УДК 51-74

В. А. Герус, старший викладач,
Т. В. Кутя, аспірант,
П. М. Мартинюк, д-р. техн. наук

Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

УЗАГАЛЬНЕННЯ РІВНЯНЬ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ НА ВИПАДОК СУФОЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Запропоновано методологію виведення рівнянь фільтрації в гетерогенних пористих середовищах з урахуванням довільної скінченної кількості факторів впливу. Методологія полягає в записі рівнянь нерозривності для фаз пористого середовища через повні похідні в часі. В якості конкретизації факторів впливу вибрано теплосолеперенесення, хімічну та механічну суфозії, що не зменшує її (методології) загальності. Зроблено огляд залежностей параметрів фаз ґрунту (густина, коефіцієнт фільтрації) від впливу теплосолеперенесення та концентрації суфозійних частинок. Сформовано математичну модель і визначено напрямки подальших досліджень.

Ключові слова: *фільтрація, повна похідна, тепломасоперенесення, суфозія.*

Вступ. Ґрунт — це гетерогенне пористе середовище в якому проходять складні взаємозв'язані фізико-хімічні процеси [1, гл. 3–6]. Складність комплексного математичного та комп'ютерного моделювання явищ і процесів в ґрунтах обумовлюється нелінійною взаємозалежністю параметрів досліджуваних процесів. Наприклад, зміна теплового стану порової рідини впливає на коефіцієнт фільтрації пористого середовища [2–4]. Це ж саме стосується і концентрації хімічних речовин [3-5]. У свою чергу, такі залежності впливають на конвективні складові теплосолеперенесення в пористому середовищі. Детальний аналіз залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації суфозійних частинок наведено наприклад в роботі [6, §1.5]. У роботах [7, 8] наведено залежності коефіцієнта фільтрації ґрунтів від ступеня вилуговування гіпсів (хімічна суфозія).

Математичне моделювання взаємозв'язаних процесів в гетерогенних пористих середовищах на даний час інтенсивно розвивається. Такі дослідження проводяться як представниками вітчизняних наукових шкіл прикладної математики, так і зарубіжних. Нижченаведений огляд робіт з даного напрямку не претендує на повноту, а лише ставить за мету окреслити тенденції досліджень.

 © В. А. Герус, Т. В. Кутя, П. М. Мартинюк, 2016

У роботі [9] (див. також наведену там бібліографію) побудовано та досліджено нелінійні математичні моделі фільтрації сольових розчинів в ґрунтових масивах, а також процеси міграції радіонуклідів у ґрунтах з урахуванням впливу тепломасоперенесення. У роботах [10–19] досліджено взаємозв'язані процеси теплосолеперенесення, хімічної суфозії та фільтрації в деформівних пористих середовищах. У роботах [20, 21] досліджено взаємозв'язані процеси фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів під впливом теплових та хімічних факторів. Взаємозв'язані фільтраційно-суфозійні процеси досліджено в роботах [22, 23]. Математичне моделювання впливу теплосолеперенесення на розподіл вологи в ґрунті проведено в роботах [24–26]. У роботах [27, 28] досліджено вплив зміни хімічного та температурного режимів пористих середовищ на їх (середовищ) напружено-деформівний стан. У вищевказаних роботах виведено нові або вдосконалено існуючі рівняння досліджуваних взаємозв'язаних процесів. Це ж саме стосується цілої низки робіт іноземних авторів: 1) взаємозв'язані фільтраційно-суфозійні процеси, в тому числі фільтрування [29–34]; 2) взаємозв'язані процеси вологоперенесення та міграції забруднюючих речовин [35]; 3) взаємозв'язані процеси фільтрації та тепломасоперенесення [36–38], враховуючи ефекти осмосу [39]; 4) взаємозв'язані процеси фільтрації та електроосмосу [40, 41].

Однак, наведені у вищевказаних роботах виведення рівнянь не є універсальними — урахування нового фактору впливу вимагає повторення міркувань. Тому природно поставити за мету усунення вказаного недоліку. Ціль статті — запропонувати такий спосіб виведення рівнянь сумісних процесів в гетерогенних пористих середовищах, що б при виникненні нового фактору впливу методика виведення і принциповий вигляд рівнянь не змінювався. Це зроблено на прикладі процесів фільтрації в умовах впливу теплосолеперенесення, хімічної та механічної суфозії. Хоча, як буде відмічено далі, дана методика годиться для процесів фільтрації з урахуванням довільної скінченної кількості факторів впливу. Елементи цієї методики висвітлено в роботах [42, 43] на прикладі рівняння фільтраційної консолідації.

Крім того, до цього часу взаємозв'язаних процесів фільтрації, хімічної та механічної суфозії досліджено не було. Кожен із цих процесів та його дослідження з метою запобігання непередбачуваних наслідків має беззаперечне значення для практики гідротехнічного будівництва (див. роботи [3, 4, 9] та наведену там бібліографію). Дана робота має стати першою в цілій серії статей, запланованих авторами, що включає: 1) побудова математичних моделей; 2) чисельне дослідження відповідних нелінійних крайових задач (використовуючи, наприклад, метод скінченних елементів [3, 44, 45] або безсітковий метод радіальних базисних

функцій [4, 44, 46, 47]); 3) якісні дослідження відповідних крайових задач (елементи таких досліджень в областях з рухомими межами наведено в [48] (див. також наведену там бібліографію)); 4) дослідження якісних характеристик наближених розв'язків.

Рівняння фільтрації. Розглянемо недеформівне пористе середовище зі змінною пористістю $\sigma(X,t)$. Зміна пористості обумовлюється: 1) зміною концентрації $N(X,t)$ водорозчинних порід в твердій фазі, ступеня їх розчинення або випадання в осад (хімічна суфозія); 2) зміною концентрації $s(X,t)$ рухомих твердих водонерозчинних частинок (механічна суфозія). Тут $X=(x,y,z)$, t — час. Відразу зауважимо, що концентрації $N(\mathrm{X},t)$ та $s(X,t)$ визначаються відносно об'єму всього пористого середовища, а не лише об'ємів твердих частинок або пор. Тоді

$$\sigma(X,t)=\sigma_0(X)-\frac{N(X,t)}{\rho_N}-\frac{s(X,t)}{\rho_s},$$

де $\sigma_0(X)$ — пористість «скелету» пористого середовища (пористість у випадку повної відсутності суфозійних та водорозчинних частинок); $\rho_N=const$ та $\rho_s=const$ — густина водорозчинних порід та матеріалу суфозійних частинок відповідно. Не зменшуючи загальності вважаємо, що в пористому середовищі наявні однокомпонентні за хімічним складом водорозчинні породи. Аналогічно вважаємо, що в ґрунті присутні суфозійні частинки однієї фракції. В роботах [10, 13, 14, 21, 42] розглянуті випадки багатокомпонентних хімічних розчинів та багатофракційної суфозії. Такі узагальнення для процесів, що є предметом цієї статті, можуть бути проведені в подальшому і не викличуть принципових труднощів.

Рівняння фільтрації виводиться на основі рівняння нерозривності рідкої фази ґрунту

$$\frac{d(\rho_p\sigma)}{dt}+\nabla\cdot(\rho_p\mathrm{u})=0, \qquad (1)$$

де ρ_p — густина порової рідини, яка залежить від концентрації $c(X,t)$ порового розчину у рідкій фазі та температури $T(X,t)$ пористого середовища; u — швидкість фільтрації. На відміну від робіт [2-4, 22, 23, 49, 50] в рівнянні (1) використано повна похідна в часі $\frac{d}{dt}$ замість частинної $\frac{\partial}{\partial t}$. Тоді маємо

$$\frac{d(\rho_p\sigma)}{dt}=\sigma\frac{d\rho_p}{dt}+\rho_p\frac{d\sigma}{dt}=\left(\frac{\partial\rho_p}{\partial t}+\frac{\partial\rho_p}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial\rho_p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}\right)\sigma+$$
$$+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial\sigma}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial\sigma}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t}\right)\rho_p= \tag{2}$$
$$=\sigma\left(\frac{\partial\rho_p}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial\rho_p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}\right)-\frac{\rho_p}{\rho_N}\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\rho_p}{\rho_s}\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Зауважимо, що в загальному випадку, при урахуванні додаткових факторів впливу, можна обмежитись рівністю

$$\frac{d(\rho_p\sigma)}{dt}=\sigma\frac{d\rho_p}{dt}+\rho_p\frac{d\sigma}{dt}.$$

Наведена в статті методика в принципі дозволяє врахувати скінченну кількість факторів впливу, при цьому не змінюючи суті процесу виведення основних рівнянь. Такі рівняння можуть бути записані відразу, по аналогії із запропонованими у статті.

Для подальших викладок нам також потрібний узагальнений закон Дарсі на випадок урахування осмотичних явищ

$$u=-K_h\left(c,T,s,\sigma\right)\nabla h+F_{osm}, \tag{3}$$

де $K_h\left(c,T,s,\sigma\right)$ — коефіцієнт (тензор) фільтрації, F_{osm} — вектор-функція осмотичних впливів. Наприклад, в роботах [3, 4, 12, 14]

$$F_{osm}=K_c\nabla c+K_T\nabla T,$$

де K_c — коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу; K_T — коефіцієнт (тензор) термічного осмосу. В роботах [13, 14] осмотичні впливи узагальнені на випадок багатокомпонентного хімічного розчину.

Тоді з (1), з урахуванням (2) та закону (3) маємо

$$\nabla\cdot\left(\rho_p(c,T)K_h\left(c,T,s,\sigma\right)\nabla h\right)=\sigma\left(\frac{\partial\rho_p}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial\rho_p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}\right)-$$
$$-\frac{\rho_p}{\rho_N}\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\rho_p}{\rho_s}\frac{\partial s}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_p(c,T)F_{osm}). \tag{4}$$

Рівняння (4) відносно функції напорів $h(X,t)$ є квазістаціонарним. Для його використання мають бути відомими поля $c(X,t)$, $T(X,t)$, $N(X,t)$, $s(X,t)$ та залежності ρ_p і K_h від фізико-хімічного стану порової рідини та фізико-механічних властивостей пористого середовища.

Рівняння масоперенесення в рідкій фазі отримаємо із рівняння нерозривності з урахуванням повної похідної в часі

$$\frac{d(\sigma c)}{dt} + \nabla \cdot q_c + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

де [2, 49, 50]

$$q_c = -D_c \nabla c + cu, \tag{6}$$

D_c — коефіцієнт (тензор) коефіцієнтів конвективної дифузії.

Тоді із (5) та (6) отримуємо

$$\sigma \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D_c \nabla c\right) - u\nabla c - c\left(\frac{d\sigma}{dt} + \nabla \cdot u\right) - \frac{\partial N}{\partial t}. \tag{7}$$

З (1) маємо

$$\sigma \frac{d\rho_p}{dt} + \rho_p \frac{d\sigma}{dt} + \rho_p \nabla \cdot u + u\nabla\rho_p = 0,$$

$$\rho_p \left(\frac{d\sigma}{dt} + \nabla \cdot u\right) = -\sigma \frac{d\rho_p}{dt} - u\nabla\rho_p. \tag{8}$$

Тоді з (7), враховуючи (8), отримуємо

$$\sigma \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D_c \nabla c\right) - u\nabla c + \frac{c}{\rho_p}\left(\sigma \frac{d\rho_p}{dt} + u\nabla\rho_p\right) - \frac{\partial N}{\partial t}. \tag{9}$$

У випадку урахування впливу на зміну густини порової рідини лише хімічного та теплового факторів рівняння (9) можна дещо перетворити. Зокрема,

$$\frac{d\rho_p}{dt} = \frac{\partial \rho_p}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t},$$

$$\nabla\rho_p = \frac{\partial \rho_p}{\partial c}\nabla c + \frac{\partial \rho_p}{\partial T}\nabla T.$$

Тоді (9) модифікується до вигляду

$$\sigma\left(1 - \frac{c}{\rho_p}\frac{\partial \rho_p}{\partial c}\right)\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D_c \nabla c\right) - u\left(1 - \frac{c}{\rho_p}\frac{\partial \rho_p}{\partial c}\right)\nabla c + \\ + \frac{c}{\rho_p}\left(\sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial \rho_p}{\partial T}\nabla T\right) - \frac{\partial N}{\partial t}. \tag{10}$$

При дослідженні масоперенесення багатокомпонентних хімічних розчинів в рівняннях типу (10) (а це буде система рівнянь із взаємозалежними нелінійними коефіцієнтами та пов'язана гомогенними або(і) гетерогенними хімічними реакціями) мають бути враховані джерела утворення хімічних компонент за рахунок хімічних реакцій.

Рівняння механічної суфозії. Зважаючи, що густина твердих нерозчинних суфозійних частинок $\rho_s = const$, маємо наступне рівняння нерозривності

$$\frac{ds}{dt} + \nabla \cdot q_s = 0\,, \tag{11}$$

де вектор-функція q_s визначає потік суфозійних частинок. Якщо по аналогії з роботами [4, 20, 21–23, 32] прийняти

$$q_s = -D_s \nabla s + s\alpha_{er} u\,, \tag{12}$$

де $\alpha_{er} = \begin{pmatrix} \alpha_{er}^{1+} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{er}^{2+} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{er}^{3+} \end{pmatrix}$ — тензор коефіцієнтів розмиву, тоді отримаємо наступне рівняння для переносу суфозійних частинок

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D_s \nabla s \right) - \alpha_{er} u \nabla s\,. \tag{13}$$

Тут D_s — коефіцієнт (тензор) дисперсії суфозійних частинок, $\alpha_{er}^{i+} = \begin{cases} \alpha_{er}^{i}, & |u_i| \ge u_{kr}; \\ 0, & |u_i| < u_{kr}; \end{cases}$ $0 \le \alpha_{er}^{i} \le 1$ ($i = \overline{1,3}$), $u_{kr} \ge 0$ — критична швидкість фільтрації, яка тут покладається однаковою в усіх напрямках.

Рівняння теплоперенесення. Рівняння нерозривності для процесу теплоперенесення наступне:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\rho_p c_p \sigma + \rho_s c_s s + \rho_N c_N N + \rho_m c_m \left(1 - \sigma_0\right) \right) T \right] + \nabla \cdot q_T = 0, \tag{14}$$

де

$$q_T = -\lambda \nabla T + \rho_p c_p u T, \tag{15}$$

λ — коефіцієнт (тензор) коефіцієнтів теплопровідності пористого середовища; c_p, c_s, c_N, c_m — питомі теплоємності відповідних матеріалів (порової рідини, суфозійних частинок, твердих водорозчинних частинок, матеріалу скелету пористого середовища).

Тоді, ввівши позначення

$$c_T = \rho_p c_p \sigma + \rho_s c_s s + \rho_N c_N N + \rho_m c_m \left(1 - \sigma_0\right),$$

отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(c_T T\right) = c_T \frac{\partial T}{\partial t} + \left(c_s \rho_s \frac{\partial s}{\partial t} + c_N \rho_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T + c_p \left(\rho_p \frac{d\sigma}{dt} + \sigma \frac{d\rho_p}{dt} \right) T. \tag{16}$$

У результаті з (14), (15) та (16) маємо

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} + \left(c_s \rho_s \frac{\partial s}{\partial t} + c_N \rho_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T + c_p \left(\rho_p \frac{d\sigma}{dt} + \sigma \frac{d\rho_p}{dt} \right) T =$$

$$= \nabla \cdot \left(\lambda \nabla T \right) - \nabla \cdot \left(\rho_p u \right) c_p T - \rho_p c_p u \nabla T,$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T + \sigma c_p \frac{d\rho_p}{dt} T =$$

$$= \nabla \cdot \left(\lambda \nabla T \right) - u c_p T \nabla \rho_p - T \rho_p c_p \left(\frac{d\sigma}{dt} + \nabla \cdot u \right) - \rho_p c_p u \nabla T.$$

Враховуючи (8), остаточно отримаємо

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\lambda \nabla T \right) - \rho_p c_p u \nabla T +$$

$$+ T \left(-\rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} - \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} - \sigma c_p \frac{d\rho_p}{dt} - u c_p \nabla \rho_p + c_p \left(\sigma \frac{d\rho_p}{dt} + u \nabla \rho_p \right) \right),$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\lambda \nabla T \right) - \rho_p c_p u \nabla T - \left(\rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T.$$

Математична модель процесу фільтрації з урахуванням явищ суфозії. Припустимо, що процес досліджується в області Ω з межею Γ. Тоді згідно вищенаведених викладок маємо наступну математичну модель:

$$\nabla \cdot \left(\rho_p(c,T) K_h \left(c,T,\sigma,s \right) \nabla h \right) = \sigma \left(\frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) -$$

$$- \frac{\rho_p}{\rho_N} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p(c,T) F_{osm}), \quad X \in \Omega, t > 0,$$

$$\sigma \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D_c \nabla c \right) - u \left(1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c +$$

$$+ \frac{c}{\rho_p} \left(\sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t}, \quad X \in \Omega, t > 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot \left(D_s \nabla s \right) - \alpha_{er} u \nabla s, \quad X \in \Omega, t > 0,$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\lambda \nabla T \right) - \rho_p c_p u \nabla T - \left(\rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T, \; X \in \Omega, t > 0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^{\chi}, \; X \in \overline{\Omega}, \; t > 0,$$

$$u = -K_h \left(c,T,s,\sigma \right) \nabla h + F_{osm},$$

$$l_1 h(X,t)\big|_{\Gamma_{t_0}} = H_1(X,t), \; l_2 c(X,t)\big|_{\Gamma_{t_0}} = C_1(X,t), \; l_3 T(X,t)\big|_{\Gamma_{t_0}} = T_1(X,t),$$

$$l_4 s(X,t)\big|_{\Gamma_{t_0}} = S_1(X,t), \; (X,t) \in \Gamma_{t_0},$$

$$c(X,0)=C_0(X),\ T(X,0)=T_0(X),\ N(X,0)=N_0(X),$$
$$s(X,0)=S_0(X),\ X\in\overline{\Omega},$$

де l_1, l_2, l_3, l_4 — оператори, що задають граничні умови для напору, концентрації солей, температури та концентрації суфозійних частинок на бічній поверхні Γ_{t_0} циліндра $Q_{t_0}=\Omega\times(0;t_0]$; χ — показник степеня, значення якого залежить від характеру засоленості породи [10, 13, 14] (див. також наведену там бібліографію). Для практичного використання вищенаведеної математичної моделі мають бути відомими залежності $\rho_p(c,T)$, $K_h(c,T,s,\sigma)$, а також числові значення всіх коефіцієнтів.

Залежність густини порової рідини від концентрації хімічних речовин та температури. В роботі [51] наведено формулу залежності густини водного розчину NaCl від його концентрації c (%) та від температури T ($^\circ C$)

$$\rho_p(c,T)=\sum_{i=1}^{3}A_iT^{i-1}\sum_{j=1}^{3}a_jc^{j-1}. \qquad (17)$$

Значення коефіцієнтів A_i, $i=\overline{1,3}$, a_j, $j=\overline{1,3}$, наведено в табл. 1.

У [52, с. 395] запропоновано густину ρ_p багатокомпонентного хімічного розчину розраховувати згідно модифікованого методу Езрохі за формулою

$$\lg\rho_p=\lg\rho_0+\sum_{i=1}^{n}A_ic_i,$$

де ρ_0 — густина води; A_i — коефіцієнти; c_i — концентрація хімічних компонент (%). Густина води розраховується за формулою

$$\rho_0=999.972/(1-0.189173965\cdot10^{-5}\psi+0.080064627\psi^2-$$
$$-0.0866561397\psi^3+0.141326458\psi^4-0.227708811\psi^5+$$
$$+0.305765045\psi^6-0.292859639\psi^7+0.17991657\psi^8-$$
$$-0.0625693644\psi^9+0.00930376776\psi^{10},$$

або

$$\rho_0=1000-0.062T-0.00355T^2,$$

де $\psi=(T-3.98)/100$, $T\in[0;100\ ^\circ C]$. Коефіцієнти A_i визначаються згідно залежностей

$$A_i=a_{0i}+a_{1i}T+a_{2i}T^2,$$

а коефіцієнти a_{0i}, a_{1i}, a_{2i} для ряду неорганічних речовин наведено в таблицях 3.7 та 3.8 вказаного довідника [52].

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів у формулі (17)

	a_1	a_2	a_3
A_1	750.2834	26.7822	–0.26389
A_2	1.90165	–0.11734	0.00175
A_3	–0.003604	0.0001701	–0.00000261

Загалом потрібно відмітити, що багато експериментальних залежностей вказаного типу для різних рідин і хімічних компонент наведено в статтях журналів «Journal of Chemical and Engineering Data» та «Journal of Chemical Physics» (наприклад [53–55]).

Залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації суфозійних частинок. У роботі [6, с. 45] модифіковано формулу Козені-Кармана на випадок суфозійних процесів (тут збережено авторські позначення)

$$k = k_0 \frac{\left(n_0 + m_0\right)^3 \left(n_0 + m_s\right)}{n_0^3} \left(1 + \left(\tilde{m}_0 \overline{D}\right)^2 \frac{n_0 + m_0}{n_0 + m_s}\right),$$

де k_0 — початковий коефіцієнт фільтрації недеформованого масиву ґрунту, $\overline{D} = \dfrac{D}{d}$, $\tilde{m}_0 = \dfrac{m_0}{m_s}$, m_s — об'ємна концентрація частинок скелету пористого середовища, m_0 — об'ємна концентрація суфозійних частинок, n_0 — пористість однорідного недеформованого ґрунту, D — еквівалентний діаметр частинок скелету, d — еквівалентний діаметр суфозійних частинок. Аналогічну формулу запропоновано для двофракційної суфозії.

Емпіричні формули залежності коефіцієнта фільтрації від ефективних розмірів частинок ґрунту наведено в роботах [56, 57].

Залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей та температури. Аналіз великої кількості експериментальних даних із впливу хімічного складу порової рідини та її температури на фільтраційні властивості пористого середовища наведено в [3, §1.2]. Деякі дані з натурних експериментів можна знайти, наприклад в [58–60]. Тут лише відмітимо наступні узагальнюючі висновки:

1. При зростанні температури (в межах від $0^\circ C$ до $90^\circ C$) коефіцієнт фільтрації чистої води є функція монотонно зростаюча. Ступінь зростання залежить від типу пористого середовища. Для піс-

ків таке зростання складає від 1.5 до 2.5 разів, а для деяких глин — кілька порядків.

2. Залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації солей є немонотонною і має точку максимуму при $c = C_M > 0$. Числове значення C_M залежить від типу ґрунту та від типу хімічного розчину [5].

Залежність коефіцієнта фільтрації від пористості. Коефіцієнт фільтрації значно залежить і від коефіцієнта пористості e ґрунтового середовища [61]. Наприклад, в роботі [62] запропонована наступна залежність:

$$k(e) = A \cdot e^{\beta e},$$

де $A = 5.87 \cdot 10^{-7}$ м/доба, $\beta = 12$, $e = \dfrac{\sigma}{1-\sigma}$.

В роботі [63] вказано на можливість використання формули Козені-Кармана

$$k = k_0 \frac{1+e_0}{1+e}\left(\frac{e}{e_0}\right)^3,$$

де k_0, e_0 — початкові значення коефіцієнта фільтрації та коефіцієнта пористості.

Проблема загальної залежності коефіцієнта фільтрації від фізико-механічних та хімічних факторів. Як правило всі експериментальні залежності коефіцієнта фільтрації є однопараметричними. Проведення комплексних натурних досліджень є надто дорогим з точки зору економічних затрат і потребує багато часу. Тут, на нашу думку, є два виходи.

Згідно першого, пропонується записати загальну залежність через однопараметричні у вигляді мультиплікативної згортки

$$k\left(s_1, s_2, ..., s_n\right) = \frac{k\left(s_1\right)}{k_0} \cdot \frac{k\left(s_2\right)}{k_0} \cdot \ldots \cdot \frac{k\left(s_{n-1}\right)}{k_0} \cdot k\left(s_n\right),$$

де k_0 — коефіцієнт фільтрації для початкових значень факторів впливу (наприклад, для випадку теплосолеперенесення це може бути коефіцієнт фільтрації чистої води при температурі $20^\circ C$ тощо). Множники «$\dfrac{k\left(s_i\right)}{k_0}$» ($i = \overline{1, n-1}$) виступають в якості вагових коефіцієнтів. Залежності $k\left(s_i\right)$, ($i = \overline{1, n}$) апроксимуються з відомих експериментальних однопараметричних даних і лише для зручності для їх позначення використана однакова літера «k». Такий спосіб застосовувався в роботах [3, 9].

Згідно другого способу вагові коефіцієнти (впливи) використовуються в самих експериментальних даних і залежність $k = k\left(s_1, s_2, ..., s_n\right)$ апроксимується в n-вимірному просторі наприклад, методом радіальних базисних функцій (РБФ) [44, 64, 65]. Цей спосіб використовувався в [4]. Метод РБФ, окрім апроксимації функцій, також забезпечує і апроксимацію похідних від цих функцій із належною точністю. А це є важливим для вищенаведеної математичної моделі.

Питання точності та надійності таких двох підходів для апроксимації коефіцієнта фільтрації через однопараметричні експериментальні дані становлять суть окремих напрямків досліджень.

Висновки та напрямки подальших досліджень. В статті запропоновано методологію виведення рівнянь для математичного описання взаємозв'язаних процесів в гетерогенних пористих середовищах. Для прикладу розглянуто взаємозв'язані процеси фільтрації, теплосолеперенесення, хімічної та механічної суфозії. Сформовано відповідну математичну модель. Рівняння фільтрації відносно функції напорів є нелінійним і квазістаціонарним, в якому присутні похідні по часу від функцій техногенних впливів. Коефіцієнт фільтрації залежить від фізико-хімічних та фізико-механічних характеристик пористого середовища, в тому числі, опосередковано (через коефіцієнт пористості) і від самих напорів. Як було відмічено у вступі, дана стаття має стати першою в цілій низці робіт авторів в даному напрямку. Зокрема, далі передбачається чисельне розв'язання відповідних нелінійних крайових задач, якими описуються побудовані математичні моделі, їх (крайових задач) якісні дослідження та вивчення якісних характеристик отриманих наближених розв'язків.

Список використаних джерел:

1. Грунтоведение / под ред. В. Т. Трофимова. — М. : Изд-во МГУ, 2005. — 1024 с.
2. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло– и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. — К. : Наук. думка, 1991. — 264 с.
3. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : НУВГП, 2008. — 416 с.
4. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепломасопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : НУВГП, 2010. — 277 с.
5. Фиалко А. И. Исследование влияния степени минерализации водных растворов на фильтрационные свойства горных пород / А. И. Фиалко, Ф. А. Руденко // Материалы по геологии, гидрогеологии и геохимии Украины, РСФСР и Молдавии. — 1978. — Вып. 14. — С. 63–68.

6. Поляков В. Л. Фильтрационные деформации в дренируемых грунтах: теория и приложения / В. Л. Поляков. — К. : Аграр Медиа Групп, 2014. — 382 с.
7. Петрухин В. П. Строительные свойства засоленных и загипсованных грунтов / В. П. Петрухин. — М.: Стройиздат, 1980. — 119 с.
8. Орандовская А. Е. Изменение фильтрационных свойств засоленных пород при длительной фильтрации / А. Е. Орандовская // В кн.: Растворение и выщелачивание горных пород. — М. : Госстройиздат, 1957. — С. 175–185.
9. Власюк А. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод у ґрунтових масивах / А. П. Власюк, О. П. Остапчук. — Рівне : НУВГП, 2015. — 214 с.
10. Власюк А. П. Числове розв'язання одновимірної задачі фільтраційної консолідації засолених ґрунтів в неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, О. Р. Фурсович // Матем. методи та фіз.-мех. поля. — 2008. — Вип. 51, № 1. — С. 197–204.
11. Vlasyuk A. P. Numerical solution of three-dimensional problems of filtration consolidation with regard for the influence of technogenic factors by the method of radial basis functions / A. P. Vlasyuk, P. M. Martynyuk // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 171, № 5. — P. 632–648.
12. Власюк А. П. Фильтрационная консолидация трёхфазных грунтов с учётом ползучести скелета и влияния солепереноса в неизотермическом режиме / А. П. Власюк, П. М. Мартынюк // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, № 4. — С. 32–56.
13. Мічута О. Р. Математичне моделювання взаємовпливів фільтраційних, теплових та багатокомпонентних хімічних полів в деформівному масиві грунту. І. Математична модель та чисельне розв'язання / О. Р. Мічута, П. М. Мартинюк // Вісник НУВГП. Сер. технічні науки. — 2012. — Вип. 2 (58). — С. 189–197.
14. Мичута О. Р. Моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неизотермических условиях / О. Р. Мичута, А. П. Власюк, П. Н. Мартынюк // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 25, № 2. — С. 3–18.
15. Булавацкий В. М. Математическое моделирование динамики процесса фильтрационно-конвективной диффузии в условиях временной нелокальности / В. М. Булавацкий // Пробл. упр. и информатики. — 2012. — № 2. — С. 22–30.
16. Булавацкий В. М. Численное моделирование динамики некоторых аномальных процессов переноса / В. М. Булавацкий // Доповіді Національної академії наук України. — 2012. — № 12. — С. 31–40.
17. Булавацкий В. М. Математическое моделирование локально-неравновесного геоимиграционного процесса в условиях массообмена / В. М. Булавацкий, А. В. Гладкий // Компьютерная математика. — 2012. — № 2. — С. 3–9.
18. Булавацкий В. М. Математическое моделирование динамики аномальных миграционных полей в рамках модели распределенного порядка / В. М. Булавацкий, Ю. Г. Кривонос // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — Т. 49, № 3. — С. 74–81.
19. Благовещенская Т. Ю. Задача моделирования дробно-дифференциальной консолидационной динамики двухслойной геопористой среды / Т. Ю. Бла-

говещенская, В. М. Булавацкий // Компьютерная математика. — 2014. — № 1. — С. 3–8.
20. Власюк А. П. Контактный размыв и фильтрационная консолидация грунтов в условиях теплосолепереноса / А. П. Власюк, П. Н. Мартынюк // Математическое моделирование. — 2012. — Т. 24, № 11. — С. 97–112.
21. Мартинюк П. М. Математична модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням багатофракційної суфозії / П. М. Мартинюк, О. В. Гошко // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. — 2013. — Вип. 4. — С. 136–141.
22. Комплексне моделювання нелінійних фільтраційно-суфозійних процесів у ґрунтових греблях / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк, А. Теребус, М. М. Хлапук // Вісник Нац. ун-ту водного госп-ва та природокорист. Серія тех. науки. — 2011. — Вип. 3 (55). — С. 70–77.
23. Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв'язків сингулярно збурених задач процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // Вісник Харківського національного університету. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. — 2012. — Вип. 1037. — С. 18–27.
24. Громадченко Т. В. Математичне моделювання впливу техногенних факторів на розподіл вологи в ґрунті / Т. В. Громадченко, П. М. Мартинюк // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки. — 2013. — Вип. 1. — С. 136–141.
25. Кутя Т. В. Математичне моделювання зволоження ґрунту на схилі внаслідок аварії безнапірного трубопроводу з урахуванням процесів теплосолеперенесення / Т. В. Кутя, П. М. Мартинюк // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2014. — Вип. 19. — С. 107–115.
26. Власюк А. П. Чисельне моделювання масоперенесення сольових розчинів у ненасичених шаруватих ґрунтах / А. П. Власюк, Т. П. Цвєткова // Математичне та комп. моделювання. Серія: Техн. науки. — 2014. — Вип. 10. — С. 44–52.
27. Кузло М. Т. Моделювання деформацій багатошарового ґрунтового масиву, що насичений сольовими розчинами з урахуванням фільтраційної консолідації / М. Т. Кузло // Будівельні конструкції. — 2013. — Вип. 79. — С. 80–88.
28. Власюк А. П. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния основания грунтовой плотины со свободной поверхностью под влиянием тепло- и массопереноса в двумерном случае / А. П. Власюк, Н. А. Жуковская // Инженерно-физический журнал. — 2015. — Т. 88, № 2. — С. 324–335.
29. Hu R. Modeling of coupled deformation, water flow and gas transport in soil slopes subjected to rain infiltration / R. Hu, Y. Chen, C.-B. Zhou // Science China. Technological Sciences. — 2011. — Vol. 54 (10). — P. 2561–2575.
30. Evaluation of low-pressure compressibility and permeability of bentonite sediment from centrifugal consolidation data / M. Loginov, M. Citeau, N. Lebovka, E. Vorobiev // Separation and Purification Technology. — 2012. — Vol. 92. — P. 168–173.
31. Evolution of an interfacial crack on the concrete-embankment boundary / L. Glascoe, T. Antoun, Y. Kanarska, I. Lomove, R. Hall, S. Woodson,

J. Smith. — Lawrence Livermore National Laboratory, Technical Report-645956, 2013. — 121 p.
32. Liang Y. Two-flow model for piping erosion based on liquid-solid coupling / Y. Liang, J.-J. Wang, M.-W. Liu // J. Cent. South Univ. — 2013. — Vol. 20. — P. 2299–2306.
33. Erosion in Geomechanics: Applied to Dams and Levees / edited by S. Bonelli. — Jonh Wiley&Sons, 2013. — 410 p.
34. Progress in filtration and separation / edited by Steve Tarleton. — Elsevier, 2015. — 684 p.
35. Компьютерное моделирование миграции загрязняющих веществ в природных дисперсных средах / С. П. Кундас, И. А. Гишкелюк, В. И. Коваленко, О. С. Хилько. — Минск : МГЭУ им. А. Д. Сахарова, 2011. — 212 с.
36. Lanru J. Numerical modeling for coupled thermo-hydro-mechanical and chemical processes (THMC) of geological media-international and Chinese experiences / J. Lanru, F. Xiating // Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering. — 2003. — Vol. 22 (10). — P. 1704–1715.
37. Modeling coupled water flow, solute transport and geochemical reactions affecting heavy metal migration in a podzol soil / D. Jacques, J. Simunek, D. Mallants, M. Th. van Genuchten // Geoderma. — 2008. — Vol. 145 (3–4). — P. 449–461.
38. Bolduc F. L. Numerical investigation of the influence of waste rock inclusions on tailings consolidation / F. L. Bolduc, M. Aubertin // Can. Geotech. J. — 2014. — Vol. 51. — P. 1021–1032.
39. Garavito A. M. Chemical osmosis in clayey sediments / A. M. Garavito. — Vrije Universiteit, 2005. — 140 p.
40. Hu L. Numerical model of electro-osmotic consolidation in clay / L. Hu, W. Wu, H. Wu // Geotechnique. — 2012. — Vol. 62, №6. — P. 537–541.
41. Electric-hydraulic-chemical coupled modeling of solute transport through coupled landfill clay liners / Z. Li, Q. Xue, T. Katsumi, T. Inui // Applied Clay Science. — 2014. — Vol. 101. — P. 541–552.
42. Герус В. А. Узагальнення рівняння консолідації ґрунтів з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів / В. А. Герус, П. М. Мартинюк // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. — 2015. — Вип. 27. — С. 41–52.
43. Герус В. Загальна кінематична гранична умова в теорії фільтраційної консолідації ґрунтів / В. Герус, П. Мартинюк, О. Мічута // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології — 2015. — Вип. 22. — С. 23–30.
44. Трушевський В. М. Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі: теоретичні аспекти та застосування / В. М. Трушевський, Г. А. Шинкаренко, Н. М. Щербина. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2014. — 396 с.
45. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2004. — 221 с.
46. Tatari M. A method for solving partial differential equations via radial basis functions: Application to the heat equation / M. Tatari, M. Dehghan // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2010. — Vol. 34. Is. 3. — P. 206–212.
47. Dehghan M. Error estimate for the numerical solution of fractional reaction-subdiffusion process based on a meshless method / M. Dehghan, M. Abbaszaden, A. Mohebbi // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2015. — Vol. 280. — P. 14–36.

48. Martynyuk P. M. Existence and uniqueness of a solution of the problem with free boundary in the theory of filtration consolidation of soils with regard for the influence of technogenic factors / P. M. Martynyuk // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 207, № 1. — P. 59–73.
49. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432с.
50. Мироненко В. А. Проблемы гидрогеоэкологии : в 3 т. / В. А. Мироненко, В. Г. Румынин. — М. : Изд-во Московского гос. горного ун-та, 1998. — Т. 1. Теоретическое изучение и моделирование геомиграционных процессов. — 611 с.
51. Mathematical modeling of density and viscosity of NaCl aqueous solutions / A. I. Simion, C.-G. Grigoras, A.-M. Rosu, L. Gavrila // J. of Agroalimentary Processec and Technologies. — 2015. — Vol. 21(1). — P. 41-52.
52. Зайцев И. Д. Физико-химические свойства бинарных и многокомпонентных растворов неорганических веществ : справ. изд. / И. Д. Зайцев, Г. Г. Асеев. — М. : Химия, 1988. — 416 с.
53. Temperature dependence of the double layer capacitance for the restricted primitive model of an electrolyte solution from a density functional approach / J. Reszko-Zygmunt, S. Sokolowski, D. Henderson, D. Boda // J. Chem. Phys. — 2005. — Vol. 122 (8). — 084504. http: // dx.doi.org / 10.1063 / 1.1850453
54. Rodrhguez H. Temperature and composition dependence of the density and viscosity of binary mixtures of water+ionic liquid / H. Rodrhguez, J. F. Brennecke // J. Chem Eng. Data. — 2006. — Vol. 51(6). — P. 2145-2155.
55. Viscosity and density of ternary solution of calcium chloride+sodium chloride+water from $T = (293.15\ to\ 323.15)\ K$ / H. Qiblawey, M. Arshad, A. Easa, M. Atilhan // J. Chem. Eng. Data. — 2014. — Vol. 59 (7). — P. 2133–2143.
56. Odong J. Evaluation of empirical formulae for determination hydraulic conductivity based on grain-size analysis / J. Odong // Journal of American Science. — 2007. — Vol. 3 (3). — P. 54–60.
57. Lu R. The streambed sediment grain size analysis and empirical formula of vertical hydraulic conductivity of Wei river/ R. Lu, Y. Xu // Int. Journal of Applied Sciences and Engineering Research. — 2014. — Vol. 3. Is. 2. — P. 411–421.
58. Levy G. J. Saturated hydraulic conductivity of semiarid soils: combined effects of salinity, sodicity, and rate of wetting / G. J. Levy, D. Goldshtein, A. I. Mamedov // Soil Sci. Soc. Am. J. — 2005. — Vol. 69. — P. 653–662.
59. Fatahi B. Effects of salinity and sand content on liquid limit and hydraulic conductivity / B. Fatahi, H. Khabbaz, S. Basack // Australian Geomechanics. — 2011. — Vol. 46, № 1. — P. 67–76.
60. Russo D. Consequences of salinity-induced-time-depend soil hydraulic properties on flow and transport in salt-affected soils / D. Russo // Procedia Environmental Sciences. — 2013. — Vol. 19. — P. 623–632.
61. Niwas S. Equation estimation of porosity and hydraulic conductivity of Ruhrtal aquifer in Germany using near surface geophysics / S. Niwas, M. Celic // Journal of Applied Geophysics. — 2012. — Vol. 84. — P. 77–85.
62. Горелик Л. В. Консолидация растущего слоя трехфазного грунта с учётом изменений его свойств в процессе уплотнения / Л. В. Горелик, Б. М. Нуллер // Изв. ВНИИГ. — 1968. — Т. 86. — С. 223–227.

63. Francisca F. M. Long term hydraulic conductivity of compacted soils permeated with landfill leachate / F. M. Francisca, D. A. Glatstein // Applied Clay Science. — 2010. — Vol. 49. — P. 187–193.
64. Buhmann M. D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations / M. D. Buhmann. — Cambridge : Cambridge University Press, 2004. — 260 p.
65. Wendland H. Scattered Data Approximation / H. Wendland. — Cambridge : Cambridge University Press, 2005. — 336 p.

A methodology of analytical derivation of filtration equation for fluid equation in heterogeneous porous media taking into account finite number of the influence factors has been proposed. The methodology consists in the record of the continuity equations of liquid and solid phases of the porous medium with using a material derivative with time. For example, heat and mass transfer, chemical and mechanical suffusion have been chosen as impact factors. A survey of experimental and theoretical dependences of the densities of the soil phases and hydraulic conductivity of the soil upon these factors has been performed. The review phase dependences of parameters of soil (density, hydraulic conductivity) has been made. The mathematical model has been formed and areas for further research has been identified.

Key words: *filtration, material derivative, heat and mass transfer, suffusion.*

Отримано: 21.07.2016

УДК 691.327, 678;532.135

Я. Г. Двойнос*, канд. техн. наук,
В. Ф. Олексієвець*, магістрант,
В. М. Саєць,** головний інженер

*Національний технічний університет України
«КПІ імені Ігоря Сікорського», м. Київ,
** ТОВ «Перший трубний завод», м. Київ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ТЕЧІЇ РОЗПЛАВУ У ТРУБНИХ ГОЛОВКАХ ГВИНТОВОГО ТИПУ

Моделювання процесів у формуючому інструменті екструзійних машин дозволяє виконати необхідні розрахунки для початку конструкторської проробки проекту, що має практичне значення та наукову цінність в плані створення нових методик розрахунку екструзійного інструменту.

Ключові слова: *труба, поліетилен, математична модель, формуючий інструмент.*

Вступ. Більшість головок, які використовуються для екструзії труб з полімерних матеріалів є прямоточні (кошиковий тип), тобто розплав з екструдера потрапляє в головку, де розділяється на декілька

© Я. Г. Двойнос, В. Ф. Олексієць, В. М. Саєць, 2016