УДК 519.87;53.08
DOI: 10.32626/2308-5916.2019-20.114-120

Ю. О. Фуртат, канд. техн. наук.

Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ

ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ У ВИГЛЯДІ ОПЕРАТОРІВ І РІВНЯНЬ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА

Точність результатів моделювання динамічних об’єктів залежить від похибок різних типів: похибки вихідних даних, похибки обчислень та похибки моделі, що описує об’єкт. Вплив похибок первинних даних на точність результату здійснюється шляхом використання та чисельної реалізації математичної моделі. Існують різні форми динамічних моделей, в тому числі звичайні диференціальні рівняння, інтегральні рівняння та оператори, передатні функції, рівняння в частинних похідних. Найбільш розповсюдженими динамічними моделями для опису процесів вимірювання є звичайні диференціальні рівняння. Але математичні моделі у вигляді інтегральних рівнянь мають перевагу за рахунок того, що, на відміну від диференціальних рівнянь, включають в себе повну постановку задачі разом з початковими (граничними) умовами, допускають однотипний підхід при числовому розв'язку.

Складовою частиною будь-якого інтегрального рівняння, що визначає його основні властивості, є інтегральний оператор. Множина задач аналізу динамічних систем призводить до математичних моделей, що містять лінійний інтегральний оператор Вольтерра, нелінійні оператори Вольтерра-Гаммерштейна та оператори Вольтерра-Урисона. Інтегральними рівняннями Вольтерра II роду, як лінійними так і нелінійними, описуються задачі аналізу динамічної системи з явно вираженою однонапрямленою зміною незалежної змінної, наприклад часу. Характерним прикладом таких задач є системи зі зворотнім зв'язком.

Аналіз особливостей інтегрального методу математичного моделювання динамічних об’єктів свідчить про те, що певні переваги динамічних моделей у вигляді інтегральних рівнянь та операторів забезпечують позитивні можливості побудови ефективних методів та засобів створення, дослідження, проектування та функціонування вимірювальних систем з вбудованими засобами динамічної корекції точності.

Ключові слова: *динамічна модель, інтегральне рівняння, інтегральний оператор, інтегральне рівняння Вольтерра, вироджене ядро.*

Вступ. Точність результатів моделювання будь-якого динамічного об’єкту залежить від таких складових як похибка вихідних даних, похибка обчислень та похибка моделі, що описує об’єкт. Всі ці складові обов'язково мають місце на практиці. При цьому вплив похибок первинних даних на точність результату здійснюється шляхом використання та чисельної реалізації математичної моделі. Якість математичної моделі визначається як її адекватністю, так і її можливостями для ефективної чисельної і комп'ютерної реалізації. З цієї точки зору значна роль належить вибору форми (виду) моделі.

Існують різні форми динамічних моделей, в тому числі звичайні диференціальні рівняння, інтегральні рівняння та оператори, передатні функції, рівняння в частинних похідних. При цьому майже всі вони можуть бути аналітично еквівалентними між собою і застосовуватися для опису динаміки конкретного динамічного об'єкту. Тобто має місце принцип альтернативності при виборі тої чи іншої форми опису задач динаміки. Але слід мати на увазі, що ці моделі, як правило, не є рівноцінними при чисельній реалізації, оскільки розв'язки відповідних рівнянь отримуються різними за своїми властивостями чисельними процедурами (алгоритмами).

Альтернативність вибору динамічної моделі. Найбільш розповсюдженими динамічними моделями для опису процесів вимірювання є звичайні диференціальні рівняння, які в загальному випадку мають вигляд:

$$\begin{gathered} F\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)\right) = 0, \\ u(0) = C_1, u'(0) = C_2, \dots, u^{(n-1)}(0) = C_n, \end{gathered} \tag{1}$$

де F — деяка функція, що визначає залежність (в загальному випадку нелінійну) між незалежною змінною x, шуканою функцією $u = u(x)$ і її похідними до n-го порядку включно, C_1, …, C_n — відомі значення початкових умов.

На відміну від диференціальних рівнянь, математичні моделі у вигляді інтегральних рівнянь включають в себе повну постановку задачі разом з початковими (граничними) умовами, допускають однотипний підхід при числовому розв'язку [1; 2].

В достатньо загальному (нелінійному) випадку інтегральна модель може бути представлена у вигляді

$$\int_Q K\left(x, y, u(y)\right) dy = F\left(x, u(x)\right), \tag{2}$$

де інтеграл береться по області Q, $u(x)$ — шукана функція**;** функції K (ядро) і F — задані.

Складовою частиною будь-якого інтегрального рівняння, що визначає його основні властивості є інтегральний оператор. Множина задач аналізу динамічних систем призводить до математичних моделей, що містять лінійний інтегральний оператор Вольтерра, нелінійні оператори Вольтера-Гаммерштейна та оператори Вольтерра-Урисона.

Інтегральними рівняннями Вольтерра II роду, як лінійними так і нелінійними, описуються задачі аналізу динамічної системи з явно вираженою однонаправленою зміною незалежної змінної, наприклад часу. Характерним прикладом таких задач є системи зі зворотнім зв’язком.

До рівнянь Вольтерра відносять інтегральні рівняння, що містять оператор Вольтерра, включаючи в цей клас і різні види нелінійних рівнянь. До найбільш поширених рівнянь цього типу відносяться наведені нижче рівняння [5; 6].

Лінійне одномірне (скалярне) рівняння Вольтерра II роду має вигляд

$$y(x)-\int_a^x K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x),\ \ x\in[a,b). \tag{3}$$

З різними обмеженнями на ядро рівняння $K(x, s)$ і праву частину $f(x)$ пов'язані певні умови існування та єдиності знаходження розв'язку. Зокрема, розв'язок існує і єдиний, якщо ядро безперервно всередині і на сторонах трикутника, обмеженого прямими $s = a$, $x = b$, $x = s$ (при $b > a$), а функція $f(x)$ на проміжку $[a, b)$ має кінцеву кількість точок розриву, причому вона може бути і необмеженою, якщо $\int_a^b \left|f(s)\right|ds$ має кінцеве значення. Ядро задовольняє умові $K(x, s) \equiv 0$ при $s > x$. Замінюючи в (3) інтеграл квадратурною формулою, можна отримати апроксимуючу систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень шуканої функції у фіксованих вузлах з трикутною матрицею коефіцієнтів.

Рівняння (3) вміщує інтегральний оператор

$$A_B\varphi(x)\equiv\int_a^x K(x,s)\varphi(s)\,ds,\qquad x\le s, \tag{4}$$

важлива властивість якого полягає в тому, що значення функції $\psi(x) = A_B\varphi(x)$ при будь-якому x визначаються значеннями функції φ тільки при $s \le x$. Інтегральні оператори, що характеризуються цією властивістю, в тому числі і нелінійні, називаються операторами Вольтерра і широко застосовуються при описі процесів з післядією. Дана властивість інтегрального оператора дозволяє застосовувати прийом розв'язання рівняння (3), що полягає в тому, що розв'язок може бути побудовано тільки на частинах проміжку $[a, b)$, наприклад, на деякому інтервалі $a \le x \le x_1$, користуючись виразом

$$y(x)=\left[\int_a^{x_1} K(x,s)\,y(s)\,ds+f(x)\right]+\int_{x_1}^{x} K(x,s)\,y(s)\,ds\ .$$

Важливим для практики числового розв'язку є випадок виродженого ядра (ядра, що розділяється):

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\beta_i(s), \tag{5}$$

де $\alpha_i(x)$, $\beta_i(s)$ — відомі функції однієї змінної, якому відповідає рівняння

$$y(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\int_a^x\beta_i(s)y(s)ds=f(x). \tag{6}$$

Розповсюдженим на практиці є рівняння Вольтерра II роду типу згортки (одностороннє):

$$y(x)-\int_o^x K(x-s)y(s)ds=f(x),\ \ x\in[0,\infty), \tag{7}$$

або рівняння Вольтерра II роду типу згортки (двохстороннє)

$$y(x)-\int_{-\infty}^{x}K(x-s)y(s)ds=f(x),\quad x\in(-\infty,\infty). \tag{8}$$

Рівняння Вольтерра II роду з оператором Гаммерштейна (рівняння Вольтерра-Гаммерштейна):

$$y(x)-\int_a^x K(x,s)F\left[s,y(s)\right]ds=f(x),\quad x\in[a,b). \tag{9}$$

Рівняння Вольтерра-Гаммерштейна II роду типу згортки:

$$y(x)-\int_0^x K(x-s)F\left[s,y(s)\right]ds=f(x),\quad x\in[0,\infty),$$

або

$$y(x)-\int_{-\infty}^{x}K(x-s)F\left[s,y(s)\right]ds=f(x),\quad x\in(-\infty,\infty) \tag{10}$$

Рівняння Вольтерра II роду з оператором Урисона (рівняння Вольтерра-Урисона):

$$y(x)-\int_a^x K\left[x,s,y(s)\right]ds=f(x),\quad x\in[a,b]. \tag{11}$$

Базовою формою математичної моделі процесів динамічної корекції є інтегральні рівняння Вольтерра I роду.

Лінійне одномірне інтегральне рівняння Вольтерра I роду має вигляд

$$Ay\equiv\int_a^x K(x,s)y(s)ds=f(x),\ \ x\in[a,b]. \tag{12}$$

Важливий і широко розповсюджений в додатках різновид рівнянь (12) — рівняння типу згортки, в тому числі рівняння вигляду (двостороннє):

$$\int_{-\infty}^{x} K(x-s)\,y(s)ds = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{13}$$

а також (односторонні):

$$\int_{0}^{x} K(x-s)\,y(s)ds = f(x), \quad x \in [0,b]. \tag{14}$$

Рівняння Вольтерра І роду з оператором Гаммерштейна (рівняння Вольтера-Гаммерштейна І роду):

$$\int_{a}^{x} K(x,s)\,F[s,y(s)]ds = f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{15}$$

Рівняння Вольтерра-Гаммерштейна І роду типу згортки двостороннє:

$$\int_{-\infty}^{x} K(x-s)\,F[s,y(s)]ds = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{16}$$

або одностороннє (на піввісі)

$$\int_{0}^{x} K(x-s)\,F[s,y(s)]ds = f(x), \quad x \in [0,b]. \tag{17}$$

Нелінійне рівняння Вольтерра І роду (рівняння Вольтерра-Урисона І роду):

$$\int_{a}^{x} K[x,s,y(s)]ds = f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{18}$$

Інтегральні оператори. Визначальною складовою частиною будь-якого інтегрального або інтегро-диференціального рівняння є інтегральний оператор. Завдяки широкому застосуванню на практиці поняття вагової (апаратної) функції, лінійні інтегральні оператори мають і велике самостійне значення як явні моделі лінійних динамічних об'єктів. Нелінійні інтегральні оператори, природно, представляють собою моделі нелінійних об'єктів, хоча задача формування цього виду моделей значно складніша лінійного випадку [3;4]. Зазначимо коротко деякі основні відомості про інтегральні оператори, що являють собою найбільш розповсюджений вид динамічних макромоделей.

Інтегральне перетворення

$$u(t) = \int_{t_0}^{T} K(t,s)\varphi(s)\,ds, \tag{19}$$

в якому $\varphi(t) \in C[t_0, T]$, а ядро $K(t, s)$ — задана функція, що належить області (квадрату) $P\{t_0 \le t,\ s \le T\}$, є інтегральним оператором Фредгольма, окремим випадком якого є оператор Вольтерра

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s) Y(s)\, ds . \tag{20}$$

Поняття безперервності лінійної системи в повній мірі узгоджується з поняттям безперервності інтегрального оператора, що її описує.

Якщо в інтегральному операторі ядро $K(t,s)$ в області $P\{t_0 \le t, s \le T\}$ задовольняє умові

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T} K^2(t,s)\, dt ds = B^2 < \infty , \tag{21}$$

тоді інтеграл (19) існує для довільної функції $\varphi(t) \in L_2[t_0, T]$.

Для дослідження асимптотичних властивостей динамічних моделей, з'ясування умов збіжності та стійкості наближених, в тому числі числових методів аналізу, важливим і досить складним є питання визначення норм інтегральних операторів. У таких випадках часто використовують оцінки норм.

Лінійність моделі (18) показується завдяки властивій їй адитивності:

$$\int_{t_0}^{T} K(t,s)\left[\varphi_1(s) + \varphi_2(s)\right] ds = \int_{t_0}^{T} K(t,s)\varphi_1(s)\, ds + \int_{t_0}^{T} K(t,s)\varphi_2(s)\, ds ,$$

та властивості однорідності

$$\int_{t_0}^{T} K(t,s)\alpha\varphi(s)\, ds = \alpha \int_{t_0}^{T} K(t,s)\varphi(s)\, ds .$$

Інтегральний оператор безпосередньо відповідає розповсюдженій моделі «вхід-вихід» як опису зв'язку вхідних і вихідних сигналів динамічної системи. Необхідність в такому описі з'являється при розгляданні поведінки як окремих блоків об'єкта так і всього об'єкта в цілому. Математичні моделі «вхід-вихід» по суті представляють собою макромоделі і отримуються експериментально.

Висновки. Таким чином, аналіз особливостей інтегрального методу математичного моделювання динамічних об’єктів свідчить про те, що певні переваги динамічних моделей у вигляді інтегральних рівнянь та операторів забезпечують позитивні можливості побудови ефективних методів та засобів створення, дослідження, проектування та функціонування вимірювальних систем з вбудованими засобами динамічної корекції точності.

Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — Киев : Наукова думка, 1986. — 544 с.
2. Мороз В. І. Інтегральні рівняння в моделюванні керованих електромеханічних систем / В. І. Мороз // Електротехніка і електромеханіка. — 2007. — № 3. — С. 39–43.
3. Franz M. O. A unifying view of Wiener and Volterra theory and polynomial kernel regression / M.O. Franz, B. Scholkopf // Neural Computation. — 2006. — Vol. 18 (12). — P. 3097-3118 — Режим доступу: http://www.mitpress journals.org/doi/pdf/10.1162/neco.2006.18.12.3097.
4. Guo Yuzhu. Volterra Series Approximation of a Class of Nonlinear Dynamical Systems Using the Adomian Decomposition Method / Yuzhu Guo, L. Z. Guo, S. A. Billings, Daniel Coca, Z. Q. Lang // Nonlinear Dynamics. — 2013. — Vol. 74. — Issue 1–2. — P. 359–371.
5. Kress R. Linear Integral Equations / R. Kress. — 3rd ed. — 2014. — 412 p.
6. Pearson R. K. Identification of structurally constrained second-order Volterra models / R. K. Pearson, B. A. Ogunnaike, F. J. Doyle // IEEE Trans. on Signal Processing. — 1996. — Vol. 44, № 11. — P. 2837-2846.

PROPERTIES OF INTEGRAL DYNAMIC MODELS IN THE FORM OF OPERATORS AND EQUATIONS OF THE VOLTERRA TYPE

Accuracy of dynamic object modeling results depends on the errors of different types: source data errors, calculation errors and model error. Errors of the primary data influence the accuracy of the result through the use and numerical implementation of the mathematical model. There are various forms of dynamic models, including ordinary differential equations, integral equations and operators, transfer functions, partial differential equations. The most common dynamic models for describing measurement processes are ordinary differential equations. But mathematical models in the form of integral equations have the advantage over them because, unlike differential equations, include the complete formulation of the problem together with the initial (boundary) conditions, they allow a one-size-fits-all approach to numerical solutions.

An integral operator is an integral part of any integral equation that defines its basic properties. Many dynamical systems analysis problems result in mathematical models containing a linear integral Volterra operator, nonlinear Volterra-Hammerstein operators and Volterra-Urison operators. Volterra II-type integral equations, both linear and nonlinear, describe the problems of analyzing a dynamic system with a pronounced unidirectional change in an independent variable, such as time. A typical example of such tasks is feedback systems.

The analysis of the peculiarities of the integral method of mathematical modeling of dynamic objects shows that certain advantages of dynamic models in the form of integral equations and operators provide positive possibilities for constructing effective methods and means of creation, research, design and operation of measurement systems with integrated means of dynamic correction.

Key words: *dynamic model, integral equation, integral operator, Volterra integral equation, degenerate nucleus.*

Отримано: 9.08.2019