УДК 004.942

В. А. Федорчук, д-р техн. наук, професор,
О. І. Махович, аспірант

Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ СИМЕТРИЧНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ МЕТОДОМ ПЕРЕРІЗІВ

Розглядається метод дослідження динаміки нестаціонарних теплових процесів, який враховує особливість симетричних граничних умов. Апроксимація диференціального рівняння в частинних похідних системою звичайних диференціальних рівнянь дала змогу істотно спростити обчислювальний алгоритм за умови забезпечення прийнятної точності розв’язків.

Ключові слова: *модель, нестаціонарний тепловий процес, симетричні граничні умови, апроксимація, числова реалізація.*

Вступ. Дослідження динаміки теплових процесів відіграє важливу роль у задачах проектування сучасних технічних об’єктів, оскільки їх надійність та ефективність функціонування в значній мірі залежить від правильності розрахунку температурних режимів експлуатації. Математичними моделями таких процесів, зазвичай, є диференціальні рівняння в частинних похідних гіперболічного та параболічного типу [1–3]. Способи їх розв’язування значною мірою відрізняються в залежності від граничних умов [1; 4; 5]. Існуючі програмні засоби, які можна застосувати для числової реалізації таких моделей використовують переважно різницеві схеми та вимагають, як правило, значних обчислювальних потужностей [1; 6]. Тому доцільним є пошук універсального підходу до розробки методів числової реалізації моделей процесів теплопровідності для випадків симетричних граничних умов першого, другого та третього роду.

Розглянемо методику дослідження нестаціонарних теплових процесів у необмеженій пластині з симетричними граничними умовами першого роду.

Постановка задачі. Температура $T(x, t)$ на краях необмеженої пластини примусово змінюється за законом $F_{гр1}\left(t\right) \equiv T(x,t)\big|_{x=\pm 1}$, який задається функцією часу (рис. 1).

Всередині пластини діє джерело тепла, потужність якого пропорційна $f(t)$. У початковий момент задано розподіл температури по товщині $F_{ПУ}\left(x\right) \equiv T(x,t)\big|_{t=0}$. Необхідно знайти розподіл температури в пластині.

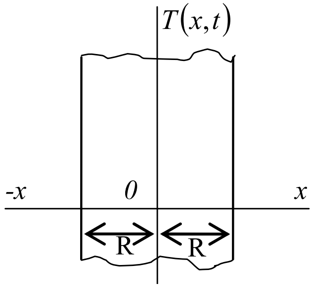

Рис. 1. *Схематичне зображення об'єкта моделювання*

У цьому випадку нестаціонарний тепловий процес описується одномірним гіперболічним рівнянням теплопровідності:

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}+\tau_r\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right)+f(t),\ -1\le x\le 1,$$

де $c(x)$ — питома теплоємність, $\rho(x)$ — густина, $k(x)$ — коефіцієнт теплопровідності, $f(t)$ — внутрішнє джерело тепла, x — просторова координата, t — час. Оскільки час релаксації τ_r теплового потоку є малою величиною (для газів та металів має порядок відповідно 10^{-9} с і 10^{-11} с [6]), то для багатьох практичних розрахунків (при відсутності високої інтенсивності зміни теплового потоку) додатковим доданком $\tau_r\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}$, який враховує скінченну швидкість переносу теплоти, можна знехтувати [5]. Таким чином, спрощена модель теплоперенесення описується рівнянням у частинних похідних параболічного типу:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=a(x)\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}+q(x)f(t),\ -1\le x\le 1, \quad (1)$$

у якому $b(x)=\frac{k'(x)}{c(x)\rho(x)}$, $q(x)=\frac{1}{c(x)\rho(x)}$, а коефіцієнт температуропровідності $a(x)=\frac{k(x)}{c(x)\rho(x)}$.

Припустимо, що розв'язок $T(x, t)$ рівняння (1) може бути апроксимований рядом $T(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)Q_n(x)$, в якому $Q_n(x)$ — відомі функції, наприклад, x^n, x^{2n}, $\cos nx$ та ін., які мають похідні відповідних порядків по x.

Похідні $\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$, з використанням граничних умов, можуть бути розвинені в ряд за функціями $T(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \frac{\partial^2 Q_n(x)}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{\infty} D_i(x, x_i) T(x_i, t). \qquad (2)$$

Коефіцієнти $D_i(x, x_i)$ виражаються через відомі функції $Q_n(x)$, їх похідні та через граничні умови.

Для задач, що мають симетричні граничні умови, виберемо функцію $Q_n(x) = x^{2n}$, і ряд (2) обмежений трьома членами із опорними точками $x_0 = 0, x_1 = \dfrac{1}{2}, x_2 = 1.$

Можна побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа

$$\begin{aligned} T(x,t) \approx T(x_0,t) \frac{(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)}{(x_0^2 - x_1^2)(x_0^2 - x_2^2)} + \\ + T(x_1,t) \frac{(x^2 - x_0^2)(x^2 - x_2^2)}{(x_1^2 - x_0^2)(x_1^2 - x_2^2)} + T(x_2,t) \frac{(x^2 - x_0^2)(x^2 - x_1^2)}{(x_2^2 - x_0^2)(x_2^2 - x_1^2)}, \end{aligned} \qquad (3)$$

за трьома заданими точками x_0, x_1, x_2. Вирази частинних похідних отримуємо шляхом диференціювання за координатою x.

Після спрощення маємо:

$$\begin{aligned} T(x,t) \approx (4x^4 - 5x^2 + 1) T(0,t) + \\ + \frac{16}{3} x^2 (1 - x^2) T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3} x^2 (4x^2 - 1) F_{гр1}(t). \end{aligned} \qquad (4)$$

Продиференціювавши (4) за координатою x, отримуємо вираз для частинної похідної першого порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \approx 2x(8x^2 - 5) T(0,t) - \frac{32}{3} x (2x^2 - 1) T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \\ + \frac{2}{3} x (8x^2 - 1) F_{гр1}(t) \end{aligned} \qquad (5)$$

звідки отримуємо

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \approx (48x^2 - 10) T(0,t) - \left(64x^2 - \frac{32}{3}\right) T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \left(16x^2 - \frac{2}{3}\right) F_{гр1}(t). \quad (6)$$

Підставивши в (1) вирази частинних похідних (6) і (5), отримуємо

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\left[16x^2\left(3a(x)+xb(x)\right)-10\left(a(x)+xb(x)\right)\right]T(0,t)+$$
$$+\left[-64x^2\left(a(x)+\frac{1}{3}xb(x)\right)+\frac{32}{3}\left(a(x)+xb(x)\right)\right]T\left(\frac{1}{2},t\right)+ \qquad (7)$$
$$+\left[16x^2\left(a(x)+\frac{1}{3}xb(x)\right)-\frac{2}{3}\left(a(x)+xb(x)\right)\right]F_{гр1}(t)+q(x)f(t).$$

Вважаючи послідовно $x=0$ та $x=\frac{1}{2}$, отримуємо систему двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку для визначення $T(0, t)$ та $T\left(\frac{1}{2},t\right)$:

$$\begin{cases}\frac{dT(0,t)}{dt}=-10a(0)T(0,t)+\frac{32}{3}a(0)T\left(\frac{1}{2},t\right)-\frac{2}{3}a(0)F_{гр\mathbf{1}}(t)+\\ +q(0)f(t);\\ \frac{dT\left(\frac{1}{2},t\right)}{dt}=\left[2a\left(\frac{1}{2}\right)-3b\left(\frac{1}{2}\right)\right]T(0,t)-\frac{8}{3}\left[2a\left(\frac{1}{2}\right)+b\left(\frac{1}{2}\right)\right]T\left(\frac{1}{2},t\right)+\\ +\frac{1}{3}\left[10a\left(\frac{1}{2}\right)+b\left(\frac{1}{2}\right)\right]F_{гр1}(t)+q\left(\frac{1}{2}\right)f(t).\end{cases} \qquad (8)$$

До системи диференціальних рівнянь задаються відповідні початкові умови $F_{ПУ}(0)$ та $F_{ПУ}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Розв'язавши систему (8) та скориставшись формулою (4), отримаємо можливість обчислення наближеного значення функції $T(x, t)$ у будь-якій точці.

Процес розв'язування розглянемо на модельному прикладі конкретної задачі, для якої:

$$a(x)=\frac{b_2\left(a_0-a_2x^2\right)}{2a_2},\ a_0-a_2x^2>0,\ 0<a_2\le a_0,\ b_2>0, \qquad (9)$$

$$b(x)\equiv 0, q(x)\equiv 1,\ f(t)=b_1e^{-b_1t}, \qquad (10)$$

$$F_{\mathbf{гр1}}(t)=1-e^{-b_1t}+\left(a_0-a_2\right)e^{-b_2t}, \qquad (11)$$

$$F_{ПУ}(x)=a_0-a_2x^2. \qquad (12)$$

Задача (1), (9)–(12) має точний аналітичний розв'язок

$$T(x,t) = 1 - e^{-b_1 t} + \left(a_0 - a_2 x^2\right) e^{-b_2 t}. \tag{13}$$

Із врахуванням (10)–(11) система (8) має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dT(0,t)}{dt} = a(0)\left[-10T(0,t) + \dfrac{32}{3}T\left(\dfrac{1}{2},t\right) - \dfrac{2}{3}F_{\boldsymbol{гр1}}(t)\right] + f(t); \\ \dfrac{dT\left(\dfrac{1}{2},t\right)}{dt} = a\left(\dfrac{1}{2}\right)\left[2T(0,t) - \dfrac{16}{3}T\left(\dfrac{1}{2},t\right) + \dfrac{10}{3}F_{\boldsymbol{гр1}}(t)\right] + f(t). \end{cases} \tag{14}$$

До диференціальних рівнянь задаються відповідні початкові умови, отримані із (12):

$$F_{ПУ}(0) = a_0,\ F_{ПУ}\left(\frac{1}{2}\right) = a_0 - \frac{a_2}{4}. \tag{15}$$

Обчислювальний експеримент. Апробація методу проведена шляхом обчислювального експерименту для кроку дискретизації $\tau = 10^{-4}$ с по часовій змінній при наступних значеннях коефіцієнтів: $a_0 = 300;\ a_2 = 0,5;\ \ b_1 = 0,1;\ b_2 = 0,5$. Тоді $a(0) = 150$, $a\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2399}{16}$,

$$f(0,t) = f\left(\frac{1}{2},t\right) = 0,1e^{-0,1t}, \quad F_{гр1}(t) = 1 - e^{-0,1t} + 299,5e^{-0,5t}, \quad t \in [0,5],$$

$x \in [-1,1]$. Для просторової координати вибрано крок дискретизації 0,05.

Система (14) чисельно розв'язувалась у середовищі Matlab за допомогою стандартної функції *ode15s*.

Отримані результати використовувались для обчислення розв'язків для будь-яких значень просторової координати і для будь-якого моменту часу за допомогою формули (4), яка із врахуванням вибраних коефіцієнтів набуває вигляду

$$\begin{aligned} T(x,t) \approx \left(4x^4 - 5x^2 + 1\right)T(0,t) + \frac{16}{3}x^2\left(1 - x^2\right)T\left(\frac{1}{2},t\right) + \\ + \frac{1}{3}x^2\left(4x^2 - 1\right)\left(1 - e^{-0,1t} + 299,5e^{-0,5t}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Результати розв'язування модельної задачі представлені на рис. 2.

В експерименті досліджувалась відносна похибка розв'язку. Наближений розв'язок задачі (1), (9)–(12) порівнювався із точним (13). Значення відносної похибки не перевищувало $\delta \le 0,01$.

Вигляд функції відносної похибки $\delta(x,t)$ представлений на рис. 3.

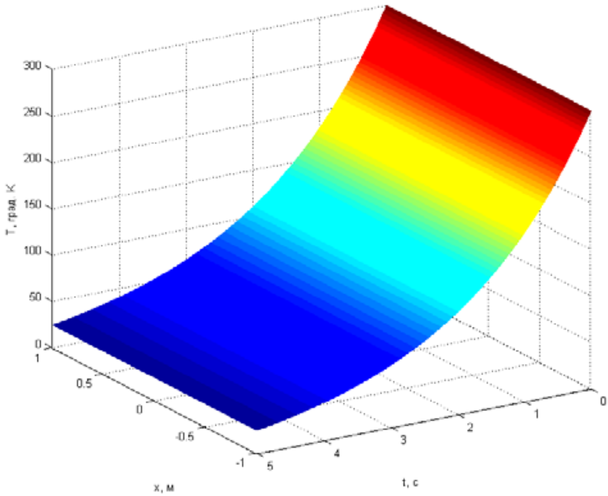

Рис. 2. *Графік розподілу температури по товщині пластини із плином часу*

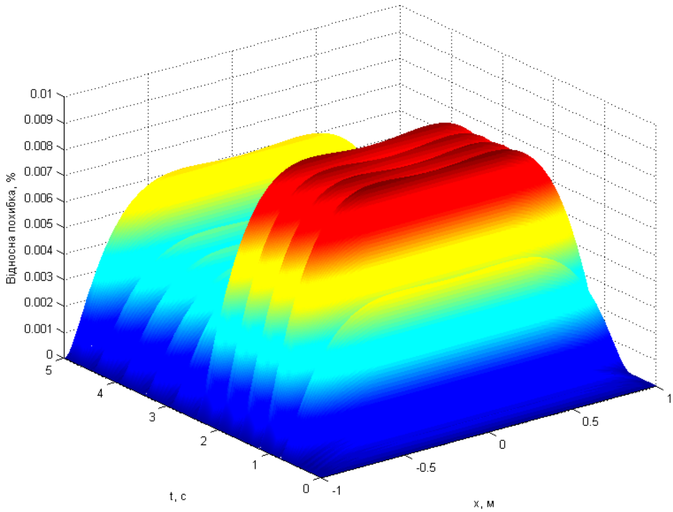

Рис. 3. *Графік залежності відносної похибки від просторової та часової координат*

Отримана вище формула (4) справедлива для симетричних граничних умов першого роду. Якщо ж задано симетричні граничні умови другого роду

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\pm 1} \equiv \pm F_{гр2}(t), \qquad (17)$$

то апроксимаційний вираз функції $T(x, t)$ має вигляд:

$$T(x,t) \approx \frac{1}{7}T(0,t)\left(16x^4 - 32x^2\right) + \\ + \frac{1}{7}T\left(\frac{1}{2},t\right)\left(-16x^4 + 32x^2\right) + T(0,t) + \frac{2}{7}x^2\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)F_{гр2}(t). \tag{18}$$

Продиференціювавши (18) за змінною x, отримаємо вираз частинної похідної першого порядку:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \approx \frac{64}{7}x\left(x^2 - 1\right)\left(T(0,t) - T\left(\frac{1}{2},t\right)\right) + \frac{1}{7}x\left(8x^2 - 1\right)F_{гр2}(t) . \tag{19}$$

Апроксимація частинної похідної другого порядку за змінною x функції $T(x, t)$ має вигляд:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{64}{7}\left(3x^2 - 1\right)\left[T(0,t) - T\left(\frac{1}{2},t\right)\right] + \frac{1}{7}\left(24x^2 - 1\right)F_{гр2}(t) . \tag{20}$$

Безпосередньою перевіркою шляхом підстановки переконуємось, що в точках $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$ вираз (18) перетворюється в тотожність.

Підставивши в (1) вирази частинних похідних (20) і (19), отримаємо

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{64}{7}\left[x^2\left(3a(x) + xb(x)\right) - a(x) - xb(x)\right] \times \left[T(0,t) - T\left(\frac{1}{2},t\right)\right] + \\ + \frac{1}{7}\left[8x^2\left(3a(x) + xb(x)\right) - a(x) - xb(x)\right]F_{гр2}(t) + q(x)f(t). \tag{21}$$

Система диференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій $T(0, t)$ та $T\left(\frac{1}{2},t\right)$ має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dT(0,t)}{dt} = \dfrac{1}{7}a(0)\left[64\left(T\left(\dfrac{1}{2},t\right) - T(0,t)\right) - F_{гр2}(t)\right] + \\ +q(0)f(t); \\ \dfrac{dT\left(\frac{1}{2},t\right)}{dt} = \dfrac{8}{7}\left[2a\left(\dfrac{1}{2}\right) + 3b\left(\dfrac{1}{2}\right)\right] \cdot \left[T\left(\dfrac{1}{2},t\right) - T(0,t)\right] + \\ + \dfrac{1}{7}\left[5a\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}b\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]F_{гр2}(t) + q\left(\dfrac{1}{2}\right)f(t). \end{cases} \tag{22}$$

У випадку задання граничних умов третього роду

$$\left[\pm\alpha T\left(x,t\right)+\beta\frac{\partial T\left(x,t\right)}{\partial t}\right]\Bigg|_{x=\pm1}\equiv F_{гр3}\left(t\right), \tag{23}$$

апроксимаційний вираз для наближеного обчислення значень функції набуде вигляду:

$$\begin{gathered}T\left(x,t\right)\approx\left[\frac{4\left(3\alpha+8\beta\right)x^4-\left(15\alpha+64\beta\right)x^2}{3\alpha+14\beta}\right]T\left(0,t\right)+\\+\left[\frac{16\left(\alpha+4\beta\right)x^2-16\left(\alpha+2\beta\right)x^4}{3\alpha+14\beta}\right]T\left(\frac{1}{2},t\right)+\frac{x^2\left(4x^2-1\right)}{3\alpha+14\beta}F_{гр3}\left(t\right)+T\left(0,t\right).\end{gathered} \tag{24}$$

Продиференціювавши (24) за змінною *x*, отримаємо вираз для апроксимації частинної похідної першого порядку:

$$\begin{gathered}\frac{\partial T\left(x,t\right)}{\partial x}\approx\left[\frac{16\left(3\alpha+8\beta\right)x^3-2\left(15\alpha+64\beta\right)x}{3\alpha+14\beta}\right]T\left(0,t\right)+\\+\left[\frac{32\left(\alpha+4\beta\right)x-64\left(\alpha+2\beta\right)x^3}{3\alpha+14\beta}\right]T\left(\frac{1}{2},t\right)+\frac{2x\left(8x^2-1\right)}{3\alpha+14\beta}F_{гр3}\left(t\right).\end{gathered} \tag{25}$$

Апроксимаційний вираз для частинної похідної другого порядку за змінною *x* набуде вигляду:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 T\left(x,t\right)}{\partial x^2}\approx\left[\frac{48\left(3\alpha+8\beta\right)x^2-30\alpha-128\beta}{3\alpha+14\beta}\right]T\left(0,t\right)+\\+32\left[\frac{\alpha+4\beta-6\left(\alpha+2\beta\right)x^2}{3\alpha+14\beta}\right]T\left(\frac{1}{2},t\right)+\frac{48x^2-2}{3\alpha+14\beta}F_{гр3}\left(t\right).\end{gathered} \tag{26}$$

Після підстановки відповідних значень переконуємось, що в точках $x=0$ та $x=\frac{1}{2}$ вираз (24) перетворюється в тотожність, приймаючи значення $T(0,t)$ та $T\left(\frac{1}{2},t\right)$ відповідно.

Для визначення невідомих функцій $T(0,t)$ та $T\left(\frac{1}{2},t\right)$ потрібно: підставити в (1) вирази (26) та (25), отримати:

$$\frac{\partial T\left(x,t\right)}{\partial t}=W_1\left(x\right)T\left(0,t\right)+W_2\left(x\right)T\left(\frac{1}{2},t\right)+W_3\left(x\right)F_{гр3}\left(t\right)+q\left(x\right)f\left(t\right), \tag{27}$$

де

$$W_1(x)=\frac{16x^2(3\alpha+8\beta)(3a(x)+xb(x))-2(15\alpha+64\beta)(a(x)+xb(x))}{3\alpha+14\beta},$$

$$W_2(x)=\frac{32(\alpha+4\beta)(a(x)+xb(x))-64x^2(\alpha+2\beta)(3a(x)+xb(x))}{3\alpha+14\beta},$$

$$W_3(x)=\frac{(16x^2-2)(3a(x)+xb(x))+4a(x)}{3\alpha+14\beta};$$

отримати систему двох звичайних диференціальних рівнянь у точках $x=0$ та $x=\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases}\dfrac{dT(0,t)}{dt}=W_1(0)T(0,t)+W_2(0)T\left(\dfrac{1}{2},t\right)+W_3(0)F_{гр3}(t)+q(0)f(t),\\[2ex] \dfrac{dT\left(\dfrac{1}{2},t\right)}{dt}=W_1\left(\dfrac{1}{2}\right)T(0,t)+W_2\left(\dfrac{1}{2}\right)T\left(\dfrac{1}{2},t\right)+W_3\left(\dfrac{1}{2}\right)F_{гр3}(t)+q\left(\dfrac{1}{2}\right)f(t);\end{cases}$$

розв'язати систему.

Апроксимаційні формули для частинних похідних, отриманих з використанням граничних умов третього роду, є найбільш універсальними. Поклавши в них $\beta=0$ або $\alpha=0$, отримаємо випадки, що відповідають граничним умовам першого або другого роду відповідно і які співпадають із (4) та (18).

Висновки. Аналіз запропонованого методу дослідження динаміки нестаціонарних теплових процесів показав, що відносна похибка методу не перевищує 0,01%. Отримана точність узгоджується з точністю реальних вимірювань, а універсальність формул, які можна застосовувати для випадків симетричних граничних умов I, II, III роду і простота алгоритмів, за якими проводяться обчислення, дає змогу застосовувати метод у системах із обмеженими обчислювальними ресурсами (наприклад, для систем із вбудованими мікроконтролерами) або для розв'язування оптимізаційних задач, де є необхідність багаторазового знаходження розв'язків. Перспективними розвідками з даного напрямку можуть бути задачі розробки методики застосування методу перерізів до розв'язування крайових задач теплопровідності, а також задач дослідження динаміки нестаціонарних теплових процесів для тіл скінченних розмірів (прямокутного бруса, круглого стержня, порожнистого циліндра тощо).

Список використаних джерел:

1. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. — М. : Высшая школа, 1967. — 600 с.
3. Методы определения теплопроводности и температуропроводности / А. Г. Шашков, Г. М. Волохов, Т. Н. Абраменко, В. П. Козлов ; под ред. А. В. Лыкова. — М. : Энергия, 1973. — 336 с.
4. Конет И. М. Обобщенные нестационарные температурные поля в плоских прямоугольных областях: Интегральные преобразования в задачах теплопроводности и упругости / И. М. Конет, М. П. Ленюк. — К., 1986. — С. 3–15. — (Препринт /АН УССР. Ин-т математики; 86.54).
5. Конет І. М. Нестаціонарні температурні поля в безкрайній ізотропній пластинці / І. М. Конет, А. П. Громик // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. праць Ін-та математики АН України. — К., 1994. — Вип. 5. — С. 92–97.
6. Верлань А. Ф. Компьютерное моделирование процессов передачи тепла в перспективных базовых несущих конструкциях стоечного типа с тепловыми трубами / А. Ф. Верлань, И. О. Горошко, Ю. Е. Николаенко // Математичні машини і системи. — 2008. — № 2. — С. 90–99.

The method for studying of the dynamics of transient thermal processes, which takes into account the symmetric boundary conditions considered in the article. Approximation of partial differential equations through a system of ordinary differential equations has significantly simplify the computational algorithm while ensuring acceptable accuracy of the solution.

Key words: *model, transient thermal process, symmetric boundary conditions, approximation, numerical.*

Отримано: 11.03.2014