The considered method of modernization of iterative algorithms of numerical solution in nonlinear integral equations allows to determine the "better" initial approximation, which makes it possible to increase the convergence of the iterative process in the initial method. The results of computational experiments in the solution of the Fredholm integral equations of the second kind confirm the use effectiveness of the modernized algorithm based on the method of simple iterations with preliminary optimization of the initial approximation.

Keywords: *nonlinear integral equation, iterative method, splines, quadrature formulas.*

Отримано: 18.10.2021

УДК 621.37:621.391
DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.106-118

Д. О. Смірнов,
Д. А. Вєдєрніков,
О. А. Палагіна, канд. техн. наук,
В. В. Палагін, д-р техн. наук

Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

МЕТОДИ СТАТИСТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СИГНАЛУ НА ФОНІ НЕГАУСОВИХ КОРЕЛЬОВАНИХ ЗАВАД

Класичний підхід для побудови систем оцінювання параметрів сигналів, які приймаються на фоні негаусових завад, характеризується складністю алгоритмічної та обчислювальної реалізації, що не дозволяє синтезувати якісні програмні та апаратні засоби статистичної обробки. Окрім того, наявність кореляційних зв'язків досліджуваних вибіркових значень суттєво ускладнює алгоритмічну реалізацію. Аналіз досліджень, які проводяться останнім часом засвідчив, що для знаходження оцінок невідомих параметрів сигналів, які приймаються на фоні негаусових завад, можливо використовувати інший перспективний підхід. Такий підхід базується на використанні чисельних характеристик опису випадкових процесів, а саме моментних і кумулянтних функцій вищих порядків, що дозволяє з заданим наближенням описувати статистичні властивості негаусових процесів.

У роботі запропоновані нові математичні моделі адитивної взаємодії корисного постійного сигналу та корельованої негаусової завади при застосуванні одномоментних та двохмоментних кумулянтних функцій вищих порядків. Таке представлення надає додаткові можливості не тільки описати параметри та характеристики досліджуваного негаусового процесу, але і врахувати статистичні зв'язки вибіркових значень для побудови якісних алгоритмів оцінювання невідомих параметрів сигналу.

На основі обраного підходу отримані моментно-кумулянтні моделі досліджуваних корельованих негаусових процесів, запропоновані нові поліноміальні методи оцінювання невідомого параметра корисного сигналу, що дозволило синтезувати нові обчислювальні алгоритми для обробки статистично залежних негаусових процесів. На основі запропонованих моделей та методів проведено синтез та аналіз обчислювальних алгоритмів оцінювання невідомого параметра постійного сигналу з кращими точністними характеристиками у порівнянні з традиційними результатами. В якості параметра ефективності обиралася дисперсія отриманих оцінок, яка для запропонованих методів є меншою у порівнянні з відомими результатами для традиційних гаусових моделей досліджуваних процесів.

Ключові слова: *моментні та кумулянтні функції вищих порядків, метод максимізації полінома, корельовані негаусові процеси.*

Вступ. Результати оцінювання параметрів сигналів широко використовуються в багатьох додатках, що мають відношення до технічних завдань діагностики, управління, моніторингу та контролю, де використовуються статистичні підходи до обробки даних. Для їх вирішення використовуються відомі статистичні методи (метод максимальної правдоподібності, метод моментів, метод найменших квадратів та ін. [1-3]), при використанні яких в загальному випадку не накладається обмежень на вид розподілів випадкових процесів. При цьому, при вирішенні практичних завдань широкого поширення набули гаусові моделі, які не завжди адекватно відображають реальні досліджувані процеси [4-6]. Таке припущення (спрощення моделі) призводить до зниження точності оцінювання параметрів досліджуваних випадкових процесів.

При використанні відомих підходів до вирішення завдання оцінювання параметрів сигналів, що приймаються на фоні негаусових завад, виникають труднощі, які пов'язані з апріорною невизначеністю параметрів досліджуваних негаусових розподілів, алгоритмічною і практичною складністю реалізації статистичних методів. Зазначені проблеми суттєво ускладнюють створення якісних і точних систем для оцінювання параметрів сигналів. Окрім цього, завдання статистичного оцінювання параметрів істотно ускладнюється при розгляді кореляційних зв’язків негаусових процесів, що призводить до серйозних труднощів алгоритмічної реалізації.

Проведені дослідження за останні роки показують, що альтернативним і перспективним рішенням зазначених проблем є використання моментних і кумулянтних функцій вищих порядків [6-9], що дозволяє забезпечити опис статистичних властивостей негаусових корельованих випадкових процесів [8-12].

Розв’язання задачі оцінювання параметрів сигналів при взаємодії з негаусовими корельованими завадами потребує теоретичних і практичних досліджень, пов'язаних з вивченням багатовимірних моментно-кумулянтних функцій вищих порядків та їх використання для побудови і аналізу ефективних методів статистичного оцінювання параметрів сигналів.

Метою роботи є побудова моделей та методів статистичного оцінювання параметра постійних сигналів, що приймаються на фоні негаусових корельованих завад, при використанні моментних і кумулянтних функцій вищих порядків для синтезу алгоритмів і комп'ютерних засобів побудови систем обробки сигналів.

Використання моментно-кумулянтних функцій для побудови моделей негаусових ексцесних корельованих випадкових процесів. Для вирішення поставленого завдання запропоновані нові моделі негаусових корельованих випадкових процесів на основі використання одновимірних і багатовимірних моментно-кумулянтних функцій вищих порядків, що дозволило не тільки описати негаусовий розподіл досліджуваних процесів, але і їх кореляційні властивості. Такий підхід дозволив використовувати такі параметри моментно-кумулянтного опису, як коефіцієнти асиметрії (γ_3), ексцесу (γ_4) і ін., які відмінні від нуля в припущенні негаусових моделей досліджуваних випадкових процесів. Для розгляду кореляційних зв'язків негаусових процесів використаємо двовимірні моменти m_{ij} і кумулянти χ_{ij}, які представлені у вигляді [6]:

$$m_{11} = \chi_{11},\ m_{12} = \chi_{12},\ m_{13} = \chi_{13} + 3\chi_2\chi_{11},$$

$$m_{22} = \chi_{22} + \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2,\ m_{23} = \chi_{23} + \chi_2\chi_3 + 6\chi_{11}\chi_{12} + 3\chi_2\chi_{12}, \dots,$$

які при відсутності кореляційної залежності перетворюються в одномірне представлення випадкового процесу.

Аналіз статистичних двовимірних зв'язків представлений у вигляді таблиці 1, в якій представлений опис характеристик випадкової величини.

Таблиця 1

Двовимірні спільні кумулянти та їх порядок

Порядок спільних кумулянтів	**Позначення двовимірних спільних кумулянтів**					
1	χ_{10}	χ_{01}				
2	χ_{20}	χ_{11}	χ_{02}			
3	χ_{30}	χ_{12}	χ_{21}	χ_{03}		
4	χ_{40}	χ_{31}	χ_{22}	χ_{13}	χ_{04}	
…	…	…	…	…	…	…

Достатньою умовою кореляційної незалежності випадкових процесів є рівність нулю всіх спільних кумулянтів χ_{ij}.

На основі представлених спільних кумулянтів виділимо певні класи випадкових величин. Спільні кумулянти для двовимірного гаусового розподілу представлені в таблиці 2. Відмінними від нуля є кумулянти першого і другого порядків. В цьому випадку випадкова величина характеризується тільки статистичним зв'язком першого порядку або кореляцією. При використанні спільних кумулянтів вищих порядків з'являється можливість опису статистично залежних негаусових випадкових величин.

Таблиця 2

Представлення двовимірних спільних кумулянтів для гаусового розподілу

Порядок спільних кумулянтів	**Позначення двовимірних спільних кумулянтів**					
1	χ_{10}	χ_{01}				
2	χ_{20}	χ_{11}	χ_{02}			
3						
4						
…	…	…	…	…	…	…

Визначення 1. Гаусовими статистично залежними випадковими величинами будемо називати такі, для яких відмінними від нуля будуть одновимірний χ_2 і спільний χ_{11} кумулянти другого порядку, а всі інші кумулянти третього і вище порядків, а також спільні кумулянти вище другого порядку дорівнюють нулю. В цьому випадку початкові моменти до шостого порядку мають вигляд:

$$\alpha_1 = \chi_1,\ \ \alpha_2 = \chi_2,\ \ \alpha_3 = 0,\ \ \alpha_4 = 3\chi_2^2,\ \ \alpha_5 = 0,\ \ \alpha_6 = 15\chi_2^3, \ldots,$$

а спільні моменти мають наступний взаємозв'язок зі спільними кумулянтами:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot r^{(v,k)},\ \ m_{12} = \chi_{12} = 0\,,$$

$$m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 + 2\chi_{11}^2 = \chi_2^2\left(1 + 2r^{(v,k)^2}\right), \ldots,$$

де $r^{(v,k)}$ — кореляційна функція заданого виду між v-м і k-м вибірковим значенням. Зокрема, кореляційні функції можуть мати вид:

$$r_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|},\ \ r_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\cos\beta\tau\,,$$

$$r_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{A}{\beta}\sin\beta\,|\,\tau\,|\right),$$

де $\tau = | t_v - t_k |$ — кореляційний інтервал, який при врахуванні статистичних зв’язків менше інтервалу кореляції $\tau = | t_v - t_k | \le \tau_{кор}$, $v, k = \overline{1, n}$; $\tau_{кор}$ — час кореляції; $\sigma^2 = r_\xi(0)$ — дисперсія випадкового процесу; $1/A > 0$ — коефіцієнт, який характеризує статистичний зв'язок між вибірковими значеннями.

В роботі проводиться дослідження нелінійних методів оцінювання параметра постійного сигналу, що приймається на фоні негаусових корельованих завад, які описуються коефіцієнтом ексцесу. Даний клас досліджуваного випадкового процесу представлений в таблиці 3.

Таблиця 3

Представлення двовимірних спільних кумулянтів для ексцесної негаусової корельованої величини

Порядок спільних кумулянтів	**Позначення двовимірних спільних кумулянтів**					
1	χ_{10}	χ_{01}				
2	χ_{20}	χ_{11}	χ_{02}			
3		χ_{12}	χ_{21}			
4	χ_{40}	χ_{31}	χ_{22}	χ_{13}	χ_{04}	
…	…	…	…	…	…	…

Визначення 2. Ексцесними статистично залежними випадковими величинами 1-го типу 1-го виду будемо називати такі, для яких відмінними від нуля будуть χ_2 і χ_4, а також спільні кумулянти χ_{11}, χ_{13} і χ_{22}, а всі інші кумулянти третього і вище четвертого порядків, а також спільні кумулянти вище четвертого порядку дорівнюють нулю. У цьому випадку початкові моменти до шостого порядку мають вигляд:

$$\alpha_1 = \chi_1, \ \ \alpha_2 = \chi_2, \ \ \alpha_3 = 0, \ \ \alpha_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2, \ \ \alpha_5 = 0,$$

$$\alpha_6 = 15\chi_2\chi_4 + 15\chi_2^3, \ldots,$$

а спільні моменти мають наступний взаємозв'язок зі спільними кумулянтами:

$$m_{11}^{(v,k)} = \chi_{11} = \chi_2 \cdot r^{(v,k)}, \ \ m_{12}^{(v,k)} = \chi_{12} = 0, \ \ m_{13}^{(v,k)} = \gamma_4 \chi_{11}^2 + 3\chi_2\chi_{11}$$

$$m_{22}^{(v,k)} = \chi_2^2 \left(\gamma_4 r^{(v,k)^2} + 1 + 2r^{(v,k)^2} \right), \ldots .$$

На основі представлених моментно-кумулянтних моделей корельованих негаусових процесів синтезовані нові методи статистичного оцінювання параметра постійного сигналу при використанні адаптованого методу максимізації полінома (АММП).

Поліноміальні методи оцінювання параметра сигналу на фоні корельованих негаусових завад. Розглянемо найбільш розповсюджену адитивну модель $\xi(t)$ взаємодії досліджуваного постійного сигналу $S(\vartheta)$, що залежить від параметра ϑ, і стаціонарної негаусової корельованої завади $\eta(t)$:

$$\xi(t) = S(\vartheta) + \eta(t) .$$

Для побудови поліноміальних методів оцінювання представимо моментно-кумулянтну модель досліджуваного процесу у вигляді одномоментних і двомоментних кумулянтних функцій:

$$\chi_2 ,\ \chi_4 ,\ \chi_2(0,\tau) ,\ \chi_4(0,0,0,\tau) .$$

Нехай з прийнятого сигналу $\xi(t)$ досліджується статистично залежна і однаково розподілена вибірка $\vec{x} = \{x_1, x_2, ...x_n\}$ обсягом n: $x_v = S_\vartheta + \eta_v$, де для стислості використаємо позначення $S_\vartheta = S(\vartheta)$. За результатами статистичної обробки даних необхідно отримати результат оцінювання параметра постійного сигналу ϑ за умови, що інші параметри відомі (дисперсія завади, інші кумулянти, кореляційна функція та її параметри).

Для вирішення даного завдання використовуємо адаптований метод максимізації полінома на випадок статистично залежних вибіркових значень [12], згідно з яким досліджувані процеси можна представити у вигляді стохастичних поліномів степеня s [8, 9] при використанні спільних моментів і кумулянтів. В цьому випадку оцінка параметра ϑ буде знаходитися з рішення рівняння:

$$\sum_{i=1}^{s} h_{i(v,k)}\left[\vartheta\right]\sum_{v=1}^{n}\left(\xi_{(v)}^{i} - \alpha_i\left[\vartheta\right]\right)\Bigg|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = 0 ,\ v,k = \overline{1,n} , \qquad (1)$$

де $\xi_{(v)}$ — статистично залежні і однаково розподілені випадкові величини, взяті в моменти часу v, $\alpha_i\left[\vartheta\right]$ — початкові моменти i-го порядку, які залежать від параметра ϑ; $h_{i(v,k)}\left[\vartheta\right]$ — коефіцієнти, які залежать від параметра ϑ і спільних кумулянтів, які, в свою чергу, залежать від функції кореляції $r_\xi(\tau)$, $\tau = |v-k|$. Невідомі коефіцієнти (1) знаходяться з рішення системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{s} h_{i(v,k)}\left[\vartheta\right] K_{i,j}\left(\tau,\vartheta\right) = \frac{d}{d\vartheta}\alpha_i\left(\vartheta\right) ,\ i = \overline{1,s} ,\ v,k = \overline{1,n} , \qquad (2)$$

де $K_{i,j}\left(\tau,\vartheta\right) = E\left\{\left[\xi_v^i - \alpha_i\right]\left[\xi_k^j - \alpha_j\right]\right\} = E\left[\xi_v^i \xi_k^j\right] - \alpha_i\alpha_j$.

Відзначимо, що корелянти $K_{i,j}(\tau,\vartheta)$ залежать як від одновимірних початкових моментів α_i порядку i, так і від спільних двовимірних моментів $E\left[\xi_v^i \xi_k^j\right]$. В цьому випадку є можливість представити статистичні зв'язки корельованих негаусових процесів.

Ефективність синтезованих алгоритмів зіставляється з кількістю добутої інформації про оцінювання параметра ϑ, яке в загальному випадку має вид [8, 9]:

$$I_{sn}(\vartheta)=\sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} h_{i(v,k)}[\vartheta]\frac{d}{d\vartheta}\alpha_i(\vartheta)=\frac{1}{\sigma^2_{(\vartheta)s}},\ k=\overline{1,n} \qquad (3)$$

і обернено пропорційно дисперсії оцінки.

На основі використання представлених моделей негаусових корельованих випадкових процесів, використання нового адаптованого методу максимізації полінома, синтезовані нелінійні алгоритми оцінювання параметра ϑ постійного сигналу, що приймається на фоні корельованих негаусових завад.

Результати дослідження та обговорення. Розглянемо синтез і аналіз поліноміальних алгоритмів оцінювання параметра ϑ постійного сигналу $S(\vartheta)$ при різних степенях полінома s. Для статистичного опису досліджуваного негаусового процесу наведемо початкові одномірні моменти до 6-го порядку:

$$\alpha_1=0,\ \ \alpha_2=\chi_2,\ \ \alpha_3=\chi_2^{3/2}\gamma_3,$$
$$\alpha_4=\chi_2^2(\gamma_4+3),\ \ \chi_4\ \ \alpha_6=15(\chi_2\gamma_4+\chi_2^3),$$

а також спільні двовимірні моменти, які характеризують статистичні кореляційні зв'язки випадкового процесу:

$$\alpha_2(0,\tau)=\chi_2(0,\tau),\ \ \alpha_3(0,\tau,\tau)=0,$$
$$\alpha_4(0,\tau,\tau,\tau)=\chi_4(0,\tau,\tau,\tau)+3\chi_2\cdot\chi_2(0,\tau),$$
$$\alpha_4(0,0,\tau,\tau)=\chi_4(0,0,\tau,\tau)+\chi_2^2+2\chi_2^2\cdot(0,\tau)\ .$$

Для розглянутої адитивної суміші постійного сигналу S_ϑ та негаусової завади моменти одномоментного розподілу до 6-го порядку будуть мати вигляд:

$$m_1=S_\vartheta,\ \ m_2=\chi_2+S_\vartheta^2,\ \ m_3=3\chi_2S_\vartheta+S_\vartheta^3+\gamma_3\chi_2^{3/2},$$
$$m_4=3\chi_2^2+6\chi_2S_\vartheta^2+S_\vartheta^4+\gamma_4\chi_2^2+4S_\vartheta\gamma_3\chi_2^{3/2},$$
$$m_5=S_\vartheta^5+10S_\vartheta^3\chi_2+5S_\vartheta(3+\gamma_4)\chi_2^2,$$
$$m_6=S_\vartheta^6+15S_\vartheta^4\chi_2+15S_\vartheta^2(3+\gamma_4)\chi_2^2+15\left(1+\gamma_4^2\right)\chi_2^3,$$

а моменти двовимірного розподілу запишуться як:

$$m_{11} = S_\vartheta{}^2 + \chi_2 r^{(v,k)}, \quad m_{12} = S_\vartheta{}^3 + S_\vartheta \chi_2 + 2S_\vartheta \chi_2 r^{(v,k)} + \gamma_3 \chi_2^{3/2} r^{(v,k)3/2} \quad ,$$

$$m_{22} = S_\vartheta{}^4 + 2S_\vartheta{}^2 \chi_2 + 4S_\vartheta{}^2 \chi_2 r^{(v,k)} + \chi_2^2 \left(\gamma_4 r^{(v,k)^2} + 1 + 2r^{(v,k)^2} \right) + 4\gamma_3 \chi_2^{3/2} .$$

Корелянти $K_{i,j}(\tau, \vartheta)$ двовимірного випадкового процесу $\xi(t)$ приймуть вид:

$$K_{1,1}(0, \tau, \vartheta) = m_{11} - m_1 m_2 = \chi_2 r_\xi(\tau) ,$$

$$K_{1,2}(0, \tau, \tau, \vartheta) = m_{12} - m_1 m_2 = 2S_\vartheta \chi_2 r^{(v,k)} + \gamma_3 \chi_2^{3/2} r^{(v,k)3/2},$$

$$K_{2,2}(0, 0, \tau, \tau, \vartheta) = m_{22} - m_2 m_2 = 4S_\vartheta{}^2 \chi_2 r^{(v,k)} +$$

$$+4S_\vartheta \gamma_3 \chi_2^{3/2} r^{(v,k)3/2} + \gamma_4 \chi_2^2 r^{(v,k)^2} + 2\chi_2^2 r^{(v,k)^2} + \chi_2^2 ,$$

де коефіцієнт асиметрії γ_3 дорівнює нулю.

При розгляді випадку, коли кореляційні зв'язки відсутні між вибірковими значеннями, корелянти будуть вигляд:

$$K_{1,1} = \chi_2 , \; K_{1,2} = 2\chi_2 S_\vartheta , \; K_{2,2} = 4S_\vartheta{}^2 \chi_2 + \chi_2^2 (\gamma_4 + 2) .$$

Для оцінювання невідомого параметра ϑ використаємо адаптований метод максимізації полінома (1), де невідомі коефіцієнти $h_{i(v,k)}[\vartheta]$ будуть визначатися з рішення системи рівнянь (2). Для вирішення такої системи рівнянь скористаємося методом Крамера і формулами Шура:

$$h_{i(v,k)}[\vartheta] = \frac{\Delta_{is}(\vartheta)}{\Delta_s(\vartheta)} , \; i = \overline{1, s} ,$$

де $\Delta_s(\vartheta) = \det \left\| K_{i,j}(\tau, \vartheta) \right\|$ — визначник матриці розмірності s, елементами якої є центральні корелянти корельованого випадкового процесу; $\Delta_{is}(\vartheta)$ — визначник, отриманий з $\Delta_s(\vartheta)$ при заміні i-го стовпця стовпцем, що складається з вільних членів системи рівнянь.

Показано, що при степені полінома s = 1 оцінка параметра ϑ постійного сигналу знаходиться з рівняння (1) і має вигляд:

$$\sum_{v=1}^{n} h_{1(v,k)}[\vartheta] \left(\xi_{(v)} - S_\vartheta \right) \Big|_{S_\vartheta = \hat{S}_\vartheta} = 0 , \; k = \overline{1, n} . \tag{4}$$

Тоді коефіцієнт $h_{1(v,k)}[\vartheta]$ в рівнянні (4) прийме вид:

$$h_{1(v,k)}[\vartheta] = \frac{A_v(\vartheta)}{\det \left| K_{1,1}(\tau, \vartheta) \right|} , \; v, k = \overline{1, n} , \tag{5}$$

де $A_v(\vartheta)$ — визначник, який отриманий з визначника $\det\left|K_{1,1}(\tau,\vartheta)\right|$ при заміні v -го стовпця іншим стовпцем, який складається з вільних членів (правої частині) системи рівнянь (2).

Відзначимо, що корелянти $K_{1,1}(\tau,\vartheta)$ досліджуваного процесу характеризують статистичні зв'язки між вибірковими значеннями в задані моменти часу (v,k) і можуть бути представлені у вигляді кореляційної матриці. Для експоненційної кореляційної залежності корелянти $K_{1,1}(\tau,\vartheta)$ запишуться у вигляді:

$$K_{1,1}(\tau,\vartheta)=\sigma^2\begin{vmatrix} 1 & e^{-A} & \dots & e^{-A(n-1)} \\ e^{-A} & 1 & \dots & e^{-A(n-2)} \\ . & . & . & . \\ e^{-A(n-1)} & e^{-A(n-2)} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

де σ^2 — дисперсія досліджуваного випадкового процесу.

Тоді лінійне рівняння максимізації полінома (4) при степені $s = 1$ при використанні коефіцієнта $h_{1(v,k)}[\vartheta]$ (5) запишеться як:

$$\hat{S}_\vartheta=\frac{\sum_{v=1}^{n}A_v(\vartheta)x_v}{\sum_{v=1}^{n}A_v(\vartheta)}. \tag{6}$$

При відсутності статистичних зв’язків між вибірковими значеннями оцінка параметра $\hat{S}_\vartheta$ (6) прийме добре відомий вид [8, 9]:

$$\hat{S}_\vartheta=\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n}x_v .$$

Для оцінювання ефективності отриманої оцінки $\hat{S}_\vartheta$ використаємо такий параметр, як кількість добутої інформації (3), який є зворотною величиною дисперсії оцінки:

$$I_{1n}(\vartheta)=\sum_{v=1}^{n}h_{1(v,k)}[\vartheta]=\frac{A_v(\vartheta)}{\det\left|K_{1,1}(\tau,\vartheta)\right|}. \tag{7}$$

Видно, що отриманий результат оцінювання (6) не враховує параметри негаусового розподілу досліджуваного процесу. Це пов'язано з тим, що для опису самого випадкового процесу використовуються тільки перші два початкових моменту, які характеризуються математичним сподіванням і дисперсією. Для опису інших параметрів негаусових корельованих процесів збільшимо степінь полінома до $s = 2$. Для знаходження оцінки параметра $\hat{S}_\vartheta$ використаємо рівняння максимізації полінома (1), в якому невідомі коефіцієнти, згідно (2), приймуть вигляд:

$$h_{1(v,k)}\left[\vartheta\right]=\frac{\Delta_{12}(\vartheta)}{\Delta(\vartheta)},\ h_{2(v,k)}\left[\vartheta\right]=\frac{\Delta_{22}(\vartheta)}{\Delta(\vartheta)},$$

де $\Delta(\vartheta)=\det\begin{Vmatrix} K_{1,1}\left(0,\tau,\vartheta\right) & K_{1,2}\left(0,\tau,\tau,\vartheta\right) \\ K_{2,1}\left(0,\tau,\tau,\vartheta\right) & K_{2,2}\left(0,0,\tau,\tau,\vartheta\right) \end{Vmatrix}$,

а $\Delta_{12}(\vartheta)$, $\Delta_{22}(\vartheta)$ — отримані з $\Delta(\vartheta)$ при заміні відповідного стовпця правою частиною (2), тобто $\frac{d}{d\vartheta}m_1\left(\vartheta\right)$, $\frac{d}{d\vartheta}m_2\left(\vartheta\right)$ відповідно.

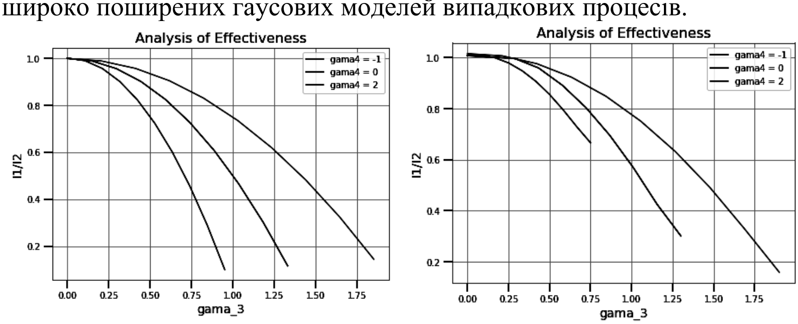
При підстановці отриманого коефіцієнта в рівняння (1) отримаємо нелінійне рівняння максимізації полінома для визначення оцінки параметра $\hat{S}_\vartheta$. Для кількісного аналізу ефективності оцінювання невідомого параметра постійного сигналу при різних степенях полінома використаємо значення $I_{sn}\left(\vartheta\right)$ (3), яке є зворотною величиною дисперсії оцінки $\sigma^2_{(\vartheta)s}$. При використанні стохастичних поліномів степеня $s=1$ і $s=2$ відношення дисперсій оцінок набуде вигляду:

$$g(\vartheta)=\frac{\sigma^2_{(\vartheta)2n}}{\sigma^2_{(\vartheta)1n}}=\frac{I_{1n}\left(\vartheta\right)}{I_{2n}\left(\vartheta\right)},$$

і чим менше це відношення, тим точніше результат оцінювання у порівнянні з добре відомим результатом при степені $s=1$.

На рис. 1 наведені результати, які показують ефективність нелінійного оцінювання параметра постійного сигналу (при степені полінома $s=2$) у порівнянні з лінійним оцінюванням (при степені полінома $s=1$) при взаємодії з асиметрично-ексцесними корельованими негаусовими завадами.

Відзначимо, що оцінка $\hat{S}_\vartheta$ (6) при степені полінома $s=1$ не враховує негаусовий характер досліджуваного випадкового процесу і її ефективність визначається виразом (7). При використанні степеня полінома $s=2$ є можливість врахувати параметри негаусового розподілу досліджуваного процесу у вигляді кумулянтних функцій вищих порядків, а саме коефіцієнтів асиметрії γ_3 та ексцесу γ_4, а також двовимірних спільних моментів, які описують статистичні залежності. На рис. 1 наведені порівняльні результати відношення I_1/I_2 від параметрів негаусової завади і коефіцієнта кореляції A = 10,1. З графіків видно, що з ростом значення коефіцієнта γ_3 кількість добутої інформації I_2 у порівнянні з I_1 зростає, що еквівалентно підвищенню точності оцінювання у вигляді зменшення дисперсії оцінки. При наявності слабких статистичних зв'язків (велике значення коефіцієнта A = 10) результат ефективності оцінювання буде збігатися з добре вивченими властивостями, представленими в [8, 9]. При наявності сильних статистичних зв'язків між вибірковими значеннями (мале значення коефіцієнта A = 1 для функції $r_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$) спостерігається збільшення дисперсії оцінки, і отже, зменшення ефективності оцінювання. У будь-якому випадку, результат нелінійного оцінювання невідомого параметра $\hat{S}_{\vartheta}$ є більш ефективним у порівнянні з лінійним, який збігається з добре відомим результатом при розгляді широко поширених гаусових моделей випадкових процесів.



A = 10 A = 1

Рис. 1. *Відношення кількості добутої інформації про оцінюваний параметр постійного сигналу (при різних степенях полінома) від коефіцієнтів асиметрії (gama_3), ексцесу (gama_4) та коефіцієнта кореляції (A=10, 1) для експоненційної кореляційної функції* $r_{\xi}(\tau) = \sigma^2 e^{-A|\tau|}$

Висновки. Застосування альтернативного підходу до опису досліджуваних випадкових процесів у вигляді моментно-кумулянтних функцій вищих порядків дозволило представити нові методи оцінювання невідомого параметра постійного сигналу, що приймається на фоні корельованих негаусових завад при використанні адаптованого методу максимізації полінома. Запропонований підхід враховує негаусовий розподіл досліджуваного випадкового процесу і кореляційні зв'язки вибіркових значень, що дозволяє підвищити точність результатів оцінювання у порівнянні з добре відомими у вигляді зменшення дисперсії оцінки. Ефективність отриманих результатів буде залежати як від використання апріорної інформації про досліджуваний процес (кумулянті функції вищих порядків), так і від параметрів, які характеризують кореляційні зв'язки вибіркових значень.

Список використаних джерел:

1. Trees H. L.Van, Bell K. L., Tiany Z. Detection Estimation and Modulation Theory, 2nd edition, Part I, Detection, Estimation, and Filtering Theory. New York: John Wiley & Sons, 2013.
2. Tuzlukov V. P. Signal Processing Noise. Boca Raton: CRC Press LLC, 2002.
3. Barkat Mourad. Signal Detection and Estimation. Boston: Artech House, 2005.
4. Middleton D. Non-Gaussian Statistical Communication Theory. New Jersey: Jonn Willey & Sons, 2012.
5. Huihong Zhao, Chenghui Zhang. Non-Gaussian noise quadratic estimation for linear discrete-time time-varying systems. *Neurocomputing.* 2016. Vol. 174(B). P. 921-927.
6. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовских процессов и их преобразований. Москва: Сов. радио, 1979. 376 с.
7. Nandi A. K. Blind Estimation Using Higher-Order Statistics. New York, Springer-Verlag, 1999.
8. Kunchenko Y. P. Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random variables. Aachen: Shaker Verlag, 2002. 396 p.
9. Кунченко Ю. П. Стохастические полиномы. Киев: Наук. думка, 2006. 275 с.
10. Palahin V., Palahina O., Filipov V., Leleko S., Ivchenko A. Modeling of Joint Signal Detection and Parameter Estimation on Background of Non-Gaussian Noise. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics.* 2015. Vol. 14 (3). P. 87-94.
11. Palahin V., Juhár J. Joint Signal parameters estimation in non-Gaussian noise by the method of polynomial maximization. *Journal of Electrical Engineering.* 2016. Vol. 67 (2016). № 3. P. 217-221.
12. Vokorokos L., Marchevský S., Ivchenko A., Palahina E., Palahin V.. Parameters Estimation of Correlated non-Gaussian processes by the Method of Polynomial Maximization. *Submitted to IET Signal Processing.* 2016. P. 313-319.

METHODS FOR STATISTICAL SIGNAL PARAMETERS ESTIMATION IN NON-GAUSSIAN CORRELATED NOISE

The traditional approach to the development of systems for signal parameters estimation in non-Gaussian noise is characterized by significant difficulties associated with the complexity of algorithmic implementation, which makes it impossible to synthesize high-quality software-algorithmic and hardware statistical signal processing. At the same time, the presence of a statistical relationship between the studied sample non-Gaussian random variables leads to a significant complication of the implementation of computational algorithms. Analysis of scientific research in recent years has shown that to solve problems of estimating unknown parameters of signals in non-Gaussian noise there is another promising approach, which is based on the use of numerical characteristics to describe random processes, namely moment and cumulant functions of higher orders. This allows us to describe the statistical properties of the studied non-Gaussian processes with the necessary approximation.

The paper proposes new mathematical models of additive interaction of useful signal and correlated non-Gaussian noise based on the use of one-moment and two-moment cumulative functions of higher orders, which made it possible to describe the parameters and characteristics of non-Gaussian distribution of the studied random process and take into account correlations for the synthesis of algorithms for estimating unknown parameters.

Based on the obtained moments and cumulant models of random correlated non-Gaussian processes, polynomial stochastic methods for estimation an unknown parameter of a constant signal for dependent sample values are proposed. This allowed the synthesis of computational algorithms for processing non-Gaussian correlated processes. Based on the proposed methods, the synthesis and analysis of polynomial computational algorithms for the parameter estimation of the useful signal with better accuracy characteristics in the form of reducing the variance of the estimate compared to the known results due to additional information about the studied processes in the form of moment and cumulant functions.

Key words: *the moment and cumulant functions of higher orders; the method of polynomial maximization; correlated non-Gaussian processes.*

Отримано: 6.10.2021