

УДК 627.324.2/3:532.72

Ю. В. Чуй, аспірант,

П. М. Мартинюк, д-р техн. наук, професор

Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТОНКИХ НАПІВПРОНИКНИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА ПРОЦЕСИ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТІВ В ДВОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

Сформовано математичну модель фільтраційної консолідації ґрунтів із врахуванням наявних тонких напівпроникних включень. Для чисельного розв'язання двовимірної задачі використано метод скінченних елементів. Проведено ряд чисельних експериментів та виявлено вплив теплосолеперенесення на розподіл надлишкових напорів у неоднорідних ґрунтах.

Ключові слова: *фільтраційна консолідація, умови спряження, напівпроникне включення, метод скінченних елементів.*

Вступ. У природі ґрунт є неоднорідним пористим середовищем, в якому твердий скелет може містити тонкі неоднорідності [6, 11, 12]. Напівпроникне включення здатне спрацьовувати як природний фільтр: пропускати воду і лише частково пропускати хімічні елементи, асоційовані в ній. Глинисті ґрунти володіють властивостями напівпроникних мембран [15]. При цьому в природних геологічних неоднорідних формаціях спостерігаються стрибки напорів при переході через тонкі включення з глинистих ґрунтів. Звідси виникає необхідність враховувати напівпроникні властивості таких включень при побудові математичних моделей фільтраційних процесів в такого роду ґрунтових масивах для підвищення їх (математичних моделей) адекватності.

Актуальність дослідження процесів фільтрації, фільтраційної консолідації, теплосолеперенесення в неоднорідних середовищах зумовлюється необхідністю визначення стійкості гідротехнічних, промислових та цивільних споруд [8], в основах яких залягають ґрунти із напівпроникними включеннями. Також велике значення набуває дослідження процесів ущільнення основ поверхневих накопичувачів промислових і побутових стоків. В них глини використовуються як матеріал протифільтраційних екранів.

Дослідженню процесів в неоднорідних пористих середовищах присвячені праці таких авторів, як І. В. Сергієнко, В. В. Скопечкий, В. С. Дейнека, Т. J. S. Keijzer, М. Р. Петрик, Є. І. Воробієв [6, 10-12, 15-16].

У роботі А. Я. Бомби [1] досліджено фільтраційні процеси у неоднорідному анізотропному середовищі (тріщинувато-пористих ґрунтах). У роботі В. М. Булавацького [2] розглянуті неklasичні моделі процесу

фільтраційної консолідації деформівних пористих середовищ в умовах релаксаційної фільтрації порової рідини з урахуванням закону Дарсі.

У працях [13–14] побудовано математичні моделі, перша з яких описує процес напірної фільтрації в середовищі з тонкими каналами, а друга — процес напірної фільтрації у пористому середовищі з включеннями. Контакт між тілом і включенням є ідеальним, наявність додаткових джерел, стоків, неізотермічних, хіміко-біологічних чи міжфазних процесів не передбачається.

У роботі [9] моделювання фільтраційних потоків в області, яка містить непроникну межу, межу заданого тиску і напівпроникне включення зведено до розв'язування інтегральних рівнянь. При цьому під напівпроникним включенням розуміється ціла підобласть, в якій розміщено ґрунт з іншими фільтраційними характеристиками. В [4] побудовано математичні моделі фільтраційної консолідації ґрунтів в умовах теплосолеперенесення при наявності тонких включень, які володіють властивостями напівпроникних мембран.

Однак до цього часу залишилось невирішеним ряд проблем. Зокрема, не враховано вплив процесів теплосолеперенесення на фільтраційну консолідацію у ґрунтах із напівпроникними включеннями для двовимірною випадку. Цим і визначається ціль даної статті.

Постановка проблеми та її математична модель. Нехай задано область Ω , яка складається з однорідного ґрунту та містить тонкі напівпроникні включення. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що таке включення одне (γ^* на рис. 1).

Математична модель двовимірної задачі процесу фільтраційної консолідації ґрунту в області Ω з урахуванням впливу перенесення солей в неізотермічному режимі буде описуватись наступною крайовою задачею [3, 4]:

$$\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} [\operatorname{div}(K\nabla h - v\nabla c - \mu\nabla T)] = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

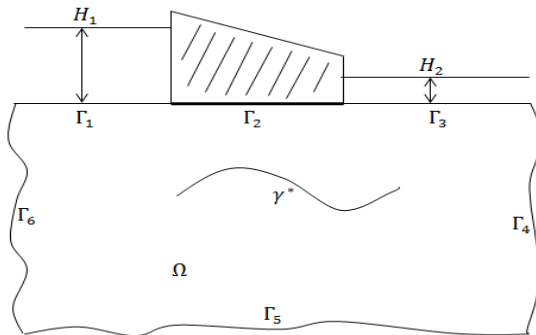


Рис. 1. Досліджувана область ґрунту з напівпроникним включенням

$$\operatorname{div}(D\nabla c + D_T \nabla T) - (u, \nabla c) - \gamma_1 (c - C_m) = n \frac{\partial c}{\partial t}, (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\lambda(c) \nabla T) - \rho c_\rho (u, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (3)$$

$$u = -K(c, T, e) \nabla h + \nu(c) \nabla c + \mu \nabla T, \quad (4)$$

$$(u, n)|_{(x,y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6} = 0, \quad (5)$$

$$h|_{(x,y) \in \Gamma_1} = H_1, \quad h|_{(x,y) \in \Gamma_3} = H_2, \quad (6)$$

$$(D\nabla c + D_T \nabla T - uc, n)|_{(x,y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6} = 0, \quad (7)$$

$$c|_{(x,y) \in \Gamma_1} = c_1, \quad c|_{(x,y) \in \Gamma_3} = c_2, \quad (8)$$

$$(\lambda(c) \nabla T - \rho c_\rho u T, n)|_{(x,y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6} = 0, \quad (9)$$

$$T|_{(x,y) \in \Gamma_1} = T_1, \quad T|_{(x,y) \in \Gamma_3} = T_2, \quad (10)$$

$$(u, n)_{\gamma^*}^\pm = -\frac{k^\gamma}{d} (h^+ - h^-) + \frac{\nu^\gamma}{d} (c^+ - c^-) + \frac{\mu^\gamma}{d} (T^+ - T^-), \quad (11)$$

$$(x, y) \in \gamma^*, t > 0$$

$$(q_c, n)_{\gamma^*}^\pm = (1 - \alpha) \left[(u, n)_{\gamma^*}^\pm - \frac{D^\gamma}{d} (c^+ - c^-) - \frac{D_T^\gamma}{d} (T^+ - T^-) \right], \quad (12)$$

$$(x, y) \in \gamma^*, t > 0,$$

$$(q_T, n)_{\gamma^*}^\pm = \rho c_\rho (u, n)_{\gamma^*}^\pm T^\pm - \frac{\lambda^\gamma}{d} (T^+ - T^-), (x, y) \in \gamma^*, t > 0, \quad (13)$$

$$[(u, n)]|_{\gamma^*} = 0, [(q_c, n)]|_{\gamma^*} = 0, [(q_T, n)]|_{\gamma^*} = 0, t > 0, \quad (14)$$

$$q_c = uc - D\nabla c - D_T \nabla T, \quad q_T = \rho c_\rho u T - \lambda(c) \nabla T, \quad (15)$$

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y), \quad c(x, y, 0) = c_0(x, y), \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (16)$$

де h — напір; c — концентрація; T — температура; $K = K(c, T, e)$ — коефіцієнт фільтрації; ν — коефіцієнт хімічного осмосу; μ — коефіцієнт термічного осмосу; γ — питома вага порової рідини; e — коефіцієнт пористості ґрунту; ξ — коефіцієнт бічного тиску ґрунту; a — коефіцієнт стисливості ґрунту; u — вектор швидкості фільтрації; D — коефіцієнт конвективної дифузії; D_T — коефіцієнт термодифузії; C_m — концентрація граничного насичення; γ_1 — коефіцієнт швидкості масообміну; n — пористість ґрунту;

λ — коефіцієнт ефективної теплопровідності вологого ґрунту; ρ — густина порового розчину; c_ρ — питома теплоємність порового розчину; c_T — об'ємна теплоємність ґрунту; d — товщина напівпроникного включення; k^γ , v^γ , μ^γ , D^γ , D_T^γ , λ^γ — характеристики напівпроникного включення γ^* ; n — певним чином зорієнтований вектор напрямних косинусів нормалі до напівпроникного включення; $h_0(x, y)$, $c_0(x, y)$, $T_0(x, y)$, H_1 , H_2 , c_1 , c_2 , T_1 , T_2 — задані функції; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 = \Gamma$ — межа області Ω .

Чисельний розв'язок крайової задачі методом скінченних елементів (МСЕ). Нехай H_0 — простір вектор-функцій $s(x, y) = (s_1(x, y); s_2(x, y); s_3(x, y))$, кожна із компонент $s_1(x, y)$, $s_2(x, y)$, $s_3(x, y)$ яких належать простору Соболева $W_2^1(\Omega)$ окрім точок межі Γ та включення γ^* , і набуває нульових значень на тих межах області Ω , де, відповідно для функцій $h(x, y, t)$, $c(x, y, t)$, $T(x, y, t)$ задані граничні умови першого роду.

Домножуючи рівності (1)–(3) та кожен з початкових умов (16) на функції $(s_1(x, y); s_2(x, y); s_3(x, y)) \in H_0$ та проінтегрувавши одержані рівності по області Ω , після застосування формули Остроградського-Гауса, врахувавши граничні умови (5)–(10) та умови спряження (11)–(14), отримуємо

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} s_1 dx dy + \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \left(\iint_{\Omega} (K(c, T, e) \nabla h - v(c) \nabla c - \mu \nabla T) \times \nabla s_1 dx dy + \frac{1}{d} \int_{\gamma^*} (k^\gamma [h] - v^\gamma [c] - \mu^\gamma [T]) [s_1] d\Gamma \right) = 0, \quad (17)$$

$$\iint_{\Omega} h(x, y, 0) s_1(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} h_0(x, y) s_1(x, y) dx dy, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & n \iint_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t} s_2 dx dy + \iint_{\Omega} (D \nabla c, \nabla s_2) dx dy + \iint_{\Omega} (D_T \nabla T, \nabla s_2) dx dy + \\ & + \iint_{\Omega} (u, \nabla c) s_2 dx dy + \gamma_1 \iint_{\Omega} c s_2 dx dy + (1-\alpha) \times \int_{\gamma^*} \left(\frac{D^\gamma}{d} [c] + \frac{D_T^\gamma}{d} [T] - \right. \\ & \left. - (u, n)_{\gamma^*}^- c^- \right) [s_2] + (u, n)_{\gamma^*}^- [c s_2] d\Gamma = \gamma_1 C_m \iint_{\Omega} s_2 dx dy, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\iint_{\Omega} c(x, y, 0) s_2(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} c_0(x, y) s_2(x, y) dx dy, \quad (20)$$

$$c_T \iint_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} s_3 dx dy + \iint_{\Omega} (\lambda(c) \nabla T, \nabla s_3) dx dy + \frac{1}{d} \int_{\gamma^*} \left(\frac{\lambda \gamma^*}{d} [T] - \rho c_{\rho} \times \right. \quad (21)$$

$$\left. \times (u, n)_{\gamma^*}^- T^- \right) [s_3] + \rho c_{\rho} (u, n)_{\gamma^*}^- [Ts_3] d\Gamma + \rho c_{\rho} \iint_{\Omega} (u, \nabla T) s_3 dx dy = 0,$$

$$\iint_{\Omega} T(x, y, 0) s_3(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} T_0(x, y) s_3(x, y) dx dy. \quad (22)$$

Наближений узагальнений розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} (\hat{h}(x, y, t); \hat{c}(x, y, t); \hat{T}(x, y, t)) = & \left(\sum_{i=1}^n a_i(t) N_i^{(1)}(x, y); \sum_{j=1}^n b_j(t) N_j^{(2)}(x, y); \right. \\ & \left. \sum_{s=1}^n r_s(t) N_s^{(3)}(x, y) \right), \end{aligned}$$

де $N^i = (N_i^{(1)}; 0; 0)$; $N^j = (0; N_j^{(2)}; 0)$; $N^k = (0; 0; N_k^{(3)})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$ — базисні вектор-функції скінченновимірного підпростору $M_0 \subset H_0$, які розривні на включенні [6, 11, 12].

Для розв'язання задачі методом скінченних елементів покриємо область скінченноелементною (наприклад, трикутною) сіткою із подвійною нумерацією вузлів на включенні.

Підставляючи вигляд наближеного розв'язку в рівності (17)–(22), отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно вектора $U(t) = (A(t); B(t); R(t))$

$$M^{(1)} \frac{dA}{dt} + L^{(1)} A(t) = G^{(1)} B(t) + G'^{(1)} R(t) + F^{(1)}, \quad (23)$$

$$M^{(2)} \frac{dB}{dt} + L^{(2)} B(t) = G^{(2)} R(t) + F^{(2)}, \quad (24)$$

$$M^{(3)} \frac{dR}{dt} + L^{(3)} R(t) = F^{(3)}, \quad (25)$$

$$M^{(1)} A^{(0)} = \tilde{F}^{(1)}, M^{(2)} B^{(0)} = \tilde{F}^{(2)}, M^{(3)} R^{(0)} = \tilde{F}^{(3)}, \quad (26)$$

де

$$m_{ij}^{(1)} = \iint_{\Omega} N_i^{(1)} N_j^{(1)} dx dy, f_i^{(1)} = 0, \tilde{f}_i^{(1)} = \iint_{\Omega} \tilde{h}_0 N_j^{(1)} dx dy,$$

$$\begin{aligned}
 l_{ij}^{(1)} &= \frac{(1+\bar{e})(1+\xi)}{2\gamma\alpha} \iint_{\Omega} (K \nabla N_j^{(1)} \nabla N_i^{(1)}) dx dy + \frac{1}{d} \int_{\gamma^*} k^{\gamma^*} [N_j^{(1)}] [N_i^{(1)}] d\Gamma, \\
 g_{ij}^{(1)} &= \frac{(1+\bar{e})(1+\xi)}{2\gamma\alpha} \iint_{\Omega} (v \nabla N_j^{(2)} \nabla N_i^{(1)}) dx dy + \frac{1}{d} \int_{\gamma^*} v^{\gamma^*} [N_j^{(2)}] [N_i^{(1)}] d\Gamma, \\
 g_{ij}^{(1')} &= \frac{(1+\bar{e})(1+\xi)}{2\gamma\alpha} \iint_{\Omega} (\mu \nabla N_j^{(3)} \nabla N_i^{(1)}) dx dy + \frac{1}{d} \int_{\gamma^*} \mu^{\gamma^*} [N_j^{(3)}] [N_i^{(1)}] d\Gamma, \\
 m_{ij}^{(2)} &= n \iint_{\Omega} N_i^{(2)} N_j^{(2)} dx dy, \quad m_{ij}^{(3)} = c_T \iint_{\Omega} N_i^{(3)} N_j^{(3)} dx dy, \\
 l_{ij}^{(2)} &= \iint_{\Omega} \left((D \nabla N_j^{(2)}, \nabla N_i^{(2)}) + N_i^{(2)} (u, \nabla N_j^{(2)}) + \gamma_1 N_i^{(2)} N_j^{(2)} \right) dx dy + \\
 &+ (1-\alpha) \int_{\gamma^*} \left\{ \left(\frac{D^{\gamma^*}}{d} [N_j^{(2)}] - (u, n)_{\gamma^*}^- N_j^{(2)-} \right) [N_i^{(2)}] + (u, n)_{\gamma^*}^- [N_j^{(2)} N_i^{(2)}] \right\} d\Gamma, \\
 g_{ij}^{(2)} &= - \iint_{\Omega} (D_T \nabla N_j^{(3)} \nabla N_i^{(2)}) dx dy - (1-\alpha) \int_{\gamma^*} \frac{D_T^{\gamma^*}}{d} [N_j^{(3)}] [N_i^{(2)}] d\Gamma, \\
 f_i^{(2)} &= \iint_{\Omega} \gamma_1 N_i^{(2)} C_m dx dy, \quad \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \iint_{\Omega} N_i^{(2)} N_j^{(2)} dx dy, \quad \tilde{f}_i^{(2)} = \iint_{\Omega} c_0 N_i^{(2)} dx dy, \\
 l_{ij}^{(3)} &= \iint_{\Omega} \left((\lambda \nabla N_j^{(3)}, \nabla N_i^{(3)}) + \rho c_{\rho} N_i^{(3)} (u, \nabla N_j^{(3)}) \right) dx dy + \frac{1}{d} \times \\
 &\times \int_{\gamma^*} \left\{ \left(\frac{\lambda^{\gamma^*}}{d} [N_j^{(3)}] - \rho c_{\rho} (u, n)_{\gamma^*}^- N_j^{(3)-} \right) [N_i^{(3)}] + \rho c_{\rho} (u, n)_{\gamma^*}^- [N_j^{(3)} N_i^{(3)}] \right\} d\Gamma, \\
 f_i^{(3)} &= 0, \quad \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \iint_{\Omega} N_i^{(3)} N_j^{(3)} dx dy, \quad \tilde{f}_i^{(3)} = \iint_{\Omega} T_0 N_i^{(3)} dx dy.
 \end{aligned}$$

Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (23)–(25) отримуємо за допомогою схеми Кранка-Ніколсона [7]

$$\begin{aligned}
 M^{(3)} \left(\frac{R^{(j+1)} - R^{(j)}}{\tau} \right) + L^{(3)} (A^{(j+1/2)}, B^{(j+1/2)}, R^{(j+1/2)}) R^{(j+1/2)} &= \\
 &= F^{(3)(j+1/2)}, \\
 M^{(2)} \left(\frac{B^{(j+1)} - B^{(j)}}{\tau} \right) + L^{(2)} (A^{(j+1/2)}, B^{(j+1/2)}, R^{(j+1/2)}) B^{(j+1/2)} &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= G^{(2)}R^{(j+1/2)} + F^{(2)(j+1/2)}, \\
M^{(1)}\left(\frac{A^{(j+1)} - A^{(j)}}{\tau}\right) + L^{(1)}(B^{(j+1/2)}, R^{(j+1/2)})A^{(j+1/2)} &= \\
&= G^{(1)}B^{(j+1/2)} + F^{(1)(j+1/2)},
\end{aligned}$$

де $\tau = \frac{t_0}{m_1}$, $j = 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1$, $A^{(j)}$ — значення елементів при $t = \tau j$,

$j = \overline{0, m_1 - 1}$; $A^{(j+1/2)} = \frac{1}{2}(A^{(j+1)} + A^{(j)})$. Аналогічні позначення стосуються інших векторів та матриць.

Отримана схема є нелінійною відносно шуканих функцій на часових шарах $(j+1)$, $j = \overline{0, m_1 - 1}$. Тому для її розв'язування потрібно застосовувати ітераційні методи. Для уникнення цього можна використати схему предикатом-коректор [11].

Результати чисельних експериментів. Розглянемо прямокутну область ґрунту з координатами вершин $(-20 \text{ м}; 0 \text{ м})$, $(20 \text{ м}; 0 \text{ м})$, $(20 \text{ м}; 10 \text{ м})$, $(-20 \text{ м}; 10 \text{ м})$, із напівпроникним включенням у формі ламаної лінії, яка проходить через точки $(-12 \text{ м}; 5 \text{ м})$, $(2 \text{ м}; 6 \text{ м})$, $(12 \text{ м}, 5 \text{ м})$ з параметрами: $e = 0.7$, $\xi = 0.75$, $a = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$, $\gamma = 10^4 \text{ доба}^{-1}$, $q = 2 \cdot 10^5 \text{ м}$, $\nu_{11} = \nu_{22} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$, $\mu_{11} = \mu_{22} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$, $D_{11} = D_{22} = 0.02 \text{ м}^2/\text{доба}$, $k^{\gamma*} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{доба}$, $\nu^{\gamma*} = 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$, $\mu^{\gamma*} = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$, $d = 0.2 \text{ м}$, $C_m = 350 \text{ г}/\text{літр}$, $D^{\gamma*} = 0.0002 \text{ м}^2/\text{доба}$, $\alpha = 0.1$, $\rho = 1100 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c_\rho = 4.2 \text{ кДж}/\text{кг} \cdot \text{град}$, $c_T = 2137 \text{ кДж}/\text{м}^3 \cdot \text{град}$, $\gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}$, $\lambda = 108 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$, $\lambda^{\gamma*} = 108 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$, $H_1 = 8 \text{ м}$, $H_2 = 2 \text{ м}$, $c_1 = 350 \text{ г}/\text{літр}$, $T_1 = 30^0 \text{ С}$, $c_0 = 5 \text{ г}/\text{літр}$, $T_1 = 20^0 \text{ С}$, $\tau = 10 \text{ діб}$. Експериментальні залежності для коефіцієнта фільтрації та їх апроксимації взято з роботи [5].

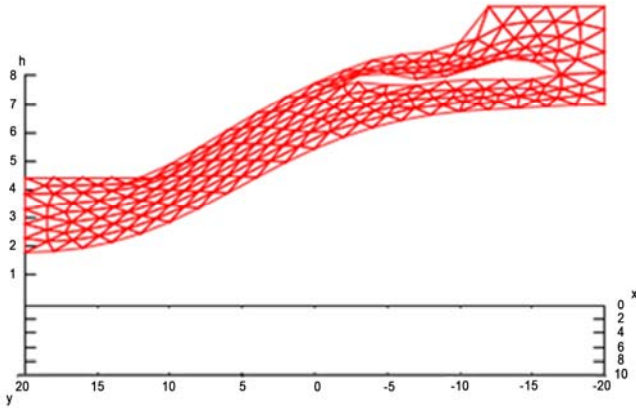


Рис. 2. Розподіл напорів при $t = 3600$ діб з урахуванням теплосолеперенесення (м)

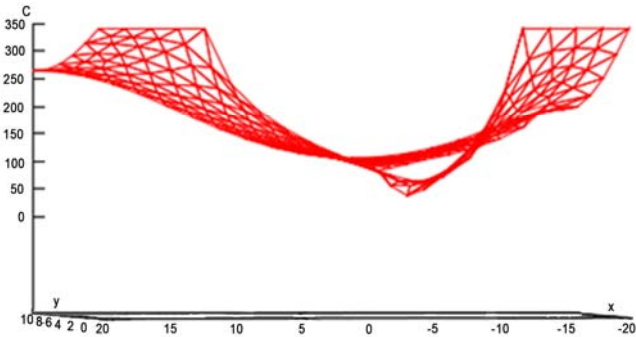


Рис. 3. Розподіл концентрації солей при $t = 3600$ діб з урахуванням теплосолеперенесення (г/літр)

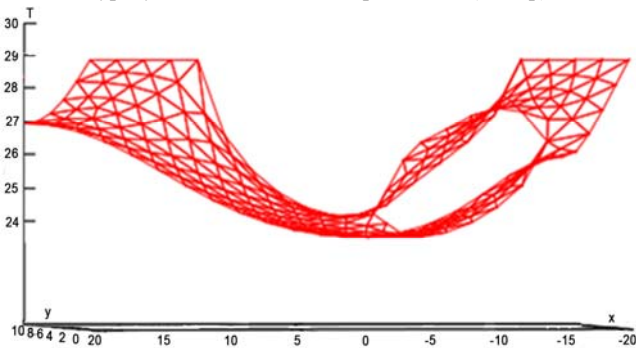


Рис. 4. Розподіл температури при $t = 3600$ діб з урахуванням теплосолеперенесення ($^{\circ}\text{C}$)

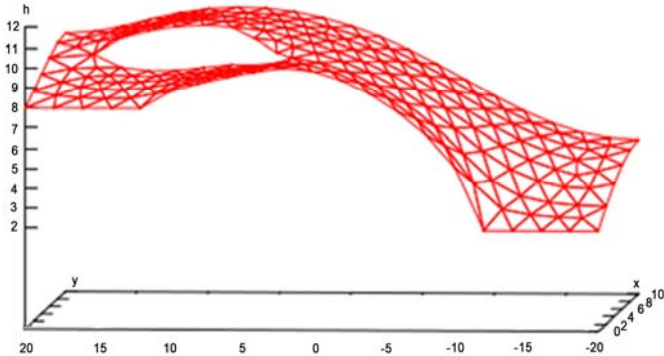


Рис. 5. Розподіл напорів при $t = 3600$ діб без урахування теплосолеперенесення (м)

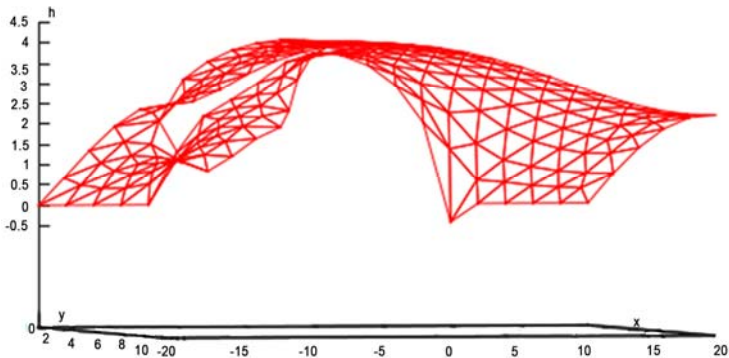


Рис. 6. Різниця розподілів напорів при $t = 3600$ діб без врахування та з урахуванням впливу перенесення солей (м)

З вищенаведених графіків (рис. 2–6) видно, як впливає тепло-солеперенесення на розподіл напорів, зокрема в околі розміщення напівпроникного включення. В даному випадку, якщо враховувати процес теплосолеперенесення, то процес фільтраційної консолідації прискорюється (поле надлишкових напорів розсіюється швидше. На включенні спостерігається стрибок напорів, причому спочатку він від'ємний, а на часовому шарі $t = 3600$ діб він стає додатнім і з часом збільшується, наприклад, для вузла $(-11,5; 5,5)$ стрибок напору на часовому проміжку $t = 3600$ діб дорівнює 0,419 м. При збільшенні параметра α , який відповідає за ступінь ідеальності напівпроникного включення, стрибок напору збільшується. Це можна пояснити тим, що чим більше α , тим менше проходить солей через напівпроникне включення, тобто солі більше накопичуються над верхньою межею включення і зростає вплив осмотичної фільтрації.

Висновки. Отже, нами сформовано математичну модель фільтраційної консолідації для ґрунтів з напівпроникними включеннями в двовимірному випадку. Показано вплив тепломасоперенесення та параметрів напівпроникного включення на розподіл напорів, солей та температури. Проведено ряд чисельних експериментів.

В подальшому планується розгляд даної задачі у тривимірній постановці, проведення теоретичних досліджень якісних характеристик отриманих наближених розв'язків.

Список використаних джерел:

1. Бомба А. Я. Моделювання квазіідеальних полів для тонких просторово викривлених анізотропних пластів / А. Я. Бомба, А. В. Теремус // Доп. НАН України. — 2011. — № 10. — С. 37–43.
2. Булавацкий В. М. Математические модели консолидации водонасыщенных пористых сред и нагруженные дифференциальные уравнения / В. М. Булавацкий // Компьютерная математика. — 2011. — № 2. — С. 13–20.
3. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : Вид-во УДУВГП, 2004. — 211 с.
4. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах : монографія / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : НУВГП, 2008. — 416 с.
5. Власюк А. П. Експериментальні залежності характеристик ґрунтів від впливу техногенних факторів та їх обробка за методом найменших квадратів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, О. В. Козюк // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. — 2007. — Вип. 1(37). — С. 268–281.
6. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
7. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. — М. : Мир, 1986. — 318 с.
8. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов. — М. : Высш. школа, 1985. — 352 с.
9. Никольский Д. Н. Математическое моделирование плоских фильтрационных течений в областях с границами и полупроницаемыми включениями / Д. Н. Никольский // Ученые записи Орловского государственного университета. — 2010. — № 4. — С. 7–11.
10. Петрик М. Р. Математичне моделювання фільтраційної консолідації в неоднорідних багатокомпонентних циліндричних дисперсних мікропористих середовищах / М. Р. Петрик, В. С. Дейнека, Є. І. Воробієв // Комп'ютерна математика. — 2013. — № 1. — С. 37–45.
11. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
12. Сергієнко І. В. Інформаційна технологія дослідження процесів в багатокомпонентних ґрунтових середовищах та оптимальне керування їх ста-

- нами / І. В. Сергієнко, В. С. Дейнека // Наука та інновації. — 2005. — Т. 1, № 3. — С. 34–50.
13. Слупко О. М. Чисельне дослідження процесу напірної фільтрації в середовищі з тонкими каналами / О. М. Слупко, Я. Г. Савула, Л. М. Дяконюк // Математичні машини і системи. — 2011. — № 2. — С. 137–142.
 14. Слупко О. М. Комп'ютерне моделювання процесу напірної фільтрації у пористому середовищі з включеннями / О. М. Слупко, Я. Г. Савула, Т. І. Мандзак, Л. М. Дяконюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. — 2010. — Вип. 4. — С. 180–187.
 15. Keijzer Th. J. S. Chemical osmosis in natural clayey materials / Th. J. S. Keijzer // Geologica Ultraiectina. — 2000. — № 196. — 152 p.
 16. Skopetskii V. V. Mathematical modeling of filtration consolidation of water-saturated randomly inhomogeneous soil masses / V. V. Skopetskii, L. V. Volokh // Cybernetics and System Analysis. — 2008. — Vol. 44, № 1. — P. 68–77.

The mathematical model of the filtration consolidation of soil with taking into account available thin semipermeable inclusions has been formed. For the numerical solution of the problem has been used the finite element method. Number of numerical experiments has been conducted and influence of heat and salt transfer to distribution of excess pressures in the inhomogeneous soils has been detached.

Key words: *filtration consolidation, matching conditions, a semipermeable inclusion, method of finite element.*

Отримано: 26.04.2016

УДК 519.7

О. В. Щирба

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФАЗОВИХ ТРАЕКТОРІЙ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ В УМОВАХ ЗАХИСНИХ МАНЕВРІВ

Розглядаються задачі побудови математичних моделей для обчислення та оптимізації фазових траєкторій ЛА із оптимізованими маневрами.

Ключові слова: *оптимальне керування, моделювання динамічних систем.*

Вступ. Математично-комп'ютерні методи моделювання і оптимізації є ефективним інструментарієм для підвищення надійності та ефективності керованих систем. Математична модель керованого ЛА включає залежність його траєкторії від кутів атаки та ковзання і від