; z \in (0; +\infty)\}$  класичного розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t} - \left[ a_{rj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_{jm,ik}^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm,ik} + \chi_j^2 u_{jm,ik} = \\ = G_{jm,ik}(t, r, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1} \end{aligned} \quad (13)$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik}(t, r, z) \Big|_{t=0} = g_{jm,ik}(r, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (14)$$

крайовими умовами

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\partial}{\partial z} + h \right) u_{jm,ik} \Big|_{z=0} = w_{jm,ik}(t, r); \\ \frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_{1m,ik} \Big|_{r=R_0} = g_{0m,ik}(t, z); \\ \frac{\partial^s u_{n+1,m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1 \end{aligned} \quad (16)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik} - \left( \alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik} \right]_{r=R_p} = 0; \quad j = \overline{1, 2}; \quad p = \overline{1, n}, \quad (17)$$

де  $G_{jm,ik}(t, r, z) = f_{jm,ik}(t, r, z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t, r, z)$ ;  $v_{jm,ik} = a_{rj}^{-1} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}$ .

До двовимірної крайової задачі (13)-(17) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі  $(0; +\infty)$  щодо змінної  $z$  [11]:

$$F_+ [g(z)] = \int_0^{+\infty} g(z) K(z, \sigma) dz \equiv \tilde{g}(\sigma), \quad (18)$$

$$F_+^{-1} [\tilde{g}(\sigma)] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) K(z, \sigma) d\sigma \equiv g(z), \quad (19)$$

$$F_+ \left[ \frac{d^2 g}{dz^2} \right] = -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma) + K(0, \sigma) \left( -\frac{dg}{dz} + hg \right) \Big|_{z=0}, \quad (20)$$

де ядро перетворення

$$K(z, \sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma \cos(\sigma z) + h \sin(\sigma z)}{\sqrt{\sigma^2 + h^2}}.$$

Інтегральний оператор  $F_+$ , який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) ставить у відповідність початково-крайовій задачі (13)-(17) задачу побудови обмеженого на множині  $D'' = \{(t, r) : t > 0; r \in I_n^+\}$  класичного розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь  $B$ -параболічного типу 2-го порядку [5]

$$\frac{\partial \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t} - a_{rj}^2 B_{v_{jm,ik}} [\tilde{u}_{jm,ik}] + (a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_{jm,ik} = \tilde{P}_{jm,ik}(t, r, \sigma); \quad (21)$$

$$r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}(r, \sigma); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{u}_{1m,ik} \Big|_{r=R_0} = \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma);$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{n+1,m,ik}}{\partial r^s} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1 \quad (23)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) \tilde{u}_{pm,ik} - \left( \alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) \tilde{u}_{p+1,m,ik} \right]_{r=R_p} = 0; \quad j = 1, 2; \quad p = \overline{1, n}, \quad (24)$$

де  $B_{V_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{V_{jm,ik}^2}{r^2}$  – класичний диференціальний оператор Бесселя [5],

$$\tilde{P}_{jm,ik}(t, r, \sigma) = \tilde{G}_{jm,ik}(t, r, \sigma) + a_{z_j}^2 K(0, \sigma) w_{jm,ik}(t, r).$$

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)-(24) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній осі  $I_n^+$  з  $n$  точками спряження щодо радіальної змінної  $r$  [11]:

$$M_{(n)}[f(r)] = \int_{R_0}^{+\infty} f(r) V(r, \lambda) \sigma(r) r dr \equiv \tilde{f}(\lambda), \quad (25)$$

$$M_{(n)}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) V(r, \lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \equiv f(r), \quad (26)$$

$$M_{(n)}[B_{(m,ik)}[f(r)]] = -\lambda^2 \tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r, \lambda) \sigma_k r dr - \left. \left( \alpha_{11}^0 \right)^{-1} a_1^2 R_0 \sigma_1 V_1(R_0, \lambda) \left( \alpha_{11}^0 \frac{df}{dr} + \beta_{11}^0 f \right) \right|_{r=R_0}. \quad (27)$$

У формулах (25)-(27) беруть участь, виписані в [11], спектральна функція  $V(r, \lambda)$ , вагова функція  $\sigma(r)$ , спектральна щільність  $\Omega(\lambda)$  та гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^n a_j^2 \theta(r - R_{j-1}) \theta(R_j - r) B_{V_{jm,ik}} + a_{n+1}^2 \theta(r - R_n) B_{V_{n+1,m,ik}},$$

де  $\theta(x)$  – одинична функція Гевісайда,  $a_k^2 \equiv a_{rk}^2$ ,  $\alpha_k^2$  – деякі сталі.

Запишемо диференціальні рівняння (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 B_{V_{1m,ik}} + q_1^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 B_{V_{2m,ik}} + q_2^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 B_{V_{n+1,m,ik}} + q_{n+1}^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{P}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{P}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\left[ \begin{array}{c} \tilde{u}_{1m,ik}(t, r, \sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t, r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t, r, \sigma) \end{array} \right]_{t=0} = \left[ \begin{array}{c} \tilde{g}_{1m,ik}(r, \sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}(r, \sigma) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}(r, \sigma) \end{array} \right], \quad (29)$$

де  $q_j^2(\sigma) = a_{zj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2$ ;  $j = \overline{1, n+1}$ .

Інтегральний оператор  $M_{(n)}$ , який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$M_{(n)}[\dots] = \left[ \begin{array}{cc} \int_{R_0}^{R_1} \dots V_1(r, \lambda) \sigma_1 r dr & \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda) \sigma_2 r dr \\ \dots & \dots \\ \int_{R_{n-1}}^{R_n} \dots V_n(r, \lambda) \sigma_n r dr & \int_{R_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(r, \lambda) \sigma_{n+1} r dr \end{array} \right] \quad (30)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left( \frac{d}{dt} + \lambda^2 + \alpha_j^2 + q_j^2(\sigma) \right) \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{P}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) - \quad (31)$$

$$- \left( \alpha_{11}^0 \right)^{-1} a_1^2 R_0 \sigma_1 V_1(R_0, \lambda) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma),$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik}^1(\lambda, \sigma), \quad (32)$$

де  $\tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr$ ;

$$\tilde{P}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{P}_{jm,ik}(t, r, \sigma) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr; \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{g}_{jm,ik}^1(\lambda, \sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm,ik}(r, \sigma) V_j(r, \lambda) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що  $\max \{q_1^2(\sigma), q_2^2(\sigma), \dots, q_{n+1}^2(\sigma)\} = q_1^2(\sigma)$  і покладемо всюди  $\alpha_j^2 = q_1^2(\sigma) - q_j^2(\sigma)$ ;  $j = \overline{1, n+1}$ . Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{u}_{m,ik}}{dt} + \Delta(\lambda, \sigma)\tilde{u}_{m,ik} = \tilde{T}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma), \quad (33)$$

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma)\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{m,ik}(\lambda, \sigma), \quad (34)$$

де  $\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma)$ ;  $\Delta(\lambda, \sigma) = \lambda^2 + a_{z1}^2\sigma^2 + \chi_1^2$ .

$$\tilde{T}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{P}_{jm,ik}(t, \lambda, \sigma) - (\alpha_{11}^0)^{-1} a_1^2 R_0 \sigma_1 V_1(R_0, \lambda) \tilde{g}_{0m,ik}(t, \sigma).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв’язком задачі Коші (33), (34) є функція

$$\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma) = N(t, \lambda, \sigma)\tilde{g}_{m,ik}(\lambda, \sigma) + \int_0^t N(t-\tau, \lambda, \sigma)\tilde{T}_{m,ik}(\tau, \lambda, \sigma)d\tau, \quad (35)$$

де розв’язуюча функція (функція Коші)

$$N(t, \lambda, \sigma) = \exp(-\Delta(\lambda, \sigma)t).$$

Оскільки суперпозиція операторів  $M_{(n)}$  та  $M_{(n)}^{-1}$  є одиничним оператором ( $M_{(n)} \circ M_{(n)}^{-1} = M_{(n)}^{-1} \circ M_{(n)} = I$ ), то оператор  $M_{(n)}^{-1}$ , як обернений до оператора, визначеного за формулою (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$M_{(n)}^{-1} [\dots] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \dots V_1(r, \lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \\ \int_0^{+\infty} \dots V_2(r, \lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \\ \dots \\ \int_0^{+\infty} \dots V_{n+1}(r, \lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \end{bmatrix} \quad (36)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента  $[\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma)]$ , де функція  $\tilde{u}_{m,ik}(t, \lambda, \sigma)$  визначена за формулою (35).

Одержимо єдиний розв’язок одновимірної параболічної початково-крайової задачі (21)-(24):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm,ik}(t, r, \sigma) &= \int_0^{+\infty} N(t, \lambda, \sigma)\tilde{g}_{m,ik}(\lambda, \sigma)V_j(r, \lambda)\Omega(\lambda)d\lambda + \\ &+ \int_0^t \int_0^{+\infty} N(t-\tau, \lambda, \sigma)\tilde{T}_{m,ik}(\tau, \lambda, \sigma)V_j(r, \lambda)\Omega(\lambda)d\lambda d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Застосувавши послідовно до функцій  $\tilde{u}_{j,m,ik}(t, r, \sigma)$ , визначених формулами (37), обернені оператори  $F_+^{-1}$  та  $F_{m,ik}^{-1}$ , і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} u_{j,ik}(t, r, \varphi, z) = & \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \times \\ & \times \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) g_p(\rho, \alpha, \xi) \times \\ & \times \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{+\infty} Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + (38) \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} a_{zp}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} W_{jp}^{ik}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p(\tau, \rho, \alpha) \sigma_p \rho d\alpha d\rho d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} W_{jr,ik}(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z, \xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}, \end{aligned}$$

які визначають єдині розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) при відповідних значеннях  $ik$  (11, 12, 21, 22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z, \xi) U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha)$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$\begin{aligned} Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = & \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} K_{jp}^{m,ik}(t-\tau, r, \rho, z, \xi) \times \\ & \times \Phi_{m,ik}(\tau, \rho, \xi) U_{m,ik}(\varphi), \end{aligned}$$

компоненти  $W_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, 0)$  аплікатної матриці Гріна (аплікатної функції Гріна) та компоненти

$$W_{jr,ik}(t, r, \varphi, \alpha, z, \xi) = -\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} a_1^2 R_0 \sigma_1 E_{j1}^{ik}(t, r, R_0, \varphi, \alpha, z, \xi)$$

радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) відповідних початково-крайових задач, де

$$\begin{aligned} K_{jp}^{m,ik}(t, r, \rho, z, \xi) = \\ = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} N(t, \lambda, \sigma) V_j(r, \lambda) V_p(\rho, \lambda) K(z, \sigma) K(\xi, \sigma) \Omega(\lambda) d\lambda d\sigma. \end{aligned}$$

Проаналізуємо формули (38) залежно від типу крайових умов на гранях кусково-однорідного клиновидного циліндрично-кругового півростору з порожниною. Розглянемо, наприклад, випадок крайових умов (5) (умова Діріхле). У цьому випадку функції Гріна мають вигляд

$$Q_{jp}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2\pi}{\varphi_0} \sum_{m=1}^{\infty} mK_{jp}^{m,11}(t - \tau, r, \rho, z, \xi) \times \\ \times \left[ g_{1p}(\tau, \rho, \xi) + (-1)^{m+1} w_{1p}(\tau, \rho, \xi) \right] \sin \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0}.$$

Якщо визначити тангенціальні функції Гріна

$$W_{jp,1}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2\pi}{\varphi_0} \sum_{m=1}^{\infty} mK_{jp}^{m,11}(t - \tau, r, \rho, z, \xi) \sin \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0},$$

$$W_{jp,2}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \frac{2\pi}{\varphi_0} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} mK_{jp}^{m,11}(t - \tau, r, \rho, z, \xi) \sin \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0},$$

то розв'язок задачі (1)-(4), (5), (9) можемо записати у вигляді

$$u_{j,11}(t, r, \varphi, z) = \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{+\infty} E_{jp}^{11}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \times \\ \times \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{+\infty} E_{jp}^{11}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) g_p(\rho, \alpha, \xi) \times \\ \times \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{+\infty} [W_{jp,1}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) g_{1p}(\tau, \rho, \xi) + \\ + W_{jp,2}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi)] w_{1p}(\tau, \rho, \xi) \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \quad (39) \\ + \sum_{p=1}^{n+1} a_{z p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} W_{jp}^{11}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p(\tau, \rho, \alpha) \sigma_p \rho d\alpha d\rho d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_0^{+\infty} W_{jr,11}(t - \tau, r, \varphi, \alpha, z, \xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) d\xi d\alpha d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу  $E_{jp}^{11}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi)$  і функцій Гріна  $W_{jp,s}^{11}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi)$ , ( $s = 1, 2$ ),  $W_{jp}^{11}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z)$ ,  $W_{jr,11}(t, r, \varphi, \alpha, z, \xi)$ , безпосередньо перевіряємо, що функції  $u_{j,11}(t, r, \varphi, z)$ , визначені формулами (39), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), (5) та умови спряження (9) в сенсі теорії узагальнених функцій.

Єдиність розв'язку (39) впливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) параболічної початково-крайової задачі спряження (1)-(4), (5), (9).

Можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (39) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої задачі.

Підсумком викладеного вище є така теорема.

**Теорема.** Якщо функції  $f_j(t, r, \varphi, z)$ ,  $g_j(r, \varphi, z)$ ,  $w_j(t, r, \varphi)$ ,  $g_{1j}(t, r, z)$ ,  $w_{1j}(t, r, z)$ , ( $j = \overline{1, n+1}$ ) задовольняють умови:

- 1) неперервно диференційовні за змінною  $t$  і двічі неперервно диференційовані за геометричними змінними;
- 2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
- 3) абсолютно сумовні за змінною  $z$  на півосі  $(0; +\infty)$ ;
- 4) абсолютно сумовні з ваговою функцією  $r\sigma(r)$  за змінною  $r$  на осі  $I_n^+$ ;
- 5) справджують умови спряження, функція  $g_0(t, \varphi, z)$  задовольняє умови 1)-3), то параболічна початково-крайова задача спряження (1)-(4), (5), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (39).

Випадки крайових умов (6), (7), (8) на гранях клина  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  аналізуються аналогічно.

**Зауваження 1.** У випадку  $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$  формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому півпросторі з порожниною.

**Зауваження 2.** Випадок зміни  $\varphi$  в межах  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$  зводиться до розглянутого заміною  $\varphi' = \varphi - \varphi_1$  ( $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ ).

**Зауваження 3.** Параметр  $h$  дозволяє виділяти з формул (38) розв'язки крайових задач у випадках задання на площині  $z = 0$  крайових умов 1-го роду ( $h \rightarrow +\infty$ ) та 2-го роду ( $h \rightarrow +0$ ).

**Зауваження 4.** Параметри  $\alpha_{11}^0$ ,  $\beta_{11}^0$  дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки крайових задач спряження у випадках задання на радіальній поверхні  $r = R_0$  крайових умов 1-го роду ( $\alpha_{11}^0 = 0$ ,  $\beta_{11}^0 = 1$ ), 2-го роду ( $\alpha_{11}^0 = -1$ ,  $\beta_{11}^0 = 0$ ) та 3-го роду ( $\alpha_{11}^0 = -1$ ,  $\beta_{11}^0 \equiv \beta > 0$ ).

**Зауваження 5.** Аналіз розв'язків (38) залежно від аналітичного виразу функцій  $f_j(t, r, \varphi, z)$ ,  $g_j(r, \varphi, z)$ ,  $w_j(t, r, \varphi)$ ,  $g_{pj}(t, r, z)$ ,  $w_{pj}(t, r, z)$ , ( $p = \overline{1, 4}$ ,  $j = \overline{1, n+1}$ ),  $g_0(t, \varphi, z)$  проводиться безпосередньо із загальних структур.

**Висновки.** Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач у кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому півпросторі з порожниною. Одержані інтегральні зображення розв'язків носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як у теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах, які описуються циліндричною системою координат.

#### Список використаних джерел:

1. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. Чернівці: Рута, 1998. 225 с.
2. Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д. Параболические граничные задачи. Кишинев: Штиинца, 1992. 327 с.
3. Загорский Т. Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. Львов: Изд-во ЛГУ, 1961. 115 с.
4. Ивасишен С. Д. Матрица Грина параболических задач. Киев: Вища школа, 1990. 199 с.
5. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. Чернівці: Прут, 2003. 248 с.
6. Пукальський І. Д. Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженостями і особливостями. Чернівці: Рута, 2008. 253 с.
7. Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. Киев: Наук. думка, 2001. 606 с.
8. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. Киев: Наук. думка, 1998. 614 с.
9. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. Киев: Наук. думка, 1991. 432 с.
10. Громик А. П., Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних циліндричних середовищах. Кам'янець-Подільський: ПП «Видавництво Абетка світ», 2020. 200 с.
11. Конет І. М., Пилипюк Т. М. Крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах. Чернівці: Технодруk, 2019. 200 с.
12. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах. Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013. 120 с.

13. Конет І. М., Пилипюк Т. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. пр. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2018. Вип. 18. С. 86-99.
14. Громик А. П., Конет І. М., Пилипюк Т. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі з порожниною. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. пр. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2022. Вип. 23. С. 14-29.
15. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ: Либідь, 2006. 424 с.
16. Конет І. М., Ленюк М. П. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. Чернівці: Прут, 2001. 312 с.

### PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS IN A PIECEWISE HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED CYLINDRICAL- CIRCULAR HALF-SPACE WITH A CAVITY

The unique exact analytical solutions of parabolic boundary value problems of mathematical physics in piecewise homogeneous by the radial variable  $r$  wedge-shaped by the angular variable  $\varphi$  cylindrical-circular half-space with a cavity were constructed at first time by the method of classical integral and hybrid integral transforms in combination with the method of main solutions (matrices of influence and Green matrices) in the proposed article.

The cases of assigning on the verge of the wedge the boundary conditions of the 1st kind (Dirichlet) and the 2nd kind (Neumann) and their possible combinations (Dirichlet – Neumann, Neumann – Dirichlet) are considered.

Finite integral Fourier transform by an angular variable, a finite integral Fourier transform on the Cartesian semiaxis  $(0; +\infty)$  by an applicative variable  $z$  and a Weber hybrid integral transform type on the polar axis  $(R_0; +\infty)$  with  $n$  points of conjugation by a radial variable were used to construct solutions of investigated boundary value problems.

The consistent application of integral transforms by geometric variables allows us to reduce the three-dimensional initial boundary-value problems of conjugation to the Cauchy problem for a regular linear inhomogeneous 1st order differential equation whose unique solution is written in a closed form.

The consistent application of inverse integral transforms to the obtained solution in the space of images restores the solutions of the considered parabolic boundary value problems through their integral image in an explicit form in the space of the originals.

At the same time, the main solutions to the problems were obtained in an explicit form.

**Key words:** *parabolic equation, initial and boundary conditions, conjugation conditions, integral transforms, hybrid integral transforms, main solutions.*

Отримано: 20.11.2023