

5. А. С.1001298 (СССР). Самоконтролирующаяся система электропитания постоянного напряжения / А. Ф. Верлань, А. И. Гудименко, А. И. Кривоносов, И. Д. Колодеев, В. С. Коновалюк, П. Т. Передерий, В. Н. Скачко. — Опубл. в Б.И., 1983, №8.
6. Королук В. С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В. С. Королук, А. Ф. Трубин. — К. : Наук. думка, 1982. — 236 с.

The issues of developing and analyzing automated control systems (ACS), built in the constant voltage secondary power supply (SPS), and the SPS ACS specifics are considered. The SPS ACS functioning algorithm is described. The timing diagram of the stabilized converter elements, safety protection and ACS, problem of building algorithm of the SPS ACS circuit operating capacity verification simulation are given.

Key words: *automated control systems, secondary power supply, technical diagnostics.*

Отримано: 15.03.2013

УДК 627.324.2/3:532.546:532.72

А. П. Власюк, д-р техн. наук, професор,

Н. А. Федорчук, аспірант

Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВОГО ГРУНТОВОГО МАСИВУ ЗА НАЯВНОСТІ РІВНЯ ГРУНТОВИХ ВОД ТА ВПЛИВУ ТЕПЛО-МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В ОДНОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

У статті сформульовано постановку та проведено математичне моделювання задачі напружено-деформованого стану (НДС) багат шарового ґрунтового масиву за наявності рівня ґрунтових вод (РГВ) та впливу тепло-масоперенесення при фільтрації підземних вод. Отримано чисельний розв'язок відповідної одновимірної крайової задачі методом скінченних різниць. Як приклад, досліджено задачу напружено-деформованого стану в трьохшаровому ґрунтовому масиві. Використовуючи створене програмне забезпечення, проведено серію чисельних експериментів та їх аналіз.

Ключові слова: *напружено-деформований стан, ґрунтовий масив, рівень ґрунтових вод, тепло-масоперенесення, метод скінченних різниць.*

Вступ. Важливим питанням при проектуванні, будівництві та експлуатації споруд цивільного, гідротехнічного, енергетичного та промислового значення є врахування деформаційних характеристик

грунтових основ, на яких вони побудовані. Зміна НДС під дією навантажень може призвести до непередбачуваних наслідків, таких як аварії споруд, зсувні процеси та ін.

Розв'язанню задачі НДС ґрунтових основ присвячені такі фундаментальні дослідження, як [1; 2]. В даних роботах досліджено НДС ґрунтових основ гідротехнічних споруд при наявності фільтрації ґрунтових вод чистої води.

В роботах [1—9] проведено математичне моделювання та досліджено задачі НДС ґрунтових масивів з врахуванням впливу масоперенесення при фільтрації сольових розчинів в ізотермічних умовах, а також з врахуванням РГВ.

Однак, на НДС ґрунтових основ також може впливати і температурний режим, основними причинами зміни якого можуть бути сезонні та добові коливання температур, захоронення відходів виробництва та ін. Дослідженню НДС ґрунтового середовища під впливом зміни його температурного режиму присвячено [10].

Враховуючи вищесказане, актуальним питанням є дослідження впливу тепло-масоперенесення при фільтрації сольових розчинів на напружено-деформований стан ґрунтових основ. Зокрема, в роботі [11] побудовано математичну модель та досліджено задачу НДС двохшарового ґрунтового масиву за наявності РГВ та впливу тепло-масоперенесення. Проте, в природних умовах ґрунтовий масив може складатись із багатьох шарів, кожний з яких може мати свої власні характеристики, відмінні від характеристик інших шарів (пористості, коефіцієнти Ламе, конвективної дифузії, термодифузії, теплопровідності, коефіцієнти фільтрації та ін.).

Тому метою даної роботи є моделювання та дослідження задачі НДС багатошарового ґрунтового масиву за наявності РГВ та впливу тепло-масоперенесення.

Постановка задачі. Розглянемо багатошаровий ґрунтовий масив за наявності в ньому РГВ та впливу процесів тепло-масоперенесення.

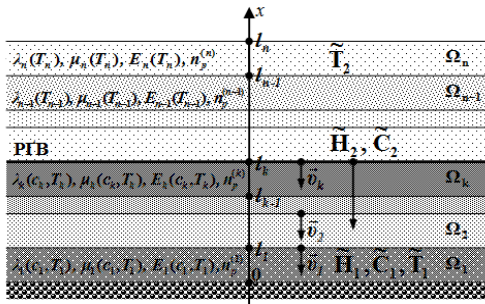


Рис. 1. Багатошаровий ґрунтовий масив за наявності в ньому РГВ та впливу процесів тепло-масоперенесення

Кількість шарів в ґрунтовому масиві дорівнює n . Шари нумеруються знизу вверху, причому в одному з шарів на глибині l_k від водоупору ($x = 0$) присутній РГВ. Відповідно шари ґрунту, розміщені вище l_k , знаходяться в природному стані, а нижче l_k — при повній вологоємкості. РГВ вважається нерухомим (рис. 1).

Шари ґрунту вважаються пружно-деформівними в межах лінійної теорії пружності з різними пружними параметрами λ_i , μ_i , $i = \overline{1, n}$, на які діє сила тяжіння, а у випадку змоченого ґрунту враховується ще й архімедова та фільтраційні сили.

На нижній поверхні ґрунту ($x = 0$) задано п'єзометричний напір \tilde{H}_1 , концентрація розчинених у воді солей \tilde{C}_1 та температура \tilde{T}_1 , а на глибині l_k задано напір \tilde{H}_2 та концентрація солей \tilde{C}_2 . Значення температури \tilde{T}_2 задано на поверхні ґрунту ($x = l_n$), причому $\tilde{H}_2 > \tilde{H}_1$, $\tilde{C}_2 > \tilde{C}_1$, $\tilde{T}_2 > \tilde{T}_1$. В результаті різниці напорів відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процес фільтрації розчинених у воді речовин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

Потрібно розрахувати НДС з врахуванням процесів тепломасоперенесення в шарах ґрунту, які знаходяться в природному стані та в шарах ґрунту нижче РГВ, які знаходяться у зваженому стані, при умові, що відсутнє зміщення нижньої та верхньої меж ґрунту або лише нижньої межі ґрунту (скельної основи).

Математична модель задачі. Математичну модель одновимірної задачі НДС ґрунтового масиву за наявності РГВ та впливу тепломасоперенесення, враховуючи результати робіт [1—15], можна описати наступною, поданою нижче крайовою задачею.

Рівняння НДС для кожного шару ґрунту в зміщеннях мають вигляд

$$\begin{aligned} & (\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \frac{d^2 u_i}{dx^2} + \frac{d(\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i))}{dx} \frac{du_i}{dx} - \\ & - (\lambda_i(c_i, T_i) + 2\mu_i(c_i, T_i)) \alpha_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial x} = X_i, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$X_i = \begin{cases} \gamma_{зв.}^{(i)} + \frac{dp_i}{dx}, & i = \overline{1, k}, \\ \gamma_{нр.}^{(i)}, & i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad (2)$$

де $x \in \bigcup_{i=1}^n (l_{i-1}, l_i)$, $l_0 = 0$, $l_n = l$; u_i , $i = \overline{1, n}$ — зміщення вздовж осі

OX в шарах ґрунту, що знаходяться відповідно в зваженому

($x \in \cup(l_i, l_{i+1})$, $i = \overline{1, k}$) та в природному ($x \in \cup(l_i, l_{i+1})$, $i = \overline{k, n-1}$) станах; X_i , $i = \overline{1, n}$ — масові сили; λ_i , μ_i , $i = \overline{1, n}$ — коефіцієнти Ламе в кожному шарі ґрунтового масиву Ω_i , які залежать від концентрації сольових розчинів в ґрунті для $i = \overline{1, k}$, а також від температури для $i = \overline{1, n}$; $c_i(x, t)$, $i = \overline{1, k}$ — концентрація порового сольового розчину у водонасичених шарах ґрунтового масиву; $T_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$ — температура в кожному шарі Ω_i ; $\gamma_{3\epsilon}^{(i)}$, $i = \overline{1, k}$ — питомі ваги ґрунту в i -ому шарі в зваженому стані; $\gamma_{np}^{(i)}$, $i = \overline{k+1, n}$ — питомі ваги ґрунту в природному стані; p_i — фільтраційний тиск в кожному шарі, який визначається за формулою

$$p_i = \gamma_p (h_i - x), \quad i = \overline{1, k}, \quad (3)$$

h_i — п'езометричний напір; $\alpha_T^{(i)}$ — середній коефіцієнт лінійного теплового розширення в кожному шарі ґрунтового масиву в інтервалі температур (T_0, T_i) , $i = \overline{1, n}$, що визначається виразом [16]

$$\alpha_T^{(i)} = \frac{1}{\bar{T}_i} \int_0^{\bar{T}_i} \alpha_i d\bar{T}_i,$$

де $\bar{T}_i = T_i - T_0$, $\alpha_i = \frac{\Delta l}{l T_i}$ — коефіцієнт лінійного розширення, Δl — зміна лінійних розмірів досліджуваного зразка.

Крайові умови та умови спряження для зміщень мають вигляд

$$L_1 u_1(0) = 0, \quad L_2 u_n(l) = 0, \quad (4)$$

$$u_i(l_i) = u_{i+1}(l_i), \quad (5)$$

$$E_i \frac{du_i(l_i)}{dx} - \alpha_T^{(i)} (T_i - T_0) = E_{i+1} \frac{du_{i+1}(l_i)}{dx} - \alpha_T^{(i+1)} (T_{i+1} - T_0), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (6)$$

де L_i , $i = \overline{1, 2}$ — диференціальні оператори, що задають граничні умови для зміщень відповідно при $x = 0$ та $x = l$; E_i — модуль Юнга в кожному шарі ґрунтового масиву Ω_i , $i = \overline{1, n}$, який залежить від концентрації сольових розчинів та температури для ґрунту, що знаходиться у водонасиченому стані, тобто $E_i = E_i(c_i, T_i)$ при $i = \overline{1, k}$, та $E_i = E_i(T_i)$ при $i = \overline{k+1, n}$ — модуль деформації ґрунту в природному стані.

Рівняння масоперенесення в шарах ґрунту, що знаходяться у водонасиченому стані, в неізотермічному режимі мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(D_i(c_i, T_i) \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) - v_i \frac{\partial c_i}{\partial x} - \gamma_i(c_i - C_*) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T^{(i)}(c_i, T_i) \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) = n_p^{(i)} \frac{\partial c_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, k}, \end{aligned} \quad (7)$$

де v_i — швидкість фільтрації у водонасичених шарах ґрунту; $t > 0$; $D_i(c_i, T_i)$, $D_T^{(i)}(c_i, T_i)$, — коефіцієнти конвективної дифузії та термо-дифузії; $n_p^{(i)}$ — пористості в i -ому шарі; γ_i — константи швидкості масообміну; C_* — концентрація граничного насичення; $x \in (0, l_k)$.

Крайові умови та умови спряження для концентрації мають вигляд

$$c_i(x, 0) = \tilde{C}_0^{(i)}(x), \quad x \in \cup(l_i, l_{i+1}), \quad i = \overline{1, k-1}, \quad (8)$$

$$L_3 c_1(0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad L_4 c_k(l_k, t) = \tilde{C}_2(t), \quad (9)$$

$$c_i(l_i) = c_{i+1}(l_i), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & D_i(c_i, T_i) \frac{\partial c_i(l_i, t)}{\partial x} - v_i c_i(l_i, t) = \\ & = D_{i+1}(c_{i+1}, T_{i+1}) \frac{\partial c_{i+1}(l_i, t)}{\partial x} - v_{i+1} c_{i+1}(l_i, t), \quad i = \overline{1, k-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\tilde{C}_0^{(i)}(x)$, $i = \overline{1, k-1}$, $\tilde{C}_1(t)$, $\tilde{C}_2(t)$ — задані функції; L_i , $i = \overline{3, 4}$ — диференціальні оператори, що задають граничні умови для концентрації.

Рівняння теплоперенесення в кожному з шарів ґрунтового масиву мають наступний вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) - \rho c_\rho \bar{v}_i \frac{\partial T_i}{\partial x} = c_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

де $\bar{v}_i = \begin{cases} v_i, & i = \overline{1, k}, \\ 0, & i = \overline{k+1, n}; \end{cases}$ $\lambda_T^{(i)}$, $c_T^{(i)}$ — коефіцієнти ефективної тепло-

ровідності вологого ґрунту та об'ємної теплоємності ґрунту відповідно; ρ — густина порового розчину; c_ρ — питома теплоємність порового розчину; $x \in (0, l)$.

Крайові умови та умови спряження для температури мають вигляд

$$T_i(x, 0) = \tilde{T}_0^{(i)}(x), \quad x \in \cup(l_i, l_{i+1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (13)$$

$$L_5 T_1(0, t) = \tilde{T}_1(t), \quad L_6 T_n(l, t) = \tilde{T}_2(t), \quad (14)$$

$$T_i(l_i) = T_{i+1}(l_i), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_T^{(i)} \frac{\partial T_i(l_i, t)}{\partial x} - \rho c_\rho \bar{v}_i T_i(l_i, t) = \\ & = \lambda_T^{(i+1)} \frac{\partial T_{i+1}(l_i, t)}{\partial x} - \rho c_\rho \bar{v}_{i+1} T_{i+1}(l_i, t), \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

де $\tilde{T}_0^{(i)}(x)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\tilde{T}_1(t)$, $\tilde{T}_2(t)$ — задані функції; L_i , $i = \overline{5, 6}$ — диференціальні оператори, що задають граничні умови для температури.

Фільтрація підземних вод з РГВ в шарах, що знаходяться у водонасиченому стані, описується наступною крайовою задачею:

$$v_i = -k_i(c_i, T_i) \frac{dh_i}{dx} + v_c^{(i)}(c_i) \frac{\partial c_i}{\partial x} + v_T^{(i)} \frac{\partial T_i}{\partial x}, \quad \text{div} \bar{v}_i + \frac{\partial n_p^{(i)}}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad (17)$$

$$h_1(0) = \tilde{H}_1, \quad h_k(l_k) = \tilde{H}_2, \quad (18)$$

$$h_i(l_i) = h_{i+1}(l_i), \quad v_i(l_i) = v_{i+1}(l_i), \quad i = \overline{1, k-1}. \quad (19)$$

Тут $k_i(c_i, T_i)$ — коефіцієнти фільтрації в i -ому шарі, що залежать від концентрації солей та температури; $v_c^{(i)}(c_i)$ — коефіцієнти хімічного осмосу в i -ому шарі, що залежать від концентрації солей; $v_T^{(i)}$ — коефіцієнти термічного осмосу в i -ому шарі; \tilde{H}_1 , \tilde{H}_2 — напори відповідно на нижній межі ґрунту та на глибині l_k .

Деформації та напруження з врахуванням неізотермічного режиму в одновимірному випадку в кожному шарі обчислюються за формулами [1; 16]

$$\varepsilon_i = \frac{du_i}{dx}, \quad \sigma_i = E_i \left(\frac{du_i}{dx} - \alpha_T^{(i)} \bar{T}_i \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in (0, l). \quad (20)$$

Чисельний розв'язок крайової задачі методом скінченних різниць. Для чисельного розв'язування поставленої задачі покриємо область $\bar{Q} = [0; l] \times [0; t_1]$ рівномірною сіткою $\bar{Q}^{(m_1, m_2)} = [0; m_1 h_1] \times [0; m_2 \tau]$ з кроками h_1 та τ відповідно по змінній x та часу t . Нехай m_1 — кількість кроків по просторовій змінній, m_2 — кількість кроків по часу.

Для дискретизації рівнянь (1), (7) та (12) використаємо монотонну різницеву схему О. А. Самарського [17]. В результаті отримаємо наступні скінченно-різницеві аналоги даних диференціальних рівнянь:

$$\frac{\lambda_j^{(s)}}{h_1} \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h_1} + (r^+)_j^{(s)} \frac{u_{j+1} - u_j}{h_1} + (r^-)_j^{(s)} \frac{u_j - u_{j-1}}{h_1} - \quad (21)$$

$$- \left(\lambda_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) + 2\mu_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) \right) \alpha_T^{(j)} \frac{T_{j+1}^{(s)} - T_{j-1}^{(s)}}{2h_1} = X_j,$$

$$j = \overline{1, m_1 - 1}, \quad s = \overline{0, m_2 - 1},$$

$$(n_p)_j \frac{c_j^{(s+1)} - c_j^{(s)}}{\tau} = \frac{\eta_j^{(s)}}{h_1} \left(d_{j+1}^{(s)} \frac{c_{j+1}^{(s+1)} - c_j^{(s+1)}}{h_1} - d_j^{(s)} \frac{c_j^{(s+1)} - c_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(v^+)_j^{(s)}}{D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)})} d_{j+1}^{(s)} \frac{c_{j+1}^{(s+1)} - c_j^{(s+1)}}{h_1} + \frac{(v^-)_j^{(s)}}{D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)})} d_j^{(s)} \frac{c_j^{(s+1)} - c_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} - \quad (22) \\
 & - \gamma_j (c_j^{(s+1)} - C_*) + \frac{1}{h_1} \left((d_T)_{j+1}^{(s)} \frac{T_{j+1}^{(s+1)} - T_j^{(s+1)}}{h_1} - (d_T)_j^{(s)} \frac{T_j^{(s+1)} - T_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right),
 \end{aligned}$$

$j = \overline{1, m_1^* - 1}$, $s = \overline{0, m_2 - 1}$, m_1^* — кількість кроків по просторовій змінній до РГВ,

$$\begin{aligned}
 c_T^{(j)} \frac{T_j^{(s+1)} - T_j^{(s)}}{\tau} &= \frac{\bar{\eta}_j^{(s)}}{h_1} \left((\bar{\lambda}_T)_{j+1}^{(s)} \frac{T_{j+1}^{(s+1)} - T_j^{(s+1)}}{h_1} - (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)} \frac{T_j^{(s+1)} - T_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right) + \quad (23) \\
 & + \rho c_\rho \left(\frac{(v^+)_j^{(s)}}{(\lambda_T)_j^{(s)}} (\bar{\lambda}_T)_{j+1}^{(s)} \frac{T_{j+1}^{(s+1)} - T_j^{(s+1)}}{h_1} + \frac{(v^-)_j^{(s)}}{(\lambda_T)_j^{(s)}} (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)} \frac{T_j^{(s+1)} - T_{j-1}^{(s+1)}}{h_1} \right), \\
 & j = \overline{1, m_1 - 1}, \quad s = \overline{0, m_2 - 1},
 \end{aligned}$$

та закону (17)

$$\begin{aligned}
 v_j^{(s)} &= -k_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) \frac{h_{j+1} - h_{j-1}}{2h_1} + \quad (24) \\
 & + (v_c)_j^{(s)}(c_j^{(s)}) \frac{c_{j+1}^{(s)} - c_{j-1}^{(s)}}{2h_1} + (v_T)_j^{(s)} \frac{T_{j+1}^{(s)} - T_{j-1}^{(s)}}{2h_1}, \quad j = \overline{1, m_1^* - 1}, \quad s = \overline{1, m_2}.
 \end{aligned}$$

У рівняннях (22)—(24) використані наступні позначення:

$$\begin{aligned}
 a_j^{(s)} &= \frac{1}{2} \left(k_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) + k_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, T_{j-1}^{(s)}) \right), \\
 d_j^{(s)} &= \frac{1}{2} \left(D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) + D_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, T_{j-1}^{(s)}) \right), \\
 (d_T)_j^{(s)} &= \frac{1}{2} \left((D_T)_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)}) + (D_T)_{j-1}^{(s)}(c_{j-1}^{(s)}, T_{j-1}^{(s)}) \right), \\
 (\bar{\lambda}_T)_j^{(s)} &= \frac{1}{2} \left((\lambda_T)_j^{(s)} + (\lambda_T)_{j-1}^{(s)} \right),
 \end{aligned}$$

$$\eta_j^{(s)} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 |v_j^{(s)}|}{2D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)})}} = 1 - \frac{h_1 |v_j^{(s)}|}{2D_j^{(s)}(c_j^{(s)}, T_j^{(s)})} + O(h_1^2),$$

$$\bar{\eta}_j^{(s)} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 \rho c_\rho |v_j^{(s)}|}{2(\lambda_T)_j^{(s)}}} = 1 - \frac{h_1 \rho c_\rho |v_j^{(s)}|}{2(\lambda_T)_j^{(s)}} + O(h_1^2),$$

$$\chi_j^{(s)} = \frac{1}{1 + 0,5h_1 |r_j^{(s)}|}, \quad r_j^{(s)} = \frac{1}{\lambda_j^{(s)} + 2\mu_j^{(s)}} \cdot \frac{\lambda_{j+1}^{(s)} + 2\mu_{j+1}^{(s)} - \lambda_{j-1}^{(s)} + 2\mu_{j-1}^{(s)}}{2h_1},$$

$$(r^+)_j^{(s)} = \frac{-r_j^{(s)} + |r_j^{(s)}|}{2} \geq 0, \quad (r^-)_j^{(s)} = \frac{-r_j^{(s)} - |r_j^{(s)}|}{2} \leq 0,$$

$$(v^+)_j^{(s)} = \frac{-v_j^{(s)} + |v_j^{(s)}|}{2} \geq 0, \quad (v^-)_j^{(s)} = \frac{-v_j^{(s)} - |v_j^{(s)}|}{2} \leq 0.$$

Умови спряження (5)—(6), (10)—(11), (15)—(16) та (19) апроксимуються наступним чином:

$$u_{i,j_r} = u_{i+1,j_r}, \quad i = \overline{1, m_1 - 1}, \quad (25)$$

$$E_i^{(s+1)} (u_{i,j_r} - u_{i,j_r-1}) - \alpha_T^{(i)} (T_i^{(s+1)} - T_0^{(s+1)}) =$$

$$= E_{i+1}^{(s+1)} (u_{i+1,j_r+1} - u_{i+1,j_r}) - \alpha_T^{(i+1)} (T_{i+1}^{(s+1)} - T_0^{(s+1)}), \quad (26)$$

$$c_{i,j_r}^{(s+1)} = c_{i+1,j_r}^{(s+1)}, \quad i = \overline{1, m_1^* - 1}, \quad (27)$$

$$D_i^{(s+1)} (c_{i,j_r}^{(s+1)} - c_{i,j_r-1}^{(s+1)}) - v_i^{(s+1)} c_{i,j_r}^{(s+1)} = D_{i+1}^{(s+1)} (c_{i+1,j_r+1}^{(s+1)} - c_{i+1,j_r}^{(s+1)}) - v_{i+1}^{(s+1)} c_{i+1,j_r}^{(s+1)}, \quad (28)$$

$$T_{i,j_r}^{(s+1)} = T_{i+1,j_r}^{(s+1)}, \quad i = \overline{1, m_1 - 1}, \quad (29)$$

$$(\lambda_T)_i^{(s+1)} (T_{i,j_r}^{(s+1)} - T_{i,j_r-1}^{(s+1)}) - \rho c_\rho \bar{v}_i^{(s+1)} T_{i,j_r}^{(s+1)} =$$

$$= (\lambda_T)_{i+1}^{(s+1)} (T_{i+1,j_r+1}^{(s+1)} - T_{i+1,j_r}^{(s+1)}) - \rho c_\rho \bar{v}_{i+1}^{(s+1)} T_{i+1,j_r}^{(s+1)}, \quad (30)$$

$$h_{i,j_r} = h_{i+1,j_r}, \quad v_{i,j_r}^{(s+1)} = v_{i+1,j_r}^{(s+1)}, \quad i = \overline{1, m_1^* - 1}, \quad (31)$$

де $s = \overline{0, m_2 - 1}$, i — номер шару, j_r — індекс дискретизації, що співпадає з межею шару.

Для початкових умов (8), (13) отримаємо наступні скінченно-різницеві аналоги:

$$c_j^{(0)} = C_0(jh_1), \quad j = \overline{0, m_1^*}, \quad T_j^{(0)} = T_0(jh_1), \quad j = \overline{0, m_1}.$$

Скінченно-різницеві аналоги (20) матимуть вигляд

$$\varepsilon_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h_1},$$

$$\sigma_j = E_j^{(s)} \left(\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h_1} - \alpha_T^{(j)} (T_n^{(s)} - T_0^{(s)}) \right), \quad j = \overline{1, m_1}, \quad s = \overline{0, m_2 - 1}. \quad (32)$$

Для знаходжень значень зміщень, концентрації солей, температури та напору використовувався метод прогонки [17].

Результати чисельних експериментів. Як приклад, розглянуто одновимірну задачу НДС в трьохшаровому ґрунтовому масиві товщиною $l = 10$ м за наявності в ньому РГВ та під впливом тепло-масоперенесення. Рівень l_1 знаходиться на глибині 3 м, а РГВ l_2 — на глибині 7 м (рис. 2). На рис. 2 область Ω_1 — це зона глинистого ґрунту, що знаходиться у водонасиченому стані, Ω_2 — зона піщаного ґрунту у водонасиченому стані, а область Ω_3 — це зона ґрунту в природному стані.

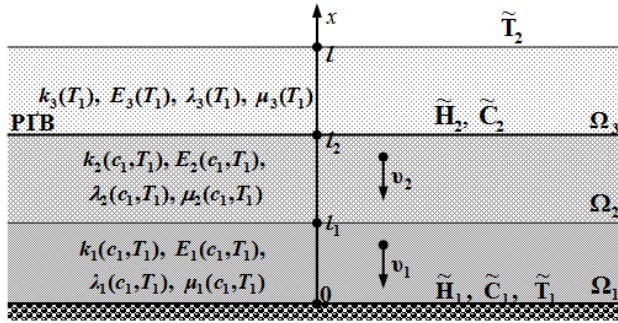


Рис. 2. Трьохшаровий ґрунтовий масив за наявності в ньому РГВ та впливу тепло-масоперенесення
Значення вхідних даних брались наступними:

$$n_p^{(1)} = n_p^{(2)} = n_p^{(3)} = 0,4, \quad \alpha_T^{(1)} = \alpha_T^{(2)} = \alpha_T^{(3)} = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}},$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0,002 \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad D_T^{(1)} = D_T^{(2)} = D_T^{(3)} = 0,002 \frac{\text{м}^2}{\text{доба}},$$

$$\gamma_p = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \gamma_{\text{зв.}}^{(1)} = 2,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \gamma_{\text{зв.}}^{(2)} = 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}},$$

$$\gamma_{\text{нр.}}^{(3)} = 1,7 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \lambda_1 = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \mu_1 = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$E_1 = 2,34 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \lambda_2 = 1,35 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \mu_2 = 0,9 \cdot 10^7 \text{ Па},$$

$$E_2 = 2,34 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \lambda_3 = 1,7 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad \mu_3 = 1,15 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad E_3 = 3 \cdot 10^7 \text{ Па},$$

$$\rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad c_\rho = 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}, \quad c_T^{(1)} = c_T^{(2)} = c_T^{(3)} = 2137 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}},$$

$$\lambda_T^{(1)} = \lambda_T^{(2)} = \lambda_T^{(3)} = 108 \frac{\text{кДж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1},$$

$$\tilde{H}_1 = 0 \text{ м}, \quad \tilde{H}_2 = 1 \text{ м}, \quad \tilde{C}_1(t) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{C}_2(t) = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{T}_1(t) = 5^0 \text{ С},$$

$$\tilde{T}_2(t) = 25^0 \text{ С}, \quad \tilde{C}_0(x) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}.$$

Прийнято наступні залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину та температури, коефіцієнтів Ламе і модуля Юнга від концентрації сольового розчину [6; 18; 19]:

$$k_1(c) = a_5^1 \cdot c^5 + a_4^1 \cdot c^4 + a_3^1 \cdot c^3 + a_2^1 \cdot c^2 + a_1^1 \cdot c + a_0^1,$$

$$\text{де } a_5^1 = 5,9404 \cdot 10^{-2}, \quad a_4^1 = -1,6703 \cdot 10^{-1}, \quad a_3^1 = 1,7051 \cdot 10^{-1},$$

$$a_2^1 = -7,4311 \cdot 10^{-2}, \quad a_1^1 = 1,0563 \cdot 10^{-2}, \quad a_0^1 = 1,0054 \cdot 10^{-3};$$

$$k_2(T) = b_5 \cdot T^5 + b_4 \cdot T^4 + b_3 \cdot T^3 + b_2 \cdot T^2 + b_1 \cdot T + b_0,$$

де

$$b_5 = 1,4154 \cdot 10^{-2}, \quad b_4 = -2,6097 \cdot 10^{-2}, \quad b_3 = 1,0819 \cdot 10^{-2},$$

$$b_2 = 1,2844 \cdot 10^{-4}, \quad b_1 = 1,0404 \cdot 10^{-2}, \quad b_0 = 3,0925 \cdot 10^{-3};$$

$$k(c, T) = \frac{1}{k_0} \cdot k_1(c) \cdot k_2(T),$$

де k_0 – коефіцієнт фільтрації для чистої води при температурі 20^0 С ,

$$k_0 = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{доба}};$$

$$\lambda(c) = a_3^2 \cdot c^3 + a_2^2 \cdot c^2 + a_1^2 \cdot c + a_0^2,$$

$$\text{де } a_3^2 = -1798,96, \quad a_2^2 = 4314,732, \quad a_1^2 = -2615,37, \quad a_0^2 = 2545,743;$$

$$\mu(c) = a_3^3 \cdot c^3 + a_2^3 \cdot c^2 + a_1^3 \cdot c + a_0^3,$$

$$\text{де } a_3^3 = -1205,28, \quad a_2^3 = 2880,321, \quad a_1^3 = -1741,92, \quad a_0^3 = 1696,324;$$

$$E(c) = a_3^4 \cdot c^3 + a_2^4 \cdot c^2 + a_1^4 \cdot c + a_0^4,$$

$$\text{де } a_3^4 = -0,000393, \quad a_2^4 = 0,1878866, \quad a_1^4 = -22,70202, \quad a_0^4 = 4410,552,$$

$c \in [0,1]$, $T \in [0,1]$ — безрозмірені величини.

НДС ґрунтового масиву з врахуванням вищенаведених чинників досліджувався протягом 4-х років.

Нижче наведено результати чисельних експериментів у вигляді графіків.

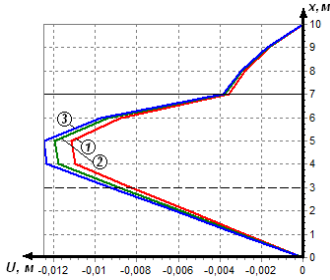


Рис. 3. Графіки розподілу зміщень під впливом тепло-масоперенесення та наявності РГВ: 1) при $t = 60$ діб; 2) при $t = 180$ діб; 3) при $t = 1440$ діб

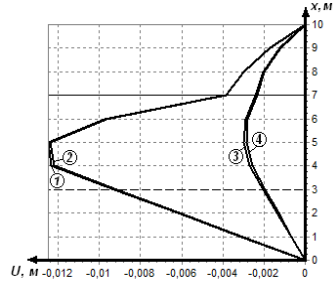


Рис. 4. Графіки розподілу зміщень за наявності РГВ для $t = 1440$ діб: 1) під впливом тепло-масоперенесення; 2) під впливом масоперенесення; 3) під впливом теплоперенесення; 4) без тепло-масоперенесення

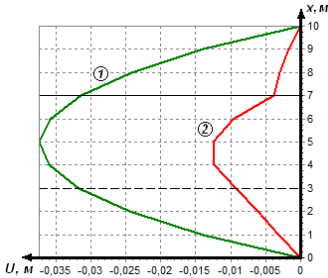


Рис. 5. Графіки розподілу зміщень під впливом тепло-масоперенесення ($t = 1440$ діб): 1) при відсутності РГВ; 2) за наявності РГВ

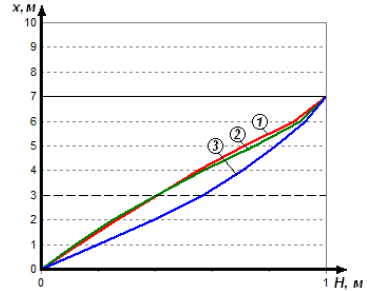


Рис. 6. Графіки розподілу напорів під впливом тепло-масоперенесення: 1) при $t = 60$ діб; 2) при $t = 180$ діб; 3) при $t = 1440$ діб

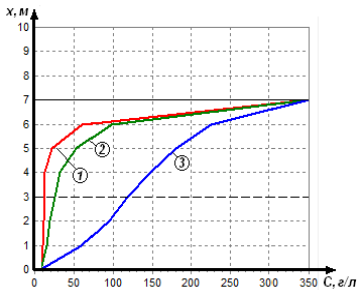


Рис. 7. Графіки розподілу концентрації солей в неізотермічному режимі: 1) при $t = 60$ діб; 2) при $t = 180$ діб; 3) при $t = 1440$ діб

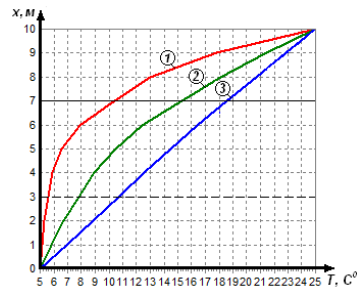


Рис. 8. Графіки розподілу температури при фільтрації сольових розчинів: 1) при $t = 60$ діб; 2) при $t = 180$ діб; 3) при $t = 1440$ діб

Як видно з рис. 3, при врахуванні впливу тепло-масоперенесення на НДС ґрунтового масиву зміщення з часом зростають. На рис. 6, 7 та 8 показано, що напір в умовах тепло-масоперенесення, концентрація солей в неізотермічному режимі та температура при фільтрації сольових розчинів також зростають з часом. Як видно з рис. 4, при врахуванні впливу тепло-масоперенесення зміщення зростають значно швидше, ніж у випадку його відсутності.

Врахування наявності РГВ значно змінює картину НДС. А саме: як видно з рис. 5, зміщення значно зменшуються за наявності РГВ в порівнянні з відповідними значеннями зміщень при відсутності РГВ. Також на результати чисельних експериментів значно впливає тип ґрунту, в якому досліджуються вищеописані процеси.

Висновки. Таким чином, в роботі сформульовано постановку та розроблено відповідну математичну модель задачі НДС багатощарового ґрунтового масиву за наявності РГВ та впливу тепло-масоперенесення. Отримано чисельний розв'язок поставленої крайової задачі методом скінченних різниць. Проведено ряд чисельних експериментів. Показано, що картина НДС в багатощаровому ґрунтовому масиві за наявності РГВ та під впливом тепло-масоперенесення значно змінюється в порівнянні з картиною НДС без врахування впливу тепло-масоперенесення та відсутності РГВ.

Отримані результати можуть бути використані для оцінки стану багатощарових ґрунтових основ та їх несучої здатності.

Список використаних джерел:

1. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наукова думка, 1991. — 432 с.
2. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наукова думка, 1998. — 615 с.
3. Власюк А. П. Розв'язування одновимірної стаціонарної задачі НДС ґрунтових масивів в умовах масоперенесення / А. П. Власюк, Є. І. Катерина // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інформ. — 1999. — Вип. 1. — С. 50–55.
4. Власюк А. П. Про деякі нові математичні моделі підземної гідромеханіки / А. П. Власюк // Вісник РДТУ. — Рівне, 2000. — Вип. 3(5), ч. 2. — С. 57–62.
5. Кузло М. Т. Про деякі математичні моделі напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод / М. Т. Кузло, І. А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. — Рівне, 2005. — Вип. 2 (30). — С. 282–287.
6. Кузло М. Т. Дослідження впливу концентрації сольових розчинів на деформаційні характеристики ґрунтів / М. Т. Кузло, І. А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. — Рівне, 2006. — Вип. 4 (36), ч. 2. — С. 209–214.

7. Філатова І. А. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтових масивів при наявності рівня ґрунтових вод / І. А. Філатова, М. Т. Кузло // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. — Рівне, 2006. — Вип. 4 (36), ч.2 — С. 203–208.
8. Філатова І. А. Математичне моделювання напружено-деформованого стану багат шарового ґрунтового масиву при наявності рівня ґрунтових вод / І. А. Філатова // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз. - мат. науки. — 2008. — С. 161–165.
9. Філатова І. А. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану шару ґрунту з врахуванням масопереносу при фільтрації сольових розчинів / І. А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. — Рівне, 2009. — Вип. 4 (36), ч.2. — С. 332–339.
10. Власюк А. П. Математичне моделювання напружено-деформованого стану багат шарового ґрунтового масиву в умовах теплопереносу при наявності рівня ґрунтових вод / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. XII Міжнар. наук. конференції ім. акад. М. Кравчука. — К., 2008. — С. 73.
11. Федорчук Н. А. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах та наявності рівня ґрунтових вод / Н. А. Федорчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам.-Под. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 204–215.
12. Власюк А. П. Математичне моделювання впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан багат шарового ґрунтового масиву при наявності рівня ґрунтових вод / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. Міжнарод. наук. конференції «Прийняття рішень в умовах невизначеності». — К. ; Рівне, 2008. — С. 73–75.
13. Власюк А. П. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в умовах тепло-масопереносу при фільтрації сольових розчинів / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук, О. І. Прохоров // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. — Рівне, 2009. — Вип. 4(36), ч. 2. — С. 320–331.
14. Власюк А. П. Математичне моделювання впливу тепло-масопереносу на напружено-деформований стан ґрунтового масиву в процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Тез. доп. XVII Міжнарод. наук. конференції «Прийняття рішень в умовах невизначеності». — Східниця, 2011. — С. 46–48.
15. Філатова І. А. Математичне моделювання напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в складних гідрогеологічних умовах / І. А. Філатова, Н. А. Федорчук // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. — 2011. — Вип. 3. — С. 218–226.
16. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. — К. : Вища школа, 1975. — 216 с.
17. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1989. — 616 с.
18. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах : [монографія] / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористув., 2008. — 416 с.

19. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційно-го руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій : [монографія] / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористув., 2010. — 277 с.

In the article was formulated the statement and carried out the mathematical modelling of problem of stressed and deformed state (SDS) of a multi-layered soil masses taking into account the heat and mass transfer at presence of a level of subsoil waters. There is obtained the numerical solution of respective boundary value problem in one-dimensional statement by the method of finite differences. As an example, the SDS of a three-layered soil masses problem has been investigated. Using created software a series was conducted of numeral experiments and their analysis.

Key words: *stressed and deformed state, soil masses, level of subsoil waters, the heat and mass transfer, method of finite differences.*

Отримано: 26.04.2013

УДК 517.947

А. П. Громик^{*}, канд. техн. наук,

І. М. Конет^{**}, д-р фіз.-мат. наук, професор

^{*} Подільський державний аграрно-технічний університет,
м. Кам'янець-Подільський,

^{**} Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У НАПІВОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ СУЦІЛЬНОМУ ЦИЛІНДРІ

Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано точний аналітичний розв'язок математичної моделі коливних процесів (гіперболічної крайової задачі) у напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

Ключові слова: *моделювання, коливний процес, гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральне перетворення, функція впливу, функція Гріна.*

Вступ. Коливні процеси відіграють важливу роль у сучасній вібраційній техніці, впливають на міцність і довговічність деталей машин і механізмів при врахуванні механічних і технологічних умов їх експлуатації. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є добре і давно відоме диференціальне рівняння коливань гіперболічного типу (хвильове рівняння)