УДК 532.529: 532.591
DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.88-96

С. А. Положаєнко, д-р техн. наук, професор,
Д. А. Лись, аспірантка

Державний університет «Одеська політехніка», м. Одеса

МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ГАЗОРІДИННИХ СИСТЕМАХ

В термінах гідродинамічної теорії гетерогенних систем розглянуто можливості математичного опису (формалізації) процесів динаміки газорідинних двофазних систем. При цьому, на підставі врахування ефекту існування нерозчинених бульбашок газу у не збудженій рідині, так і у рідині, що зазнає зовнішнього впливу з утворенням хвильового руху, запропоновано математичні модель динамічних станів газорідинних двофазних систем. Актуальність таких моделей полягає в тому, що двофазні потоки являють собою основне «робоче тіло», зокрема, в енергетичних установках та апаратах хімічної технології, а робочі процеси в металургійній, нафтодобувній та нафтопереробній (в т. ч. нафтохімічній) промисловості, в кріогенних апаратах супроводжуються утворенням парорідинних систем. В зв'язку з цим, наявність адекватних математичних моделей динаміки для середовищ, які розглядаються, заснованих на врахуванні законів збереження (маси, імпульсу та енергії) та придатних для застосування у інженерних розрахунках, слід розглядати як перевагу над емпіричними моделями, що забезпечують задовільну точність розрахунків лише в обмеженому діапазоні технологічних параметрів і абсолютно непридатних для позаштатних та аварійних режимів. Проведений аналіз розповсюдження хвильових процесів у газорідинному середовищі на основі гетерогенного представлення фізичних явищ в ньому показує аналогічність традиційному газодинамічному підходу, але, тим не менш, газорідинна суміш має певні особливості. Перед усім це стосується наявності так званої «бульбашкової» суспензії, яка визначає суттєву нелінійність динамічного режиму у газорідинних середовищах, що спричинено можливістю стискання двофазної системи під впливом зовнішнього впливу (тиску із зовні). Наслідком останнього є низькі значення швидкості звука, спричинена залежністю від тиску, особливо на ділянках його зростання. Запропоновані моделі є достатньо інформативними, що дозволяє робити висновки стосовно можливих механізмів перебігу динамічних процесів у газорідинних середовищах, та прогнозувати подальший їх розвиток за умови апріорної інформації про газодинамічні характеристики реальної двофазної системи.

Ключові слова: *газорідинні суміші, двофазні системи, бульбашкові суспензії, хвильові процеси, математична модель, нелінійні та ударні хвилі.*

Вступ. Хвильові процеси в механіці двофазних систем займають особливе місце, оскільки найбільш яскраво ефекти неоднорідності проявляються при розповсюдженні хвиль, а з другого боку, акустичні хвилі в таких системах — найбільш досяжний та ефективний спосіб вивчення структури самої двофазної системи.

Середовище, в якому швидкість розповсюдження збурень залежить від частоти осциляцій, можна вважати *диспергуючим* [1, 2]. Таку властивість мають газорідинні суміші. Найпростішою змістовною моделлю у даному випадку є ідеальна, в цілому така, що перебуває у спокою та необмежена у об'ємі рідина, з рівнорозподіленими у ній газовими бульбашками, які зберігають масу та сферичну форму. Бульбашки при цьому перебувають на достатньому віддаленні одна від одної, так що невизначені стикання відсутні.

На даний час в літературі відсутні адекватні математичні моделі (ММ) хвильових процесів двофазних (у випадку, що розглядається — газорідинних) систем, а у інженерних розрахунках застосовують, здебільшого, емпіричні моделі, які мають досить вузький діапазон застосування, що обмежується регламентними режимами роботи технологічних апаратів, і є зовсім непридатними для опису нештатних та аварійних режимів.

Мета роботи. Розробка ММ хвильових процесів у двофазних (газорідинних) системах, що базуються на строгій формалізації масообмінних явищ, які спостерігаються у цих системах, та орієнтованих на застосуванні у якості модельної підтримки інструментальних програмних засобів (ІПЗ) при автоматизації технологічних операцій у переробних та хімічній галузях виробництва

Основна частина. Запропонуємо ММ найбільш поширених випадків існування двофазних газорідинних систем, притаманних технологічним процесам у нафтодобувній, нафтохімічний, металургійній та інших галузей виробництва, для яких (процесів) характерно утворення та стійке існування нерозчинних суспензій.

1. Динамічна модель бульбашкової суспензії. Ефективні радіуси приєднаних мас рідини менше відстані між бульбашками, і взаємодія відбувається лише через поле тисків. Тому рівняння гідродинаміки можна замкнути рівнянням Релея для осциляцій *одиночної бульбашки* у необмеженому об'ємі ідеальної рідини, прийнявши припущення щодо можливості заміни тиску та нескінченості тиску суміші. Таким чином, система рівнянь, що описують розповсюдження збурень складається з рівнянь руху суміші та рівняння осциляції бульбашок

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0\,; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}=0, \qquad (2)$$

$$\rho_1\left[R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right]=P_2-P_1\,, \qquad (3)$$

де P — тиск, під яким перебуває газорідинна суміш, u — швидкість руху газорідинної суміші, R — радіус бульбашок, ρ_i — густина ($i=1,2$, де індексу 1 відповідає рідина, а індексу 2 — газ); $\rho=(1-\varphi)\,\rho_1+\varphi\rho_2$ — густина суміші, $\rho_1=\text{const}$ (φ — об’ємний газовміст).

Властивість стискання суміші у ММ (1)-(3) визначається властивістю стискання газу, який перебуває у бульбашках, а осциляції радіуса бульбашок R визначається інерцією приєднаної маси рідини та різницею тисків $\Delta P=P_2-P_1$.

При достатньо великому числі бульбашок можна прийняти також, що їх число в одиниці маси суміші N залишається постійним. Тоді об’єм газу в одиниці маси суміші V, радіус бульбашок R, густина суміші ρ, об’ємний газовміст φ та масовий газовміст X зв’язано співвідношенням [3]

$$\rho^{-1}=V+(1-X)/\rho_1\,;\; V=\frac{4}{3}\pi R^3N\,;\; \varphi=V\rho\,;\; -d\rho/dt=\rho^2\,dV/dt\,. \qquad (4)$$

Якщо амплітуда осциляцій радіусу бульбашок мала, що має місце при акустичних збуреннях, можна записати

$$\delta R \ll R_0\,;\; \delta P \ll P_0\,;\; dV=4\pi R_0^2N\,dR\,,$$

$$\frac{dR}{dt}=-\left(\frac{R_0}{3\varphi_0\rho_0}\right)\frac{d\rho}{dt}\,;\; R\frac{d^2R}{dt^2}=-\frac{R_0^2}{3\varphi_0\rho_0}\cdot\frac{d^2\rho}{dt^2}\,. \qquad (5)$$

Індексом 0 відмічено значення параметрів у не збудженому (вихідному $t=0$) стані. У цьому наближенні узагальнене рівняння динаміки бульбашок у ідеальній рідині набуде вигляду

$$\frac{R_0^2}{3\varphi_0}\cdot\frac{d^2\rho}{dt^2}-\frac{R_0^2}{6\varphi_0^2\rho_0}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\delta P_2=\delta P_1\,, \qquad (6)$$

$\delta P_2=P_2-P_0$; $\delta P=P-P_0$; $P_0=P_{1_0}-P_{2_0}$ — тиск у не збудженій суміші. Тиск газу у бульбашці змінюється по політропі

$$P_2V_2^n=P_{2_0}V_{2_0}^n\,. \qquad (7)$$

Показник ступеню, який приймає значення (у залежності від інтенсивності теплообміну між бульбашками та рідиною) от $n = \gamma = C_{P_2} / C_{V_2}$ до $n = 1$ (де C_{P_2} та C_{V_2} — відповідні осциляції). Оскільки термічний опір рідини значно нижче термічного опору газу, то ступінь адіабатичності процесу залежить практично тільки від теплопровідності газу та радіусу бульбашок. Зазвичай істотне відхилення від адіабатичності спостерігається тільки у бульбашок інертних газів. Надалі приймемо $n = \gamma$.

Для малих відхилень від початкового стану з точністю до $\left(\delta V_2 / V_{2_0}\right)^2$ з (7) отримаємо

$$\delta P_2 = -\gamma P_0 \left(\delta V_2 / V_{2_0}\right) + 0,5\gamma \left(\gamma + 1\right) P_0 \left(\delta V_2 / V_{2_0}\right)^2 . \tag{8}$$

Переходячи від δV_2 до $\delta \rho$ з урахуванням (4) $\delta V_2 / V_{2_0} = -\delta \rho / \left(\rho_0 \varphi_0\right)$, запишемо (8) у вигляді

$$\delta P_2 = c_0^2 \delta \rho + \frac{\left(\gamma + 1\right) c_0^2}{2 \rho_0 \varphi_0} \left(\delta \rho\right)^2 , \tag{9}$$

де $c_0 = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0 \varphi_0}$ — низькочастотна швидкість звуку у бульбашковому середовищі.

Таким чином, третій член рівняння (6) містить нелінійність, яка суттєво перевищує за значенням гідродинамічну не лінійність в (1). З урахуванням домінуючого значення «бульбашкової» нелінійності [4-6] перепишемо рівняння руху (1) у лінеаризованому вигляді

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} ; \; \frac{d\rho}{dt} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 , \tag{10}$$

а в (3) перейдемо до густини суміші

$$2\beta_0 \frac{d^2 \rho}{dt^2} + c_0^2 \delta \rho + B c_0^2 \left(\delta \rho\right)^2 = \delta P , \tag{11}$$

де $\beta_0 = R_0^2 / 6\varphi_0 \left(1 - \varphi_0\right)$; $B = \left(\gamma + 1\right) / \left(2 \rho_0 \varphi_0\right)$.

Видаливши швидкість плину суміші з рівнянь (10)

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \tag{12}$$

двічі виконавши диференціювання (11) за часом, використовуючи (12), отримаємо

$$2\beta_0 \frac{\partial^4 \rho}{\partial t^2 \, \partial x^2} + c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial \rho}{\partial t^2} + B c_0^2 \frac{\partial^2 \left(\delta \rho^2\right)}{\partial t^2} = 0 . \tag{13}$$

Перший член рівняння (13) відображає вплив інерції рідини та спричиняє залежність швидкості звуку від частоти накладеного збудження, останній член визначає нелінійні властивості бульбашкового середовища. Якщо дисперсійний та нелінійний ефекти малі, то в якості першого наближення отримуємо відоме акустичне рівняння [7]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 ,$$

що цілком задовольняє точності інженерних розрахунків.

2. Динамічна модель для середовища без дисперсії енергії. У бігучій хвилі тиск та густине у першому акустичному наближенні зв'язано співвідношенням

$$\delta P \approx c_0^2 \delta\rho . \tag{14}$$

Якщо уявити, що в системі координат, яка рухається разом із хвилею, сигнал, за рахунок проявлення ефектів дисперсії та не лінійності деформується мало, то слід замінити, у останньому нелінійному члені рівняння (13) $\delta\rho$ на δP у відповідності до (14), в результаті чого отримаємо наступне рівняння

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{B}{c_0^2} \cdot \frac{\partial^2 (\delta\rho)^2}{\partial t^2} - 2\beta_0 \frac{\partial^4 P}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 , \tag{15}$$

яке можна ототожнити з нелінійним рівнянням Буссінеска [8]. Останнє, та його аналоги, на поточний час є найбільш ефективними моделями щодо опису процесів розповсюдження хвиль в середовищах з дисперсійними та нелінійними властивостями.

У канонічній формі рівняння Буссінеска набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2 (\delta P)^2}{\partial x^2} - 2\beta_0 \frac{\partial^4 P}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 . \tag{16}$$

При заміні в малому дисперсійному члені другої похідної по t у відповідності з акустичним рівнянням можна отримати іншу форму рівняння Буссінеска

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2 (\delta P)^2}{\partial x^2} - 2\beta_0 c_0^2 \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} = 0 . \tag{17}$$

Хвильові члени цього рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + c_0 \frac{\partial P}{\partial x}\right) - c_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + c_0 \frac{\partial P}{\partial x}\right) . \tag{18}$$

Якщо хвиля розповсюджується в один бік і слабко деформується в системі відліку, що рухається зі швидкістю c_0, то $\partial/\partial t = -c_0\, \partial/\partial x$. Відповідно рівняння Буссінеска можна перетворити у наступне:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+c_0\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\gamma+1}{2\varphi_0\rho_0 c_0}\delta P\frac{\partial P}{\partial x}-\beta_0\frac{\partial^3 P}{\partial x^2\partial t}=0 \tag{19}$$

або, знову скориставшись співвідношенням $\partial/\partial t=-c_0\,\partial/\partial x$, привести до рівняння наступного виду

$$\frac{\partial P}{\partial t}+c_0\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}c_0\frac{\delta P}{P_0}\frac{\partial P}{\partial x}+\beta_0 c_0\frac{\partial^3 P}{\partial x^2\partial t}=0\,. \tag{20}$$

В системі координат t, $\xi=x-c_0 t$ рівняння (20) перепишеться у вигляді

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\cdot\frac{\partial P}{P_0}c_0\frac{\partial P}{\partial\xi}+\beta_0 c_0\frac{\partial^3 P}{\partial\xi^3}=0 \tag{21}$$

або у безрозмірній формі

$$\frac{\partial\overline{P}}{\partial\tau}+\overline{P}\frac{\partial\overline{P}}{\partial\xi}+\frac{\beta_0\,c_0}{l_0^2 U_0}\cdot\frac{\partial^3\overline{P}}{\partial\xi^3}=0\,. \tag{22}$$

В якості масштабів тут прийнято: l_0, δP_0 — ширина та інтенсивність (амплітуда) початкового збурення; $U_0=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\cdot\frac{\delta P_0}{P_0}c_0$ — масштабна швидкість.

Запишемо (20) у лінійній формі

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c_0\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0\,;\ \beta=\beta_0 c_0\,, \tag{23}$$

де $c_0=\sqrt{(\gamma P_0)/[\rho_2\varphi_0(1-\varphi_0)]}$ — адіабатична швидкість звуку. Обчислимо дисперсійне співвідношення, представивши розв'язок у вигляді монохроматичної хвилі

$$u=A\exp\left[i(kx-\omega t)\right], \tag{24}$$

де $k=2\pi/\lambda$ — хвильове число, λ — довжина хвилі, ω — частота розповсюдження хвилі. Отримаємо

$$-i\omega+ic_0 k-i\beta k^3=0\,;\ \omega=c_0 k-\beta k^3\,. \tag{25}$$

Фазова та групова швидкості хвилі визначаються формулами

$$c_ф=\omega/k=c_0-\beta k^2\,;\ c_г=d\omega/dk=c_0-3\beta k^2\,. \tag{26}$$

Залежність фазової швидкості від частоти можна записати у вигляді $\omega=c_ф\sqrt{(c_0-c_ф)/\beta}$. Вона характеризує дисперсійні властивості бульбашкового середовища, які спричиняють появу цікавих ефектів при розповсюдженні збурень. Зокрема, в системі, яка характеризується дисперсією, кожна з компонент Фурьє довільного початкового імпульсу розповсюджується з власною швидкістю і форма сигналів змінюється у процесі руху.

Розглянемо хвилю $f = A\cos(kx - \omega t)$, яка прогресує. Уявімо, що в середовищі розповсюджуються збурення f_1 з хвильовим числом $k_1 = k + \Delta k$ та f_2 з хвильовим числом $k_2 = k - \Delta k$, а дисперсійне співвідношення має вигляд $\omega = W(k)$. Тоді

$$\omega + \Delta\omega = \omega + \Delta k \cdot (dW/dk),\ \Delta\omega = c\Delta k\ , \tag{27}$$

а вирази для f_1 та f_2 запишуться наступним чином

$$f_1 = A\left[\cos(kx - \omega t)\cos(\Delta k(x - ct)) - \sin(kx - \omega t)\sin(\Delta k(x - ct))\right], \tag{28}$$

$$f_2 = A\left[\cos(kx - \omega t)\cos(\Delta k(x - ct)) + \sin(kx - \omega t)\sin(\Delta k(x - ct))\right]. \tag{29}$$

Суперпозиція цих двох розв’язків має вигляд

$$f_1 + f_2 = 2A\cos(kx - \omega t)\cos(\Delta k)(x - ct)\ . \tag{30}$$

Початкове збурення кінцевої тривалості в середовищі з дисперсією, в тому числі і в бульбашковій, при достатньо великих розповсюдженнях у часі приймає, зазвичай, форму хвильового пакету з сильно осцилюючою амплітудою в середині пакету.

Рівняння $\partial u/\partial t + \beta\left(\partial^3 u/\partial \xi^3\right) = 0$ при великих значеннях часу для початкового, затухаючого при $\xi = \pm\infty$ збуреннях, має асимптотичний розв’язок виду

$$u = \pi^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m P_m}{m!}(3\beta t)^{-(m+1)/3} Ai^m(\eta), \tag{31}$$

де
$$\eta = \xi\big/(3\beta t)^{1/3}\ ;\ P_m = \int_{-\infty}^{\infty}\xi^m u(\xi, 0)\,d\xi\ ; \tag{32}$$

$u(\xi, 0)$ — початковий розподіл; $Ai^m(\eta)$ — похідні m-го порядку від функції Ейрі [9] $Ai^m(\eta) = \left(\pi^{-1/2}\right)\int_0^{\infty}\cos\left(W^3/3 + W\eta\right)dW$. При $\eta \le 1$ і більших у розв’язку можна обмежитись першим членом ряду ($m = 0$)

$$u = \pi^{-1/2} P_0\, Ai^m(\eta)\big/(3\beta t)^{-1/3}\ . \tag{33}$$

Числові дослідження показали, що нелінійне рівняння (23) має деякі цікаві розв’язки у вигляді стаціонарних хвиль, які розповсюджуються з постійною швидкістю без зміни форми. Такий розв’язок можна віднайти, уводячи нову незалежну змінну $\xi_1 = \xi - v_1 t$ та приймаючи, що $u(\xi, t) = u(\xi - v_1 t)$. Значення v_1 повинно визначатися у процесі розв'язування. Після заміни можна отримати рівняння

$$\beta \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = (u - v_1) \frac{\partial u}{\partial \xi_1} , \qquad (34)$$

інтегрування якого дає

$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} = \left(u^2/2\right) - v_1 u + C_1/2 . \qquad (35)$$

Множачи останнє рівняння на u і, знову інтегруючи, отримаємо

$$(du/d\xi)^2 = \left[\left(u^3/3\right) - v_1 u^2 + C_1 u + C_2\right]\Big/\beta , \qquad (36)$$

тут C_i ($i = 1, 2$) — постійні інтегрування. Дійсні розв'язки існують, якщо поліном додатний або дорівнює нулю.

Висновки. Отримано моделі хвильових процесів у газорідинних системах для випадків бульбашкової суспензії та середовища без дисперсії енергії. Як таких. Що найбільш часто зустрічаються на практиці. Отримані моделі адекватно відображають фізичні явища динамічного руху двофазної газорідинної системи і можуть бути легко застосовані у інженерних розрахунках.

Список використаних джерел:

1. Кутателадзе С. С. Анализ подобия и модели термодинамике газожидкостных систем. *Журн. прикл. мех и техн. физики*. 2000. № 5. С. 24-33.
2. Акуличев В. А., Алексеев В. Н. О динамике паровых пузырьков в жидководородных пузырьковых камерах. *Акуст. журн.* 2007. Т. 17, № 3. С. 356-364.
3. Праузниц Дж. М., Эккерт К. А., О'рай Р. В., О'Коннепп Дж. П. Машинный расчет парожидкостного равновесия многокомпонентных смесей. Пер. с англ. Москва: Химия, 2007. 217 с.
4. Гарипов Р. М. Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками. *Журн. прикл. мех. и техн. физики*. 2003. № 6. С. 3-24.
5. Zwick S. A. Behaviour of small permanent gas bubbles in a liquid. *J. Math. and Phys*. 2008. Vol. 37, № 3. P. 36-52.
6. Кедринский В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа. *Журнал прикл. мех. и техн. физики*. 2008. № 4. С. 29-34.
7. Айдагулов Р. Р., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш. Структура ударной волны в жидкости с пузырьками газа с учетом нестационарного межфазного теплообмена. *Журн. прикл. мех. и техн. физики.* 2005. № 3. С. 67-74.
8. Campbell I. J., Pitcher A. S. Shock waves in a liquid containing gas bubbles. *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* 2008. Vol. 243. № 1235. P. 534-545.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Москва: Наука, 1977. 831 с.

SIMULATION OF WAVE PROCESSES IN GAS-LIQUID SYSTEMS

In terms of the hydrodynamic theory of heterogeneous systems, the possibilities of mathematical description (formalization) of the processes of dynamics of gas-liquid two-phase systems are considered. In this case, based on the effect of the existence of undissolved gas bubbles in the unexcited liquid and in the liquid exposed to the formation of wave motion, a mathematical model of the dynamic states of gas-liquid two-phase systems is proposed. The relevance of such models is that two-phase flows are the main «working fluid», in particular, in power plants and chemical technology, and work processes in the metallurgical, oil and refining (including petrochemical) industry, in cryogenic devices accompanied by the formation of vapor-liquid systems. In this regard, the availability of adequate mathematical models of dynamics for the media under consideration, based on conservation laws (mass, momentum and energy) and suitable for use in engineering calculations, should be considered as an advantage over empirical models that provide satisfactory accuracy. calculations only in a limited range of technological parameters and completely unsuitable for emergency and emergency modes. The analysis of the propagation of wave processes in a gas-liquid medium on the basis of a heterogeneous representation of physical phenomena in it shows similarity to the traditional gas-dynamic approach, but, nevertheless, the gas-liquid mixture has certain features. First of all, this concerns the presence of the so-called «bubble» suspension, which determines the significant nonlinearity of the dynamic regime in gas-liquid media, which is caused by the possibility of compression of the two-phase system under external influence (external pressure). The consequence of the latter is low values of the speed of sound caused by the dependence on pressure, especially in areas of its growth. The proposed models are quite informative, which allows us to draw conclusions about the possible mechanisms of dynamic processes in gas-liquid media, and predict their further development under the condition of a priori information about the gas-dynamic characteristics of a real two-phase system.

Key words: *gas-liquid mixtures, two-phase systems, bubble suspensions, wave processes, mathematical model, nonlinear and shock waves.*

Отримано: 11.10.2021