

УДК 681.5.015.52

**М. М. Масри**, аспирант

Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса

## **ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ВОЛЬТЕРРА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ТЕСТОВЫХ СИГНАЛОВ**

Дано теоретическое обоснование метода идентификации нелинейной динамической системы на основе аппроксимационной модели Вольтерра при использовании тестовых многоступенчатых сигналов с учетом погрешностей измерений откликов. Для обеспечения вычислительной устойчивости метода идентификации применяется метод регуляризации и процедуры шумоподавления, основанные на вейвлет-преобразовании. Исследуется эффективность вычислительных алгоритмов, реализующих метод идентификации.

**Ключевые слова:** *нелинейные динамические системы, аппроксимационная модель, ряды Вольтерра, ядра Вольтерра, идентификация, многоступенчатые тестовые сигналы.*

**Введение.** Методы математического моделирования и эксперимент являются основными средствами исследования сложных нелинейных динамических систем (НДС). Для описания НДС часто используется аппарат интегростепенных рядов Вольтерра (РВ) [1; 2]. При этом нелинейные и динамические свойства системы полностью характеризуются последовательностью многомерных весовых функций — ядер Вольтерра (ЯВ). Задача идентификации (построения модели) в виде РВ заключается в определении ЯВ на основе экспериментальных данных «вход–выход» НДС.

Идентификация по своей сути относится к обратным задачам, при решении которых возникают серьезные трудности вычислительного плана, обусловленные некорректностью постановки задачи. Получаемые решения оказываются неустойчивыми к погрешностям исходных данных — измерений откликов идентифицируемой НДС [3, 4]. Кроме того, при использовании моделей в виде РВ возникает проблема разделения отклика  $y(t)$  исследуемой НДС на парциальные составляющие (ПС)  $y_n(t)$ , соответствующие отдельным членам РВ, поскольку измеряется суммарный отклик  $y(t)$  на тестовый сигнал  $x(t)$ . Поэтому необходимо применять специальные приемы выделения ПС из отклика НДС.

Известен способ такой декомпозиции при построении аппроксимационной модели Вольтерра, основанный на использовании тестовых детерминированных сигналов с различными амплитудами и применении метода наименьших квадратов (МНК) для обработки экспериментальных данных [5]. Однако, реализация метода идентификации НДС с ис-

пользованием в качестве тестовых многоступенчатых сигналов приводит к большим погрешностям в получаемых оценках диагональных и параллельных им сечений многомерных переходных функций, что обусловлено неточностью измерений откликов. Поэтому для повышения устойчивости вычислительных алгоритмов на основе данного метода идентификации целесообразно применить процедуру регуляризации некорректных задач по А. Н. Тихонову [6].

**Целью работы** является теоретическое обоснование метода идентификации НДС на основе аппроксимационной модели Вольтера при использовании тестовых многоступенчатых сигналов с учетом погрешностей измерений откликов; разработка и исследование эффективности вычислительных алгоритмов, реализующих метод идентификации; повышение вычислительной устойчивости алгоритмов с помощью метода регуляризации и применения процедуры шумоподавления, основанной на вейвлет-преобразовании.

**Метод идентификации.** Метод идентификации НДС на основе РВ во временной области основывается на аппроксимации отклика НДС  $y(t)$  ( $t$  — текущее время) на произвольный детерминированный сигнал  $x(t)$  в виде интегростепенного полинома  $N$ -го порядка ( $N$  — порядок аппроксимационной модели):

$$\hat{y}_N(t) = \sum_{n=1}^N \hat{y}_n(t) = \sum_{n=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t w_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n x(t - \tau_i) d\tau_i. \quad (1)$$

Пусть на вход НДС поочередно подаются тестовые сигналы  $a_1x(t), a_2x(t), \dots, a_Lx(t)$ ;  $a_1, a_2, \dots, a_L$  — различные вещественные числа, удовлетворяющие условию  $0 < |a_j| \leq 1$  для  $\forall j = 1, 2, \dots, L$ , тогда

$$\begin{aligned} \hat{y}_N[a_jx(t)] &= \sum_{n=1}^N \hat{y}_n[a_jx(t)] = \\ &= \sum_{n=1}^N a_j^n \int_0^t \dots \int_0^t w_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n x(t - \tau_i) d\tau_i = \sum_{n=1}^N \hat{y}_n(t) a_j^n. \end{aligned} \quad (2)$$

ПС в аппроксимационной модели  $\hat{y}_n(t)$  находятся с помощью МНК, который позволяет получить такие их оценки при которых сумма квадратов отклонений откликов идентифицируемой НДС  $y[a_jx(t)]$  от откликов модели  $\hat{y}_N[a_jx(t)]$  минимальна, т.е. обеспечивает минимум среднеквадратичного критерия

$$J_N = \sum_{j=1}^L (y[a_jx(t)] - \hat{y}_N[a_jx(t)])^2 = \sum_{j=1}^L [y_j(t) - \sum_{n=1}^N a_j^n \hat{y}_n(t)]^2 = \min, \quad (3)$$

где  $y_j(t) = y[a_jx(t)]$ . Минимизация критерия (3) сводится к решению системы нормальных уравнений Гаусса, которую в векторно-матричной форме можно записать в виде

$$A' A \hat{y} = A' y, \quad (4)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^N \\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_L & a_L^2 & \cdots & a_L^N \end{bmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1(t) \\ \hat{y}_2(t) \\ \cdots \\ \hat{y}_N(t) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdots \\ y_L(t) \end{bmatrix}.$$

Из (4), получим

$$\hat{y} = (A' A)^{-1} A' y. \quad (5)$$

Применение тестовых многоступенчатых сигналов. Если тестовый сигнал  $x(t)$  представляет собой единичную функцию (функцию Хевисайда) —  $\theta(t)$ , то решением СЛАУ (5) являются переходная функция первого порядка  $\hat{h}_1(t)$  и диагональные сечения  $n$ -го порядка  $\hat{h}_n(t, \dots, t)$  ( $n = \overline{2, L}$ ).

Для определения поддиагональных сечений переходных функций  $n$ -го порядка ( $n \geq 2$ ) НДС испытывается с помощью  $n$  тестовых ступенчатых сигналов с заданными амплитудой и различными интервалами между сигналами. При соответствующей обработке откликов получим поддиагональные сечения  $n$ -мерных переходных функций характеристик  $h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n)$ , которые представляют собой  $n$ -мерные интегралы от ядер  $n$ -го порядка  $w_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$

$$h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty w_n(t - \tau_1 - \lambda_1, \dots, t - \tau_n - \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n. \quad (6)$$

Метод определения сечений  $n$ -мерных переходных функций основывается на утверждении, доказательство которого аналогично приведенному в Приложении [7].

**Утверждение.** Пусть тестовые воздействия представляют собой сумму  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) ступенчатых сигналов  $x_i(t) = a\theta(t - \tau_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), со сдвигом по времени  $t$  на  $\tau_1, \dots, \tau_k$ , тогда, для НДС с одним входом и одним выходом, оценка сечения переходной характеристики  $n$ -го порядка

$$\hat{h}_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) = \frac{(-1)^n}{n! a^n} \sum_{\delta_{\tau_1}, \dots, \delta_{\tau_n}=0}^1 (-1)^{\sum_{i=1}^n \delta_{\tau_i}} \hat{y}(t, \delta_{\tau_1}, \dots, \delta_{\tau_n}), \quad (7)$$

где  $\hat{y}_n(t, \delta_{\tau_1}, \dots, \delta_{\tau_n})$  — оценка  $n$ -ой ПС отклика ОК в момент времени  $t$ , полученная в результате обработки данных экспериментов на основе (5).

Отклик НДС, измеренный в момент времени  $t$ , при действии на ее входе многоступенчатого сигнала с амплитудой  $a$ , причем если  $\delta_{\tau_i} = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то тестовое воздействие содержит ступенчатый сигнал со сдвигом на  $\tau_i$ , в противном случае, при  $\delta_{\tau_i} = 0$ , — его не содержит.

Например, для определения переходной характеристики второго порядка сначала НДС испытывается ступенчатыми сигналами со сдвигами по времени на  $\tau_1$  и  $\tau_2$

$$x_1(t) = a\theta(t - \tau_1) \text{ и } x_2(t) = a\theta(t - \tau_2),$$

измеряются соответствующие отклики  $y(t, 1, 0)$  и  $y(t, 0, 1)$ . С помощью МНК находятся  $\hat{y}_2(t, 1, 0)$  и  $\hat{y}_2(t, 0, 1)$ . Затем, подают на вход НДС двуступенчатый сигнал

$$x(t) = a\theta(t - \tau_1) + a\theta(t - \tau_2)$$

и из полученной при этом ПС  $\hat{y}_2(t, 1, 1)$  отклика вычитаются ПС откликов на одиночные ступенчатые сигналы

$$\hat{y}_2(t, 1, 1) - \hat{y}_2(t, 1, 0) - \hat{y}_2(t, 0, 1) = 2\hat{h}_2(t - \tau_1, t - \tau_2). \quad (8)$$

Из (8), после нормировки, следует

$$\hat{h}_2(t - \tau_1, t - \tau_2) = \frac{1}{2} [\hat{y}_2(t, 1, 1) - \hat{y}_2(t, 1, 0) - \hat{y}_2(t, 0, 1)].$$

При фиксированных значениях  $\tau_1$  и  $\tau_2$  оценка ПХ второго порядка  $\hat{h}_2(t - \tau_1, t - \tau_2)$  представляет собой функцию от переменной  $t$  — сечение поверхности  $\hat{h}_2(t_1, t_2)$  плоскостью, проходящей под углом в  $45^\circ$  к осям  $t_1$  и  $t_2$  и сдвинутой по оси  $t_1$  на величину  $\tau_0 = \tau_1 - \tau_2$ . Изменяя величину  $\tau_0$ , получают различные сечения  $\hat{h}_2(t, t - \tau_0)$ , по которым можно восстановить всю поверхность  $\hat{h}_2(t_1, t_2)$ . При  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ , получаем диагональное сечение  $\hat{h}_2(t, t)$ .

Таким образом, вычислительный алгоритм, реализующий метод идентификации переходных функций на основе соотношения (7) сводится к решению СЛАУ (4) для каждого фиксированного момента времени  $t$  на интервале  $[0, T]$ , где  $T$  — время моделирования.

**Регуляризация процедуры оценки переходных функций.** Для получения устойчивого к погрешности измерений решения СЛАУ (4) используется метод регуляризации А. Н. Тихонова, основанный на вариационном способе построения регуляризующего оператора. Этот метод сводится к нахождению приближенного вектора решения  $z^\alpha$ , минимизирующего некоторый сглаживающий функционал. Единственный вектор, удовлетворяющий условию минимума сглаживающего функционала, может быть определен из решения СЛАУ

$$(A^*A + \alpha I)z^\alpha = A^*b, \quad (9)$$

где  $A^*$  — матрица, сопряженная к  $A$ ;  $I$  — единичная матрица;  $\alpha$  — параметр регуляризации. Для выбора значения параметра  $\alpha$  используется критерий невязки  $\|Az - b\| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданная погрешность решения [6].

**Компьютерное моделирование.** Для исследования метода идентификации выбран объект, который описывается нелинейным дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) + \beta y^2(t) = x(t), \quad (10)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные коэффициенты. Непараметрическая модель объекта в виде трех членов РВ при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$y(t) = \int_0^t w_1(\tau_1)x(t-\tau_1)d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t w_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \int_0^t \int_0^t \int_0^t w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\tau_3)d\tau_1d\tau_2d\tau_3, \quad (11)$$

где ЯВ первого, второго и третьего порядков равны, соответственно

$$w_1(\tau_1) = e^{-\alpha\tau_1},$$

$$w_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{\beta}{\alpha}(e^{-\alpha(\tau_1 + \tau_2)} - e^{-\alpha\tau_2}), \quad \tau_1 \leq \tau_2;$$

$$w_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \cdot (e^{\alpha(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)} + 3e^{-\alpha(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)} - 4e^{-\alpha(\tau_2 + \tau_3)} - 2e^{-\alpha(\tau_1 + \tau_3)} + 2e^{-\alpha\tau_3}), \quad \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3.$$

Диагональные сечения ЯВ получаем, полагая  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = t$ :

$$w_2(t, t) = \frac{\beta}{\alpha}(e^{-2\alpha t} - e^{-\alpha t}), \quad w(t, t, t) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \cdot (e^{-3\alpha t} - 2e^{-2\alpha t} + e^{-\alpha t}).$$

Переходная функция  $h_1(t)$  и диагональные сечения переходных функций второго  $h_2(t, t)$  и третьего  $h_3(t, t, t)$  порядка равны, соответственно

$$h_1(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}), \quad (12)$$

$$h_2(t, t) = \frac{\beta}{\alpha^3}(e^{-2\alpha t} + 2\alpha t e^{-\alpha t} - 1), \quad (13)$$

$$h_3(t, t, t) = \frac{\beta^2}{\alpha^6}(A + B e^{-\alpha t} + C e^{-2\alpha t} + D e^{-3\alpha t}), \quad (14)$$

где

$$A = 2\alpha, B = 2 - 3\alpha - 2\alpha^2 t(1 + \alpha t), C = -2(1 + \alpha t - \alpha), D = -\alpha.$$

При  $t = 0$   $h_1(0) = 0$ ,  $h_2(0, 0) = 0$ ,  $h_3(0, 0, 0) = 0$ .

$$\text{При } t \rightarrow +\infty \quad h_1(t) \rightarrow \frac{1}{\alpha}, \quad h_2(t, t) \rightarrow -\frac{\beta}{\alpha^3}, \quad h_3(t, t, t) \rightarrow \frac{2\beta^2}{\alpha^5}.$$

Аналитические выражения для переходных характеристик (12)–(13) используются в качестве эталонов для сравнения полученных на основе обработки данных эксперимента в соответствии с предлагаемым методом идентификации (7) переходных характеристик  $\hat{h}_1(t)$ ,  $\hat{h}_2(t_1, t_2)$ ,  $\hat{h}_3(t_1, t_2, t_3)$ .

Выполнено исследование точности и помехоустойчивости метода идентификации. Численные эксперименты проводились с помощью имитационного моделирования в среде MATLAB-SIMULINK. В качестве критерия качества идентификации (адекватности модели) используется среднеквадратичная ошибка (СКО) оценки переходных функций для тестовой НДС при различных уровнях погрешностей измерений откликов.

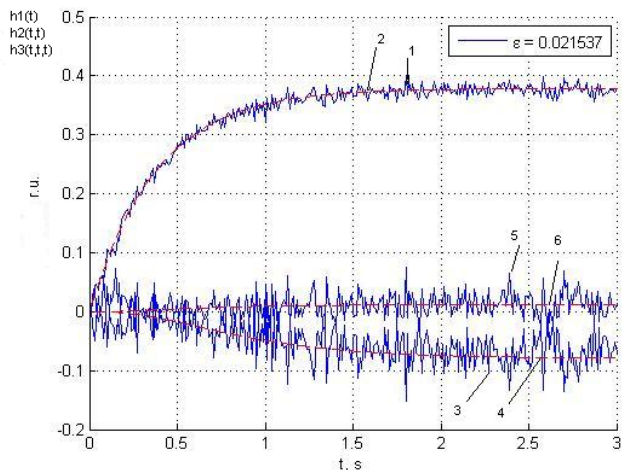
Для повышения помехоустойчивости метода идентификации применяются процедуры шумоподавления (сглаживания) к получаемым оценкам переходных функций, основанные на вейвлет-преобразовании [8].

Шумоподавление обычно достигается удалением высокочастотных составляющих из спектра сигнала, представляющего аддитивную смесь информационной составляющей — переходной функции, получаемой в результате обработки откликов, и шума, обусловленного погрешностью измерительной аппаратуры. Применительно к вейвлетным разложениям это может быть реализовано непосредственно удалением детализирующих коэффициентов высокочастотных уровней. Задавая некоторый порог для их уровня, и срезая по нему детализирующие коэффициенты, можно уменьшать уровень шумов.

Для сглаживания результатов идентификации использовалась утилита *wden* из пакета расширения Wavelet Toolbox системы Matlab с материнским вейвлетом *coiflet* — *coif4* при следующих значениях параметров: параметр установки правила вычисления порогового значения для ограничения коэффициентов разложения TPTR='minimaxi' (по минимаксной оценке); параметр установки типа порога очистки SORH='s' (гибкий); параметр, определяющий способ пересчета порога SCAL='one' (использование порога, единого для всех уровней разложения, без перемасштабирования); глубина разложения данных — 3.

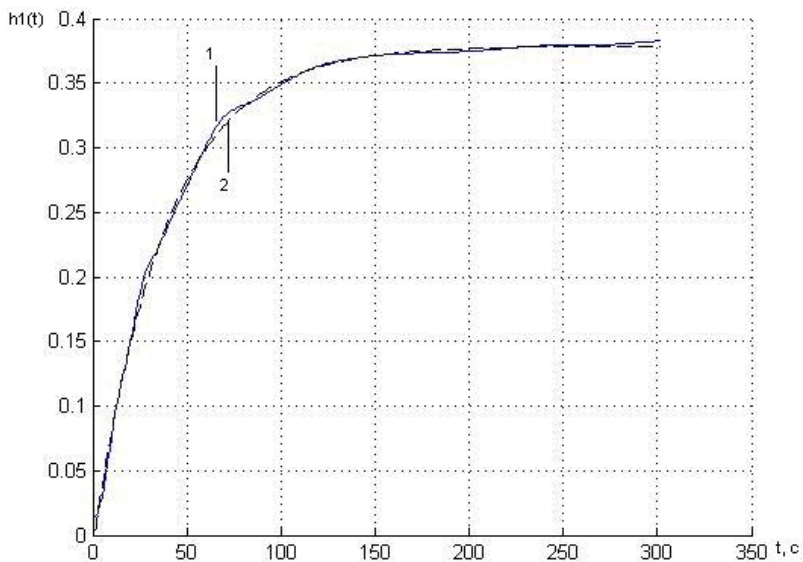
В исследованиях модель, получаемой зашумленной оценки сечения переходной функции, принимается аддитивной:  $h_n(t, t, \dots, t) + \xi(t)$  с равномерным шагом по аргументу  $t$ , где  $h_n(t, t, \dots, t)$  — полезная информационная составляющая,  $\xi(t)$  — помеха (белый гауссов шум с дисперсией  $D$  и средним нулевым значением).

На рис. 1 представлены результаты идентификации тестовой НДС с помощью ступенчатых сигналов и МНК — оценки переходных функций:  $\hat{h}_1(t)$ ,  $\hat{h}_2(t, t)$ ,  $\hat{h}_3(t, t, t)$  при измерениях откликов с погрешностью 3% и применением регуляризации.

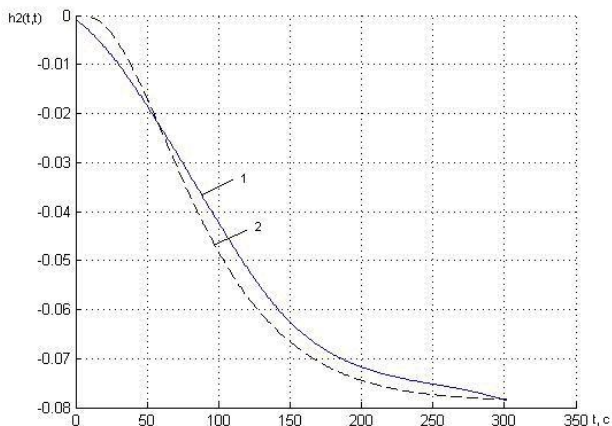


**Рис. 1.** Оценки переходных функций: 1 — 1-го, 3 — 2-го и 5 — 3-го порядков при погрешности измерений 3%; 2, 4, 6 — соответствующие эталонные значения.

Результаты идентификации после сглаживания с помощью вейвлет-преобразований: оценки переходных функций первого (рис. 2) и второго (рис. 3) порядков.



**Рис. 2.** Оценка переходной функции 1-го порядка после сглаживания вейвлетом *coif-5* (уровень декомпозиции — 5) — 1; 2 — эталонная функция



**Рис. 3.** Оцінка переходної функції 2-го порядку после згладжування вейвлетом соіф-4 (уровень декомпозиції — 7) — 1; 2 — еталонная функция

**Выводы.** На результати ідентифікації апроксимаційної моделі Вольєрра НДС при використанні тестових многоступенчатих сигналів суттєве впливають погрешности вимірювань. Для тестової НДС засобами імітаційного моделювання в середі Matlab-Simulink виконані дослідження точності і помехоустойчивости получаемых оценок переходных функций первого, второго и третьего порядков. Приемлемые на практике точность и помехоустойчивость достигаются применением метода регуляризации некорректных задач по А.Н. Тихонову и процедуры шумоподавления, основанные на вейвлет-преобразовании.

### Список использованной литературы:

1. Пупков К. А. Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник для ВУЗов : в 5 т. / К. А. Пупков, Н. Д. Егупов — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. — Т. 2. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления. — 638 с.
2. Doyle F. J. Identification and Control Using Volterra Models / F. J. Doyle, R. K. Pearson, B. A. Ogunnaike. — Published Springer Technology & Industrial Arts, 2001. — 314 p.
3. Pavlenko V. Computing of the Volterra Kernels of a Nonlinear System Using Impulse Response Data / V. Pavlenko, M. Massri, V. Ilyin // Proceedings of 9th International Middle Eastern Simulation Multiconference MESM'2008, August 26-28, 2008. — Philadelphia University, Amman, Jordan. — P. 131–138.
4. Апарцин А. С. К исследованию устойчивости решения полиномиального уравнения Вольєрра I рода / А. С. Апарцин // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 6. — С. 95–102.
5. Fujii K. Measurement of Characteristics of Nonlinear Dynamical Systems Using Volterra Functional Series / K. Fujii, K. Nakao // Technol. Repts. Osaka Univ. — 1969. — Vol. 19, № 853–879. — P. 89–99.



6. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наук. думка, 1986. — 542 с.
7. Павленко В. Д. Методы детерминированной идентификации нелинейных систем в виде моделей Вольтерра / В. Д. Павленко, С. В. Павленко // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014: Труды. [Электронный ресурс]. — М. : Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. — С. 2830–2841.
8. Павленко С. В. Применение вейвлет-фильтрации в процедуре идентификации нелинейных систем на основе моделей Вольтерра // Восточно-европейский журнал передовых технологий. — Харьков, 2010. — № 6/4 (48). — С. 65–70.
9. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Н. К. Смоленцев. — М. : ДМК Пресс, 2005. — 304 с.

The theoretical substantiation identification method of nonlinear dynamic systems based on approximation Volterra model using multisteps test signals, taking into account the measurement error responses. To ensure numerical stability identification method used regularization method and procedures for noise reduction based on wavelet transformation. Investigated the effectiveness of computational algorithms that implement identification method.

**Key words:** *nonlinear dynamic system, approximation model, Volterra series, Volterra kernel, identification, multisteps test signals.*

Отримано: 10.09.2014

УДК 519.711.3:621.311.243

**В. І. Мороз**, д-р техн. наук, професор,

**М. І. Сольський**, магістр

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

### **ВПЛИВ МЕТОДІВ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ПЕРЕДАТНИХ ФУНКЦІЙ НА РЕАЛІЗАЦІЮ ЦИФРОВИХ СИСТЕМ З ОБМЕЖЕНОЮ РОЗРЯДНІСТЮ**

У статті здійснено аналіз впливу методів дискретизації передатних функцій на синтез і практичну реалізацію цифрових систем керування з обмеженою розрядністю.

**Ключові слова:** *передатна функція, цифрова система керування, метод дискретизації.*

**Постановка проблеми.** Ефективність використання цифрових систем керування в електромеханіці полягає в тому, що дані системи забезпечують високу точність, універсальність і можливість реалізації складних алгоритмів керування. Саме цифрові керуючі системи є найбільш перспективним з точки зору експлуатаційних, енергетичних, динамічних характеристик, що необхідні для функціонування