Discusses methods of forming integral dynamic models of nonlinear systems of regulation. Including the structural method of producing a nonlinear integral equation of Voltaire II types and frequency methods of forming patterns in the form of a nonlinear integral equation of Fredholm type with the operator Hammerstein, showing periodic modes of the system of regulation.

Key words: *dynamic systems, control systems, integral equations.*

Отримано: 11.03.2015

УДК 004.94

В. А. Іванюк, канд. техн. наук,
В. В. Понеділок, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПОБУДОВА ЯДЕР ІНТЕГРАЛЬНОГО РЯДУ ВОЛЬТЕРРИ МЕТОДОМ АПРОКСИМАЦІЇ ФІГУРОЮ ОБЕРТАННЯ

Розглянуто підхід до побудови математичних моделей у вигляді інтегрального ряду Вольтерри на основі застосування методу апроксимації функцій багатьох змінних фігурою обертання. Досліджено за допомогою обчислювальних експериментів точність та швидкодію запропонованого способу.

Ключові слова: *апроксимація, функції багатьох змінних, нелінійні динамічні системи, ядра Вольтерри, Matlab / Simulink.*

Вступ. Для розв'язування задач проектування, контролю, аналізу та управління технологічними процесами необхідно виявляти взаємозв'язки між параметрами і представляти їх у вигляді математичних залежностей. Однак при отриманні формалізованого опису багатьох процесів наштовхуються на ряд труднощів, пов'язаних зі специфічними особливостями цих процесів, зокрема, великою кількістю показників і впливів, що визначають зміну цих показників, динамічний характер змін, наявність помилок при реєстрації параметрів, нелінійністю об'єктів тощо. У зв'язку з широким розвитком автоматизованих систем керування і проектування, завдання подання експериментальних даних компактними математичними залежностями стає особливо актуальним, оскільки їх використання призводить до суттєвої економії часу розрахунку та зменшенню вимог до апаратної й програмної складових обчислювальних комплексів.

Одним із ефективних підходів для опису нелінійних динамічних об'єктів є інтегро-степеневі ряди Вольтерри. При такому описі нелінійні і динамічні властивості системи повністю характеризуються послідовністю багатовимірних вагових функцій ядер Вольтерри. Задача побудови моделі у вигляді рядів Вольтерри полягає у визначенні багатовимірних ядер Вольтерри на основі експериментальних даних. Таке подання моделі дає змогу застосовувати такий підхід до широкого класу задач.

Функціональний ряд подається наступним чином:

$$y(t)=\sum_{j=1}^{n} f_j(t),$$
$$f_j=\int_0^t \ldots \int_0^t K_j(s_1,\ldots,s_j)\prod_{i=1}^{j} x(t-s_i)ds_i, t\in[0,T], \qquad (1)$$

де $x(t)$, $y(t)$ — відповідно вхідний і вихідний сигнали об'єкта, n — деяке натуральне число, T — час перехідного процесу. Вагові функції системи (1) можуть бути визначені експериментально, якщо в якості вхідних сигналів обрати детерміновані ступінчасті впливи з амплітудою A [1].

Основна проблема застосування рядів Вольтерри виникає при ідентифікації ядер Вольтерри, яка полягає в необхідності розв'язання типової оберненої задачі — чисельного диференціювання експериментальних залежностей:

$$K_1(t_1)=\frac{1}{A}\frac{df(t_1)}{dt_1},\ K_2(t_1,t_2)=\frac{1}{2A^2}\frac{\partial^2 f_2(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2},\ \ldots,$$
$$K_m(t_1,\ldots,t_m)=\frac{1}{m!A^m}\frac{\partial^m f_m(t_1,\ldots,t_m)}{\partial t_1 \ldots \partial t_m}.$$

Застосування різницевих формул не завжди дає високу точність отриманих результатів, тому для підвищення точності побудови моделей у вигляді ряду (1) та стійкості до завад в експериментальних даних пропонується визначати похідні функцій на основі їх апроксимаційних наближень побудованих в аналітичному вигляді. Саме важливість аналітичного представлення експериментальних залежностей визначають актуальність створення для цього відповідних методів та програмних засобів.

Метою статті є розробка алгоритму побудови ядер інтегральних рядів Вольтерри на основі методу апроксимації фігурою обертання.

Для побудови одновимірного ядра $K_1(t_1)$ на основі алгоритму [3] необхідно знайти похідну функції $f\left(t_1\right)$, яка є результатом експерименту і задається точково

$$f\left(t_k\right)=z_k, k=1,2,\ldots,l. \qquad (2)$$

Ядро будуємо у вигляді $Q\left(t\right)=e^{\sum_{i=0}^{r} a_i t^i}$, що визначається при умові мінімуму суми:

$$L(a_0, a_1, ..., a_r) = \sum_{k=1}^{l}\left[\sum_{i=0}^{r} a_i t^i - \ln\left(z_k\right)\right]^2 .$$

Оскільки $L(a_0, a_1, ..., a_r)$ додатна і є неперервною, то існує її мінімум. Для пошуку значень коефіцієнтів $a_0, a_1, ..., a_r$ при яких L мінімальна необхідно прирівняти частинні похідні L по a_j нулю:

$$\frac{\partial L(a_0, ..., a_r)}{\partial a_j} = 0,\ j = 0,1,...,r . \tag{3}$$

Відповідно система для коефіцієнтів $a_0, a_1, ..., a_r$ при $r = 2$ матиме вигляд

$$\begin{cases} a_0 \sum_{k=1}^{l} t_k{}^4 + a_1 \sum_{k=1}^{l} t_k^3 + a_2 \sum_{k=1}^{l} t_k^2 = \sum_{k=1}^{l} t_k^2 \ln\left(z_k\right); \\ a_0 \sum_{k=1}^{l} t_k{}^3 + a_1 \sum_{k=1}^{l} t_k^2 + a_2 \sum_{k=1}^{l} t_k = \sum_{k=1}^{l} t_k \ln\left(z_k\right); \\ a_0 \sum_{k=1}^{l} t_k{}^2 + a_1 \sum_{k=1}^{l} t_k + a_2 \sum_{k=1}^{l} (1) = \sum_{k=1}^{l} \ln\left(z_k\right). \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язавши систему (4) отримаємо коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_r$.

Продиференціювавши $Q\left(t\right)$ по t отримаємо ядро інтегрального оператора

$$K_1\left(t\right) \approx \frac{dQ\left(t\right)}{dt} . \tag{5}$$

Розглянемо побудову ядра другого порядку $K_2(t_1, t_2)$. У якості апроксимуючої функції оберемо $Q(t_1, t_2) = e^{P_1(t_1) + P_2(t_2)}$ — фігурою обертання, де $P_1(t_1)$ та $P_2(t_2)$ деякі поліноми відносно t_1 і t_2. Визначення ядра буде відбуватись при умові мінімуму суми

$$L = \sum\left[P_1(t_1) + P_2(t_2) - \ln\left(f(t_1, t_2)\right)\right]^2,$$

де $f(t_1, t_2)$ є результатом експерименту і задається точково.

Нехай $P_1(t_1) = a_0 t_1^2 + a_1 t_1 + a_2$ та $P_2(t_2) = a_3 t_2^2 + a_4 t_2 + a_5$. Відповідно

$$L = \sum\left[a_0 t_1^2 + a_1 t_1 + a_2 + a_3 t_2^2 + a_4 t_2 + a_5 - \ln\left(f(t_1, t_2)\right)\right]^2 =$$

$$= \sum\left[b_0 t_1^2 + b_1 t_1 + b_2 t_2^2 + b_3 t_2 + b_4 - \ln\left(f(t_1, t_2)\right)\right]^2.$$

Після диференціювання відповідно по b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 отримаємо систему:

$$\begin{cases} b_0 \sum t_1^4 + b_1 \sum t_1^3 + b_2 \sum t_1^2 t_2^2 + b_3 \sum t_1^2 t_2 + b_4 \sum t_1^2 = \sum t_1^2 \ln(f(t_1, t_2)); \\ b_0 \sum t_1^3 + b_1 \sum t_2^2 + b_2 \sum t_1 t_2^2 + b_3 \sum t_1 t_2 + b_4 \sum t_1 = \sum t_1 \ln(f(t_1, t_2)); \\ b_0 \sum t_1^2 t_2^2 + b_1 \sum t_1 t_2^2 + b_2 \sum t_2^4 + b_3 \sum t_2^3 + b_4 \sum t_2^2 = \sum t_2^2 \ln(f(t_1, t_2)); \\ b_0 \sum t_1^2 t_2 + b_1 \sum t_1 t_2 + b_2 \sum t_2^3 + b_3 \sum t_2^2 + b_4 \sum t_2 = \sum t_2 \ln(f(t_1, t_2)); \\ b_0 \sum t_1^2 + b_1 \sum t_1 + b_2 \sum t_2^2 + b_3 \sum t_2 + b_4 \sum (1) = \sum \ln(f(t_1, t_2)). \end{cases}$$

Розв'язавши її маємо коефіцієнти b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 для $Q(t_1, t_2) = = e^{b_0 t_1^2 + b_1 t_1 + b_3 t_2^2 + b_4 t_2 + b_5}$.

Продиференціювавши $Q(t_1, t_2)$ по t_1, t_2 отримаємо ядро інтегрального оператора

$$K_2(t_1, t_2) \approx \frac{\partial^2 Q(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \qquad (6)$$

У загальному випадку для побудови ядра обираємо функцію $Q(t_1, t_2, \ldots t_h) = e^{P_1(t_1) + P_2(t_2) + \ldots + P_h(t_h)}$, де $P_1(t_1), P_2(t_2), \ldots, P_h(t_h)$ — деякі поліноми відносно $t_1, t_2, \ldots, t_h$ відповідно.

<u>Програмні засоби</u>. На основі розробленого алгоритму створено програмні засоби для побудови ядер інтегральних рядів Вольтерри на основі експериментальних даних із використанням поданого вище алгоритму. Основні функції мають вигляд:

[K1] = ApproxKern1(t, f, n),

де t — аргумент функції представлений у вигляді вектор рядка; f — значення функції $f(x)$ представлена у вигляді вектор-рядка; n — степінь апроксимації; $K1$ — ядро в символьному вигляді;

[K2] = ApproxKern2(t1,t2,f,n),

де t_1, t_2 — аргументи функції представлені у вигляді вектор рядків; f — значення функції $f(t_1, t_2)$ представлені у вигляді матриці; n — степінь апроксимації; $K2$ — ядро в символьному вигляді.

<u>Обчислювальний експеримент</u>. Застосовуючи програмні засоби побудовано одновимірне ядро на основі експериментальних даних. Тестова функція має вигляд: $f(t) = e^t$. Похибка апроксимації функції представлена на рис. 1, похибка отриманого ядра (після диференціювання $f(t)$) представлена на рис. 2.

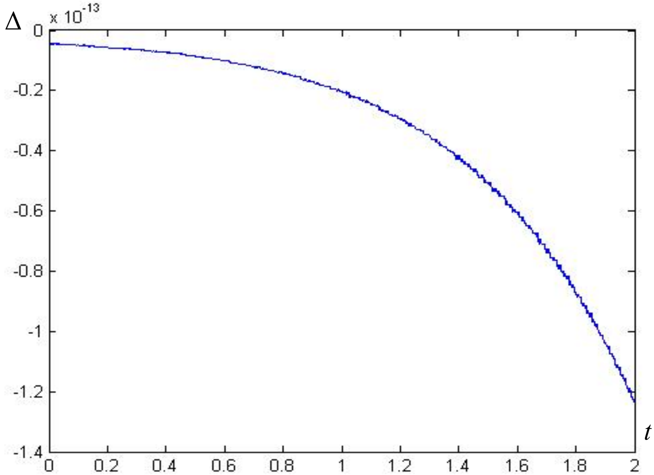

Рис. 1. *Графік похибки апроксимації функції* $f(t)$

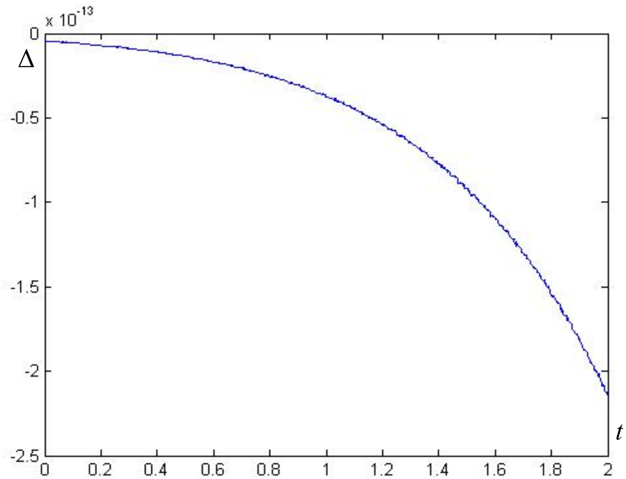

Рис. 2. *Графік похибки апроксимації функції* $\dfrac{df(t)}{dt}$

При побудові двовимірного ядра використовувалась тестова функція: $f(t_1, t_2) = e^{t_1 + t_2}$. Похибка апроксимації функції представлена на рис. 3, похибка отриманого ядра (після диференціювання $f(t_1, t_2)$) представлена на рис. 4.

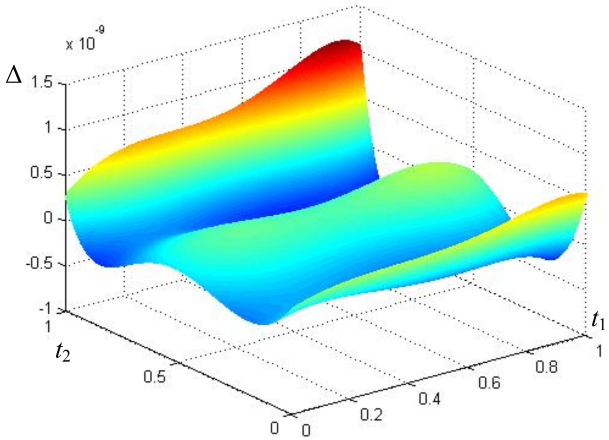

Рис. 3. *Графік похибки апроксимації функції* $f\left(t_1, t_2\right)$

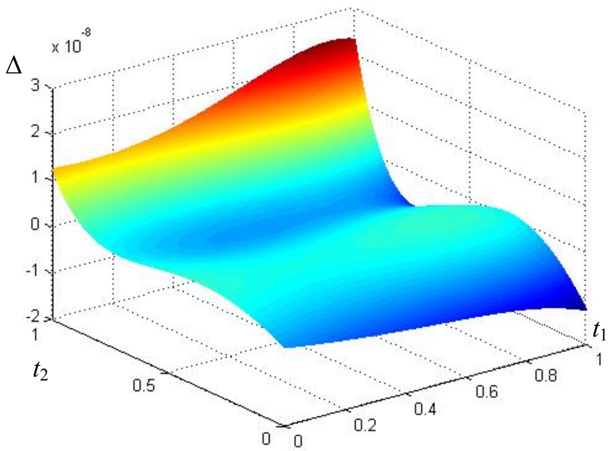

Рис. 4. *Графік похибка апроксимації функції* $\dfrac{\partial^2 f\left(t_1, t_2\right)}{\partial t_1 \partial t_2}$

Висновки. Розглянутий алгоритм дає змогу виконувати апроксимацію складних математичних залежностей багатьох параметрів функціями зручними для їх аналізу та синтезу, а також проводити ідентифікацію нелінійних процесів та систем на основі експериментальних даних.

Список використаних джерел:

1. Бойко И. Ф. Идентификация систем измерений / И. Ф. Бойко, В. В. Турчак // Електроніка та системи упр. — 2009. — № 1. — С. 11–19.

2. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро- дифференциальных уравнений / В. Вольтерра ; под ред. П. И. Кузнецова ; пер. с англ. — М. : Наука, 1982. — 304 с.
3. Іванюк В. А. Комп'ютерна реалізація детермінованого способу ідентифікації інтегральних моделей нелінійних динамічних об’єктів / В. А. Іванюк, В. В. Понеділок, В. А. Грищук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 59–67.
4. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран ; пер. с франц. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
5. Павленко В. Д. Идентификация нелинейных динамических систем в виде ядер Вольтерры на основе данных измерений импульсных откликов / В. Д. Павленко // Электронное моделирование. — 2010. — Т. 32. — № 3. — С. 3–18.

The approach to mathematical modeling as integral Volterra series based on the application of the method of approximation of functions several variables rotation figure. Investigated by means numerical experiments quality of the proposed approach.

Key words: *approximation, the function of many variables, nonlinear dynamical systems Volterra kernel, Matlab / Simulink.*

Отримано: 15.04.2015

УДК 004.421:519.64

Г. О. Кисельова, старший викладач,
В. Б. Кисельов, асистент

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

ІТЕРАЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ВОЛЬТЕРРИ II РОДУ В СЕРЕДОВИЩІ MATLAB

Розглянуто питання чисельного розв’язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри-Урисона та Вольтерри-Гаммерштейна II роду методом простих ітерацій. Запропоновано рекурентні алгоритми реалізації методу простих ітерацій з використанням формул Нютона-Котеса підвищеної точності.

Ключові слова: *нелінійні інтегральні рівняння, квадратурні формули, чисельні методи, ітерації, алгоритм, MatLab.*

Вступ. Застосування нелінійних інтегральних рівнянь є одним з найефективніших методів обчислення задач багатьох областей природничих наук, але розв’язування аналітичними методами можливе лише в деяких окремих випадках. Тому для розв’язування нелінійних інтегральних рівнянь використовують чисельні методи. Одним із

