УДК 519.6+004.02

Д. А. Верлань, канд. техн. наук,
Ю. О. Фуртат, канд. техн. наук

ПП «ЕРУ Трейдінг», м. Київ,
Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г.Є. Пухова НАН України, м. Київ

СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРА І РОДУ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ В ЗАДАЧАХ ВІДНОВЛЕННЯ ВХІДНИХ СИГНАЛІВ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Розглянуто два способи розв'язання рівнянь Вольтерра І роду з виродженим ядром: чисельно-аналітичний, що зводить задачу до розв'язання еквівалентного диференційного рівняння, та структурно-алгоритмічний, що дозволяє застосовувати засоби системи Simulink. В обох випадках досягається висока швидкодія алгоритмів розв'язування.

Ключові слова: *інтегральне рівняння Вольтерра, вироджене ядро, регуляризація, швидкодіючі алгоритми.*

Вступ. Інтегральні рівняння Вольтерра І роду використовуються в актуальних технічних задачах відновлення сигналу. Процес розв'язання таких рівнянь пов'язаний з їх некоректністю та складностями у випадку ядра довільного вигляду. Розглянемо два способи розв'язання, що дозволяють подолані вказані труднощі.

Чисельно-аналітичний спосіб. Одним з методів розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра І роду

$$\int_a^x K(x,s)\, y(s)\, ds = f(x), \tag{1}$$

де $K(x,s)$ і $f(x)$ — задані ядро і права частина, — постійна нижня межа інтегрування, є аналітичний перехід до рівнянь другого роду [1], що можливо у деяких окремих випадках. Іншим способом перетворення рівняння (1) є приведення його до диференційного рівняння a .

Розглянемо випадок виродженого ядра

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\, \beta_i(s), \tag{2}$$

до якого можуть бути приведені довільні ядра шляхом апроксимації [2].

Рівняння (1) з виродженим ядром (2) набирає вигляду

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(s)\, y(s)\, ds = f(x) \tag{3}$$

і допускає такі перетворення.

Виділимо з суми (2) доданок $\alpha_q(x)\beta_q(s)$, виходячи з умови $\alpha_q(x)\neq 0;\ \beta_q(s)\neq 0$ ніде в області зміни x,s:

$$\alpha_q(x)\int_a^x \beta_q(s)y(s)ds+\sum_{i=1}^{m}{}'\alpha_i(x)\int_a^x \beta_i(s)y(s)ds=f(x) \tag{4}$$

позначимо

$$V(x)=\frac{1}{\alpha_q(x)}\sum_{i=1}^{m}{}'\alpha_i(x)\int_a^x \beta_i(s)y(s)ds,\ V(a)=0, \tag{5}$$

де $\sum{}'$ означає $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\beta_i(s)-\alpha_q(x)\beta_q(s)$.

Тоді рівняння (4) перепишеться у вигляді виразу

$$\int_a^x \beta_q(s)y(s)ds+V(x)=\frac{1}{\alpha_q(x)}f(x), \tag{6}$$

диференціювання якого дає:

$$y(x)=\frac{\left[f(x)/\alpha_q(x)\right]'-V'(x)}{\beta_q(x)}. \tag{7}$$

Підстановка (7) в (5) приводить до інтегрального рівняння другого роду відносно $V(x)$

$$V(x)\left[1+\frac{1}{\alpha_q(x)\beta_q(x)}\sum_{i=1}^{m}{}'\alpha_i(x)\beta_i(x)\right]-$$

$$-\frac{1}{\alpha_q(x)}\sum_{i=1}^{m}{}'\alpha_i(x)\int_a^x V(s)\left[\beta_i(s)/\beta_q(s)\right]'ds= \tag{8}$$

$$=\alpha_q(x)\sum_{i=1}^{m}{}'\alpha_i(x)\int_a^x\left[\beta_i(s)/\beta_q(s)\right]\cdot\left[f(s)/\alpha_q(s)\right]'ds.$$

Після заміни

$$\int_a^x V(s)\left[\beta_i(s)/\beta_q(s)\right]'ds=W_i(x),\ W(a)=0 \tag{9}$$

або

$$W_i'(x)=V(x)\left[\beta_i(x)/\beta_q(x)\right]' \tag{10}$$

переходимо до шуканого диференціального рівняння відносно $W_i(x)$:

$$\frac{W_i'(x)}{\left[\beta_i(x)/\beta_q(x)\right]'}\left[1+\frac{1}{\alpha_q(x)\beta_q(x)}\sum_{j=1}^{m}{}'\alpha_j(x)\beta_j(x)\right]-$$

$$-\frac{1}{\alpha_q(x)}\sum_{j=1}^{m}{}'\alpha_j(x)W_j(x)= \qquad (11)$$

$$=\frac{1}{\alpha_q(x)}\sum_{j=0}^{m}{}'\alpha_j(x)\int_a^x\left[\beta_i(x)/\beta_q(x)\right]\cdot\left[f(s)/\alpha_q(s)\right]'ds,$$

при $i \neq q$.

Практично для пошуку розв'язку вихідного рівняння (3) досить обчислити тільки функцію $W_i(x)$, так як з формули (10)

$$V(x)=\frac{W_i'(x)}{\left[\beta_i(x)/\beta_q(x)\right]'},$$

і $y(x)$ знаходяться з (7).

Тобто задача зведена до розв'язання звичайного диференційного рівняння I порядку, яке можна розв'язувати штатними комп'ютерними засобами систем математичного моделювання (MATLAB та ін.), що забезпечують необхідну швидкодію.

Перевагою описаного способу є можливість цілеспрямованого вибору доданка $\alpha_q(x)\beta_q(s)$. Такий вибір відповідає одній з форм регуляризації, зазвичай неминучою при вирішенні рівнянь першого роду.

Приклад. Для розв'язання рівняння

$$\int_1^x(2s-x)y(s)ds=x^3-1$$

введемо позначення

$$x\int_1^x y(s)ds=V(x),V(1)=0. \qquad (12)$$

Тоді вихідне рівняння перепишеться у вигляді

$$2\int_1^x y(s)ds-V(x)=x^3-1$$

або після диференціювання в вигляді

$$y(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\frac{V'(x)}{x}, \qquad (13)$$

звідки, використовуючи (13), отримуємо

$$V(x) = x\int_1^x \left(\frac{3}{2}s + \frac{1}{2}\frac{V'(s)}{s}\right)ds.$$

Далі, за допомогою заміни

$$W(x) = \int_1^x \frac{1}{s^2}V(s)\,ds, W(1) = 0 \qquad (14)$$

переходимо до диференціального рівняння

$$W'(x) - \frac{1}{x}W(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\frac{1}{x},$$

розв'язок якого

$$W(x) = \frac{3}{2}x\left[x + \frac{1}{x} - 2\right].$$

З виразу (15) отримуємо

$$V(x) = x^2W'(x) = 3x^2(x-1)$$

і за формулою (14) остаточно маємо

$$y(x) = 3(2x-1).$$

Структурно-алгоритмічний спосіб. Розглянемо задачу розв'язання рівняння (1) з виродженим ядром вигляду (2). Шляхом перетворень введемо в рівняння параметр регуляризації γ наступним чином. Виконаємо еквівалентне перетворення рівняння (3) до вигляду

$$y(x) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\int_a^x \beta_i(s)\,y(s)\,ds = y(x) + f(x). \qquad (15)$$

Апроксимуємо рівняння (15) виразом

$$\tilde{y}(x) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\int_a^x \beta_i(s)\,\tilde{y}(s)\,ds = (1-\gamma)\,\tilde{y}(x) + f(x), \gamma << 1, \qquad (16)$$

($\tilde{y}(x)$ — наближений розв'язок), або виразом

$$\tilde{y}(x) = -\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\int_a^x \beta_i(s)\,\tilde{y}(s)\,ds + (1-\gamma)\,\tilde{y}(x) + f(x). \qquad (17)$$

Наближене рівняння (17) відносно $\tilde{y}(x)$ з параметром регуляризації γ може бути віднесене до рівняння Вольтерра II роду, що дає можливість при його розв'язанні використати засоби системи Simulink.

Структура засобів Simulink для розв'язання рівняння (17), що побудована відповідно до методу, визначеного в роботах [3;4], наведена на рис. 1.

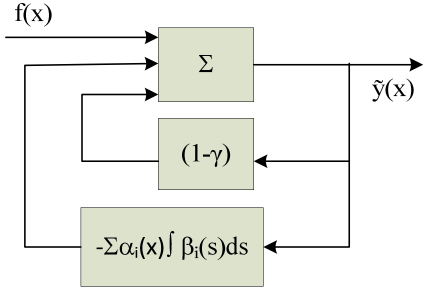

Рис. 1. *Структура розв'язуючої схеми*

Такий спосіб дозволяє отримувати наближений розв'язок рівняння (1) шляхом швидкодіючого алгоритму, що реалізується вказаною структурою.

Висновок. Таким чином, в роботі розглянуті способи отримання швидкодіючих алгоритмів для розв'язання інтегрального рівняння (1) з можливістю комп'ютерної реалізації даної моделі динамічного об'єкта в режимі реального часу.

Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — 543 с.
2. Верлань Д. А. Метод вырожденных ядер при численной реализации интегральных динамических моделей / Д. А. Верлань // Электронное моделирование — К., 2014. — Т. 36, № 3. — С. 41–57.
3. Верлань А. Ф. Способ регуляризации задачи численного дифференцирования / [А. Ф. Верлань, Л. Н. Костьян, В. А. Федорчук, Ю. О. Фуртат] // Праці міжнародної наукової школи-семінару «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLII)» — С. 22.
4. Верлань А. Ф. Методи зменшення впливу завад у вхідному сигналі на процес отримання похідних вищих порядків / А. Ф. Верлань, Ю. О. Фуртат // Матеріали Третьої Міжнародної науково-технічної конференції «Обчислювальний інтелект (ОІ-2015)». — С. 294.

Two methods of solving Volterra equations of the 1st kind with distributed core are considered: numerical-analytical, which reduces the problem to solving an equivalent differential equation, and structural-algorithmic, that allows to utilize the Simulink system means. In both cases, high performance of solution algorithms is achieved.

Key words: *Volterra integral equation, distributed core, regularization, high-speed algorithms.*

Отримано: 11.04.2016