

УДК 519.6

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.5-20

**М. В. Бойчура**, канд. техн. наук,

**А. Я. Бомба**, д-р техн. наук, професор,

**О. Р. Мічута**, канд. техн. наук

Національний університет водного господарства  
та природокористування, м. Рівне

## **ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ЗГЛАДЖЕННЯ НЕГЛАДКОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЧИСЛОВИМИ МЕТОДАМИ КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ**

Сформульовано задачу моделювання руху частинок (зарядів, рідини тощо) в однозв'язній чотирикутній криволінійній області, обмеженій гладкими двома лініями течії та двома еквіпотенціальними лініями. При цьому, якщо останні «стикуються» не під прямим кутом і відповідне середовище є ізотропним, то, згідно методу квазіконформних відображень, матимуть місце сингулярності в околах рівно чотирьох точок границі. З метою уникнення даних особливостей, запропоновано підхід до апроксимації межі досліджуваної області (кубічними бісплайнами) із застосуванням спеціально розробленої процедури «фіктивної ортогоналізації». Сформульовано відповідну пряму та обернену задачі на квазіконформні відображення. При цьому, пропонуються (для порівняння) два способи формування ортогональності на гладких ділянках границі (за допомогою деяких «дво-» та «п'ятиточкової» схем; наведено відповідні різницеві задачі та алгоритми їх розв'язання). Запропоновано підхід до оцінки точності виконання властивостей квазіконформності, окремо обчислюючи усереднені нев'язку ортогональності та узагальнену нев'язку відношення довжин суміжних відрізків в малому. Проведено числові експерименти та здійснено їх аналіз. Зокрема, розподіли обох видів нев'язок і кількість вузлів, в яких мають місце особливості при різних розбиттях сіток, проілюстровано на графіках. Як і очікувалось, «фіктивна ортогоналізація» при достатньо «густій» дискретизації забезпечує можливість вирішення проблеми сингулярності у точках «стику» граничних ліній течії та еквіпотенціальних ліній, сприяє підвищенню точності квазіконформних відображень та збільшенню «прозорості» ходу розв'язання відповідної задачі. Також, як і очікувалось, «п'ятиточкова» схема «забезпечення ортогональності» на гладких лініях границі, показала більшу ефективність в порівнянні з «двоточковою».

У якості перспективи подальшого застосування розробленої процедури «фіктивної ортогоналізації» описано механізм її адаптації на прикладі задач електричної томографії.

**Ключові слова:** математичне моделювання, нелінійні задачі, квазіконформні відображення, числові методи.

**Вступ.** Як правило [1-5], в основу математичних моделей фільтрації рідин, руху зарядів покладають закон Дарсі, Ома тощо  $\vec{v} = \kappa \text{grad } \varphi$ , де  $\vec{v} = \vec{v}(x, y)$  — це вектор швидкості (густини струму),  $\varphi = \varphi(x, y)$  — квазіпотенціал, а  $\kappa = \kappa(x, y, \varphi, \text{grad } \varphi, \dots)$  — коефіцієнт фільтрації (електричної провідності). Застосувавши припущення, що  $\text{div } \vec{v} = 0$  приходять до задач еліптичного типу. При цьому, при проведенні досліджень в однозв'язних криволінійних областях (рис. 1, а) із границями виду  $\partial G_z = \{z = x + iy : x = \tilde{x}(\tau), y = \tilde{y}(\tau), \tau \in [0, 1], \tilde{x}(0) = \tilde{x}(1) = \tilde{x}_0, \tilde{y}(0) = \tilde{y}(1) = \tilde{y}_0, \text{ де } \tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau) \text{ — визначені неперервно диференційовані функції, } O(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \text{ — задана точка відліку} \}$  та при відсутності анізотропії, крайові умови зазвичай задаються у вигляді [1-3]:  $\varphi|_{AB} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{CD} = \varphi^*$ ,  $\varphi'_n|_{DA \cup BC} = 0$ . Тут  $A, B, C, D$  — відмічені точки на  $\partial G_z$ ;  $DA, BC$  — лінії течії;  $AB, CD$  — екіпотенціали;  $\vec{n}$  — вектор нормалі до відповідної кривої. При вказаних припущеннях, як відомо [1], можливим є введення квазігармонічної функції течії  $\psi = \psi(x, y)$ , комплексно спряженої до  $\varphi = \varphi(x, y)$ . Тоді вихідна задача запишеться наступним чином:

$$\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*; \quad (2)$$

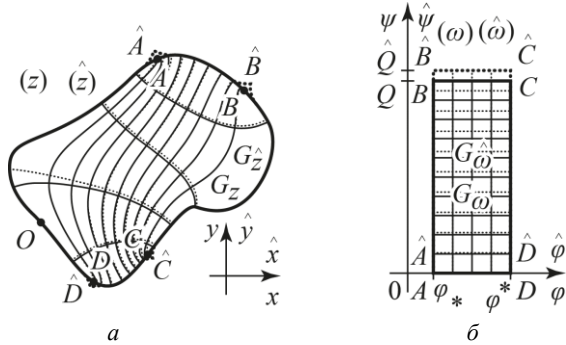
$$\psi|_{DA} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (3)$$

де  $Q = \int_{AB} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl$  — невідомий параметр (повна фільтраційна витрата),

$dl$  — елемент дуги кривої  $AB$ ,  $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$  — область комплексного квазіпотенціалу для  $G_z$  (рис. 1, б).

Очевидно, що в області, зображеній на рис. 1, а, неможливо забезпечити виконання умов (1) (ортогоналізуючу їх складову [1]) рівно у чотирьох точках:  $A, B, C, D$ . З іншого боку, з роботи [6] слідує, що сингулярності, які виникають при розв'язанні відповідної задачі (1)-(3) є локалізованими, і що це запобігає суттєвому поширенню відповідних похибок на віддалені території. Проте, у багатьох випадках ідентифікації, дані особливості можуть мати відчутний негативний вплив на отримувані результати. Наприклад, це стосується

використання апріорної інформації в певних околах таких точок. У галузі електричної томографії, окрім цього, дослідники здійснюють ще й низку усереднень, використовують методи регуляризації, певним чином намагаються враховувати «шум» у вхідних даних, ігнорують особливості у точках виду  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  тощо [4]. Відповідні похибки взаємодоповнюються, через що, як правило, отримувани розв'язки є досить низької якості (роздільної здатності).



**Рис. 1.** Фізична область (а) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (б); штрихами позначено лінії, що схематично відповідають ФО зображенням

У роботі [1] для забезпечення виконання умов виду (1) в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  користуються прийомами умовного розрізування досліджуваної області. Проте вони підходять лише для окремих випадків задання крайових умов, структур об'єктів і середовищ (відмінних від (2), (3) та рис. 1, а). Тому загалом проблема залишається відкритою.

**Метою роботи** є реалізація механізму підвищення точності квазіконформних відображень в точках «стику» граничних ліній течії та еквіпотенціальних ліній (а, отже, й в області загалом [6]) із розробленням спеціальної процедури «фіктивної ортогоналізації» (ФО). При наближеному розв'язанні відповідних задач важливою є ще й оцінка впливу «густини» розбиття відповідних гідродинамічних сіток і способу формування ортогональності вздовж границі області на величини нев'язок квазіконформності.

**Підхід до вирішення проблеми неортогональності у точках «стику» граничних ліній течії та еквіпотенціальних ліній.** Застосування подібного до [1] прийому умовних розрізів в області виду рис. 1, а при умовах (2) та (3) є недоцільним, оскільки накладатимуться певні обмеження на можливі траєкторії руху частинок. Замість цього ми пропонуємо застосовувати алгоритм ФО, який описано нижче. Він передбачає внесення певних невеликих збурень форми

вихідної області таким чином, щоб граничні лінії течії та еквіпотенціальні лінії «стикувались» під прямими кутами.

ФО здійснюватимемо стосовно областей, границі яких визначаються функціями  $x = \tilde{x}(\tau)$  та  $y = \tilde{y}(\tau)$  при параметрах  $\tau = \tau_A$ ,  $\tau = \tau_B$ ,  $\tau = \tau_C$ ,  $\tau = \tau_D$  задання точок  $A, B, C, D \in \partial G_z$ . На відрізках

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \tilde{x}(\{\tau_D + \Delta_D^L\}), \tilde{y}(\{\tau_D + \Delta_D^L\}) \right), \left( \tilde{x}(\{1 + \tau_A - \Delta_A^R\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_A - \Delta_A^R\}) \right) \right], \\ & \left[ \left( \tilde{x}(\{\tau_A + \Delta_A^L\}), \tilde{y}(\{\tau_A + \Delta_A^L\}) \right), \left( \tilde{x}(\{1 + \tau_B - \Delta_B^R\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_B - \Delta_B^R\}) \right) \right], \\ & \left[ \left( \tilde{x}(\{\tau_B + \Delta_B^L\}), \tilde{y}(\{\tau_B + \Delta_B^L\}) \right), \left( \tilde{x}(\{1 + \tau_C - \Delta_C^R\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_C - \Delta_C^R\}) \right) \right], \\ & \left[ \left( \tilde{x}(\{\tau_C + \Delta_C^L\}), \tilde{y}(\{\tau_C + \Delta_C^L\}) \right), \left( \tilde{x}(\{1 + \tau_D - \Delta_D^R\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_D - \Delta_D^R\}) \right) \right] \end{aligned}$$

шляхом інтерполяції (наприклад, за допомогою методу найменших квадратів) фрагментів  $\partial G_z$  будемо кубічні бісплайни [7]

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{D}\hat{A}}-1} x_k^{\hat{D}\hat{A}} b_{k,3}^{\hat{D}\hat{A}}(\tau), & y &= \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{D}\hat{A}}-1} y_k^{\hat{D}\hat{A}} b_{k,3}^{\hat{D}\hat{A}}(\tau), \\ x &= \tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{A}\hat{B}}-1} x_k^{\hat{A}\hat{B}} b_{k,3}^{\hat{A}\hat{B}}(\tau), & y &= \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{A}\hat{B}}-1} y_k^{\hat{A}\hat{B}} b_{k,3}^{\hat{A}\hat{B}}(\tau), \\ x &= \tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{B}\hat{C}}-1} x_k^{\hat{B}\hat{C}} b_{k,3}^{\hat{B}\hat{C}}(\tau), & y &= \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{B}\hat{C}}-1} y_k^{\hat{B}\hat{C}} b_{k,3}^{\hat{B}\hat{C}}(\tau), \\ x &= \tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{C}\hat{D}}-1} x_k^{\hat{C}\hat{D}} b_{k,3}^{\hat{C}\hat{D}}(\tau), & y &= \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{\approx}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^{\hat{C}\hat{D}}-1} y_k^{\hat{C}\hat{D}} b_{k,3}^{\hat{C}\hat{D}}(\tau) \end{aligned}$$

за даними координатами  $(\tilde{x}(\tau_k^{DA}), \tilde{y}(\tau_k^{DA}))$ ,  $(\tilde{x}(\tau_k^{AB}), \tilde{y}(\tau_k^{AB}))$ ,  $(\tilde{x}(\tau_k^{BC}), \tilde{y}(\tau_k^{BC}))$ ,  $(\tilde{x}(\tau_k^{CD}), \tilde{y}(\tau_k^{CD}))$ , відповідно, де

$$\tau_k^{DA} = \{\tau_D + \Delta_D^L + k\{\tau_A - \Delta_A^R - \tau_D - \Delta_D^L\} / n^{DA}\} \quad (k = \overline{0, n^{DA}}),$$

$$\tau_k^{AB} = \{\tau_A + \Delta_A^L + k\{\tau_B - \Delta_B^R - \tau_A - \Delta_A^L\} / n^{AB}\} \quad (k = \overline{0, n^{AB}}),$$

$$\tau_k^{BC} = \{\tau_B + \Delta_B^L + k\{\tau_C - \Delta_C^R - \tau_B - \Delta_B^L\} / n^{BC}\} \quad (k = \overline{0, n^{BC}}),$$

$$\tau_k^{CD} = \{\tau_C + \Delta_C^L + k\{\tau_D - \Delta_D^R - \tau_C - \Delta_C^L\} / n^{CD}\} \quad (k = \overline{0, n^{CD}}),$$

$$b_{k,0}^{MN}(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \tau \notin [\hat{\tau}_k^{MN}, \hat{\tau}_{k+1}^{MN}), \\ 1, & \text{якщо } \tau \in [\hat{\tau}_k^{MN}, \hat{\tau}_{k+1}^{MN}), \end{cases} \quad \hat{\tau}_k^{MN} = 0 \quad (k = \overline{0, 3}),$$

$$\hat{\tau}_{m^{MN}+k}^{MN} = 1 \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \hat{\tau}_k^{MN} = \hat{\tau}_{k-1}^{MN} + (m^{MN} - 3)^{-1} \quad (k = \overline{4, m^{MN}}),$$

$$b_{k,r}^{MN}(\tau) = \frac{\tau - \hat{\tau}_k^{MN}}{\hat{\tau}_{k+r}^{MN} - \hat{\tau}_k^{MN}} b_{k,r-1}^{MN}(\tau) + \frac{\hat{\tau}_{k+r+1}^{MN} - \tau}{\hat{\tau}_{k+r+1}^{MN} - \hat{\tau}_{k+1}^{MN}} b_{k+1,r-1}^{MN}(\tau),$$

а кількості  $m^{\hat{D}\hat{A}}$ ,  $m^{\hat{A}\hat{B}}$ ,  $m^{\hat{B}\hat{C}}$ ,  $m^{\hat{C}\hat{D}}$  контрольних точок  $(x_k^{\hat{D}\hat{A}}, y_k^{\hat{D}\hat{A}})$ ,  $(x_k^{\hat{A}\hat{B}}, y_k^{\hat{A}\hat{B}})$ ,  $(x_k^{\hat{B}\hat{C}}, y_k^{\hat{B}\hat{C}})$ ,  $(x_k^{\hat{C}\hat{D}}, y_k^{\hat{C}\hat{D}})$ , точок дискретизації ділянок границі вихідної області  $n^{DA}$ ,  $n^{AB}$ ,  $n^{BC}$ ,  $n^{CD}$  та «околи»  $\Delta_A^{(p)L}$ ,  $\Delta_A^{(p)R}$ ,  $\Delta_B^{(p)L}$ ,  $\Delta_B^{(p)R}$ ,  $\Delta_C^{(p)L}$ ,  $\Delta_C^{(p)R}$ ,  $\Delta_D^{(p)L}$ ,  $\Delta_D^{(p)R}$  вважаємо заданими. Дово-  
нюємо початки та кінці бісплайнів  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau))$ ,  
 $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau))$  контрольними точками

$$\begin{aligned} &(\tilde{x}(\{\tau_D + 0.5\Delta_D^R\}), \tilde{y}(\{\tau_D + 0.5\Delta_D^R\})), \\ &(\tilde{x}(\{\tau_A + 0.5\Delta_A^R\}), \tilde{y}(\{\tau_A + 0.5\Delta_A^R\})), \\ &(\tilde{x}(\{\tau_B + 0.5\Delta_B^R\}), \tilde{y}(\{\tau_B + 0.5\Delta_B^R\})), \\ &(\tilde{x}(\{\tau_C + 0.5\Delta_C^R\}), \tilde{y}(\{\tau_C + 0.5\Delta_C^R\})) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} &(\tilde{x}(\{1 + \tau_A - 0.5\Delta_A^L\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_A - 0.5\Delta_A^L\})), \\ &(\tilde{x}(\{1 + \tau_B - 0.5\Delta_B^L\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_B - 0.5\Delta_B^L\})), \\ &(\tilde{x}(\{1 + \tau_C - 0.5\Delta_C^L\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_C - 0.5\Delta_C^L\})), \\ &(\tilde{x}(\{1 + \tau_D - 0.5\Delta_D^L\}), \tilde{y}(\{1 + \tau_D - 0.5\Delta_D^L\})), \end{aligned}$$

відповідно. Отримані функції позначимо через  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau))$ ,  
 $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau))$ . Додаємо до  
обох сторін побудованих бісплайнів контрольні точки  $(x_{\hat{A}}, y_{\hat{A}})$ ,  
 $(x_{\hat{B}}, y_{\hat{B}})$ ,  $(x_{\hat{C}}, y_{\hat{C}})$ ,  $(x_{\hat{D}}, y_{\hat{D}})$ , відповідно, на початки  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau))$ ,  
 $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau))$  та кінці  
 $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau))$ ,  
підбираючи значення  $x_{\hat{A}}$ ,  $x_{\hat{B}}$ ,  $x_{\hat{C}}$ ,  $x_{\hat{D}}$  так, щоб утворені таким чи-  
ном функції  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{\sim}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{\sim}(\tau))$ ,  
 $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{\sim}(\tau))$  задовольняли умовам ортогональності:

$$\begin{aligned}\tilde{x}'_{\hat{A}\hat{B}}(0)\tilde{x}'_{\hat{D}\hat{A}}(1) + \tilde{y}'_{\hat{A}\hat{B}}(0)\tilde{y}'_{\hat{D}\hat{A}}(1) &= 0, \\ \tilde{x}'_{\hat{B}\hat{C}}(0)\tilde{x}'_{\hat{A}\hat{B}}(1) + \tilde{y}'_{\hat{B}\hat{C}}(0)\tilde{y}'_{\hat{A}\hat{B}}(1) &= 0, \\ \tilde{x}'_{\hat{C}\hat{D}}(0)\tilde{x}'_{\hat{B}\hat{C}}(1) + \tilde{y}'_{\hat{C}\hat{D}}(0)\tilde{y}'_{\hat{B}\hat{C}}(1) &= 0, \\ \tilde{x}'_{\hat{D}\hat{A}}(0)\tilde{x}'_{\hat{C}\hat{D}}(1) + \tilde{y}'_{\hat{D}\hat{A}}(0)\tilde{y}'_{\hat{C}\hat{D}}(1) &= 0,\end{aligned}$$

де точки  $(x_{\hat{A}}, y_{\hat{A}})$ ,  $(x_{\hat{B}}, y_{\hat{B}})$ ,  $(x_{\hat{C}}, y_{\hat{C}})$ ,  $(x_{\hat{D}}, y_{\hat{D}})$  обираються з боку зовнішньої нормалі до  $\partial G_z$ ,

$$\begin{aligned}y_{\hat{A}} &= 0.5\left(\tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(0) + \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(1)\right) - \left(\tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(0) - \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(1)\right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(x_{\hat{A}} - 0.5\left(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(0) + \tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(1)\right)\right)\left(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(0) - \tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(1)\right), \\ y_{\hat{B}} &= 0.5\left(\tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(0) + \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(1)\right) - \left(\tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(0) - \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(1)\right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(x_{\hat{B}} - 0.5\left(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(0) + \tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(1)\right)\right)\left(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(0) - \tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(1)\right), \\ y_{\hat{C}} &= 0.5\left(\tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(0) + \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(1)\right) - \left(\tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(0) - \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(1)\right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(x_{\hat{C}} - 0.5\left(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(0) + \tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(1)\right)\right)\left(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(0) - \tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(1)\right), \\ y_{\hat{D}} &= 0.5\left(\tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(0) + \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(1)\right) - \left(\tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(0) - \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(1)\right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(x_{\hat{D}} - 0.5\left(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(0) + \tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(1)\right)\right)\left(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(0) - \tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(1)\right).\end{aligned}$$

Утворену таким чином збурену область позначимо через  $G_z$  (рис. 1, а). Для неї постановка задачі матиме аналогічний до (1)-(3) вигляд при заданих квазіпотенціалах  $\varphi_*$  і  $\varphi^*$  на відповідних ділянках  $\hat{A}\hat{B}$  і  $\hat{C}\hat{D}$  та шуканих квазігармонічних комплексно спряжених функціях  $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(x, y)$ ,  $\hat{\psi} = \hat{\psi}(x, y)$  і повній витраті  $\hat{Q}$ . Тут  $G_{\hat{\omega}} = \{\hat{\omega} = \hat{\varphi} + i\hat{\psi} : \varphi_* < \hat{\varphi} < \varphi^*, 0 < \hat{\psi} < \hat{Q}\}$  (рис. 1, б).

Відповідна обернена задача на квазіконформне відображення  $\hat{z} = \hat{z}(\hat{\omega}) = \hat{x}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) + i\hat{y}(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$  при шуканих  $\hat{x} = \hat{x}(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$ ,  $\hat{y} = \hat{y}(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$ , аналогічно до [1], запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \hat{\varphi}} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{\varphi}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{\psi}} \left( \kappa \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{\psi}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\varphi}} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\varphi}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{\psi}} \left( \kappa \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\psi}} \right) &= 0,\end{aligned} \quad (\hat{x}, \hat{y}) \in G_z; \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}(\hat{\phi}, 0) &= \tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(\tau_{\hat{D}\hat{A}}(\hat{\phi})), \quad \hat{y}(\hat{\phi}, 0) = \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(\tau_{\hat{D}\hat{A}}(\hat{\phi})), \\
\hat{x}(\hat{\phi}, \hat{Q}) &= \tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(\tau_{\hat{B}\hat{C}}(\hat{\phi})), \quad \hat{y}(\hat{\phi}, \hat{Q}) = \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(\tau_{\hat{B}\hat{C}}(\hat{\phi})), \quad \hat{\phi} \in [\varphi_*, \varphi^*], \\
\hat{x}(\varphi_*, \hat{\psi}) &= \tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(\tau_{\hat{A}\hat{B}}(\hat{\psi})), \quad \hat{y}(\varphi_*, \hat{\psi}) = \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(\tau_{\hat{A}\hat{B}}(\hat{\psi})), \\
\hat{x}(\varphi^*, \hat{\psi}) &= \tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(\tau_{\hat{C}\hat{D}}(\hat{\psi})), \quad \hat{y}(\varphi^*, \hat{\psi}) = \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(\tau_{\hat{C}\hat{D}}(\hat{\psi})), \quad \hat{\psi} \in [0, \hat{Q}]; \\
\tilde{x}'_{\hat{D}\hat{A}}(\tau) \hat{x}'_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}, 0) &+ \tilde{y}'_{\hat{D}\hat{A}}(\tau) \hat{y}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, 0) = 0, \\
\tilde{x}'_{\hat{B}\hat{C}}(\tau) \hat{x}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, \hat{Q}) &+ \tilde{y}'_{\hat{B}\hat{C}}(\tau) \hat{y}'_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}, \hat{Q}) = 0, \quad \hat{\phi} \in [\varphi_*, \varphi^*], \\
\tilde{x}'_{\hat{A}\hat{B}}(\tau) \hat{x}'_{\hat{\phi}}(\varphi_*, \hat{\psi}) &+ \tilde{y}'_{\hat{A}\hat{B}}(\tau) \hat{y}'_{\hat{\psi}}(\varphi_*, \hat{\psi}) = 0, \\
\tilde{x}'_{\hat{C}\hat{D}}(\tau) \hat{x}'_{\hat{\psi}}(\varphi^*, \hat{\psi}) &+ \tilde{y}'_{\hat{C}\hat{D}}(\tau) \hat{y}'_{\hat{\phi}}(\varphi^*, \hat{\psi}) = 0, \quad \hat{\psi} \in [0, \hat{Q}],
\end{aligned} \tag{5}$$

де  $\tau_{\hat{D}\hat{A}}(\hat{\phi})$ ,  $\tau_{\hat{B}\hat{C}}(\hat{\phi})$ ,  $\tau_{\hat{A}\hat{B}}(\hat{\psi})$ ,  $\tau_{\hat{C}\hat{D}}(\hat{\psi})$  — розрахункові залежності параметрів задання граничних вузлів від значень функцій квазіпотенціалу та течії на ділянках  $\hat{D}\hat{A}$ ,  $\hat{B}\hat{C}$ ,  $\hat{A}\hat{B}$ ,  $\hat{C}\hat{D}$ , відповідно. При цьому, замість умови (6) інколи використовують наступну (див., напр., [1]; далі порівнюватимемо ефективності застосування цих виразів):

$$\begin{aligned}
\hat{x}'_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}, 0) \hat{x}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, 0) &+ \hat{y}'_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}, 0) \hat{y}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, 0) = 0, \\
\hat{x}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, \hat{Q}) \hat{x}'_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}, \hat{Q}) &+ \hat{y}'_{\hat{\psi}}(\hat{\phi}, \hat{Q}) \hat{y}'_{\hat{\phi}}(\hat{\phi}, \hat{Q}) = 0, \quad \hat{\phi} \in [\varphi_*, \varphi^*], \\
\hat{x}'_{\hat{\psi}}(\varphi_*, \hat{\psi}) \hat{x}'_{\hat{\phi}}(\varphi_*, \hat{\psi}) &+ \hat{y}'_{\hat{\psi}}(\varphi_*, \hat{\psi}) \hat{y}'_{\hat{\phi}}(\varphi_*, \hat{\psi}) = 0, \\
\hat{x}'_{\hat{\phi}}(\varphi^*, \hat{\psi}) \hat{x}'_{\hat{\psi}}(\varphi^*, \hat{\psi}) &+ \hat{y}'_{\hat{\phi}}(\varphi^*, \hat{\psi}) \hat{y}'_{\hat{\psi}}(\varphi^*, \hat{\psi}) = 0, \quad \hat{\psi} \in [0, \hat{Q}].
\end{aligned} \tag{7}$$

**Різницеві аналоги задач (4)-(6) і (4), (5), (7).** Наближене представлення формул (4)-(7) у рівномірній сітковій області  $G_{\hat{\omega}}^z = \{\hat{\omega}_{i,j} = (\hat{\phi}_i, \hat{\psi}_j) : \hat{\phi}_i = \varphi_* + i \Delta \hat{\phi}, \quad i = \overline{0, m+1}; \hat{\psi}_j = j \Delta \hat{\psi}, \quad j = \overline{0, n+1};$

$$\Delta \hat{\phi} = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \quad \Delta \hat{\psi} = \frac{\hat{Q}}{n+1}, \quad \hat{\gamma} = \Delta \hat{\phi} / \Delta \hat{\psi}, \quad m, n \in \mathbb{N}\} \text{ при заданому } \kappa(\hat{x}, \hat{y})$$

і позначеннях  $\hat{d}_{i,j+0.5} = \sqrt{(\hat{x}_{i+1,j} - \hat{x}_{i,j})^2 + (\hat{y}_{i+1,j} - \hat{y}_{i,j})^2}$ ,  $\hat{x}_{i,j} = \hat{x}(\hat{\phi}_i, \hat{\psi}_j)$ ,  $\hat{y}_{i,j} = \hat{y}(\hat{\phi}_i, \hat{\psi}_j)$ ,  $\hat{\kappa}_{i,j} = \kappa(\hat{x}_{i,j}, \hat{y}_{i,j})$ ,  $\tau_{\hat{A}\hat{B}_j} = \tau_{\hat{A}\hat{B}}(\hat{\psi}_j)$ ,  $\tau_{\hat{C}\hat{D}_j} = \tau_{\hat{C}\hat{D}}(\hat{\psi}_j)$ ,

$\tau_{\hat{D}\hat{A}_i} = \tau_{\hat{D}\hat{A}}(\hat{\phi}_i)$ ,  $\tau_{\hat{B}\hat{C}_i} = \tau_{\hat{B}\hat{C}}(\hat{\phi}_i)$ ,  $\hat{d}_{i,j+0.5} = \sqrt{(\hat{x}_{i,j+1} - \hat{x}_{i,j})^2 + (\hat{y}_{i,j+1} - \hat{y}_{i,j})^2}$  запишемо наступним чином [1, 3, 8]:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{i,j} &= \left( \hat{x}_{i+1,j} + \hat{x}_{i-1,j} + \hat{\gamma}^2 \hat{\kappa}_{i,j}^2 (\hat{x}_{i,j-1} + \hat{x}_{i,j+1}) + 0.25 \hat{\gamma}^2 \hat{\kappa}_{i,j} (\hat{x}_{i,j+1} - \right. \\
&\quad \left. - \hat{x}_{i,j-1}) ((\hat{\kappa}_{i,j})'_x (\hat{x}_{i,j+1} - \hat{x}_{i,j-1}) + (\hat{\kappa}_{i,j})'_y (\hat{y}_{i,j+1} - \hat{y}_{i,j-1})) - \right. \\
&\quad \left. - 0.25 ((\hat{\kappa}_{i,j})'_x (\hat{x}_{i+1,j} - \hat{x}_{i-1,j}) + (\hat{\kappa}_{i,j})'_y (\hat{y}_{i+1,j} - \hat{y}_{i-1,j})) \right) (\hat{x}_{i+1,j} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\hat{x}_{i-1,j} / \hat{\kappa}_{i,j} \Big) 0.5 / (1 + \hat{\gamma}^2 \hat{\kappa}_{i,j}^2), \\
 \hat{y}_{i,j} = & \left( \hat{y}_{i+1,j} + \hat{y}_{i-1,j} + \hat{\gamma}^2 \hat{\kappa}_{i,j}^2 (\hat{y}_{i,j-1} + \hat{y}_{i,j+1}) + 0.25 \hat{\gamma}^2 \hat{\kappa}_{i,j} (\hat{y}_{i,j+1} - \right. \\
 & \left. - \hat{y}_{i,j-1}) \left( (\hat{\kappa}_{i,j})'_{\hat{x}} (\hat{x}_{i,j+1} - \hat{x}_{i,j-1}) + (\hat{\kappa}_{i,j})'_y (\hat{y}_{i,j+1} - \hat{y}_{i,j-1}) \right) - \right. \\
 & \left. 0.25 \left( (\hat{\kappa}_{i,j})'_{\hat{x}} (\hat{x}_{i+1,j} - \hat{x}_{i-1,j}) + (\hat{\kappa}_{i,j})'_y (\hat{y}_{i+1,j} - \hat{y}_{i-1,j}) \right) (\hat{y}_{i+1,j} - \right. \\
 & \left. - \hat{y}_{i-1,j}) / \hat{\kappa}_{i,j} \Big) 0.5 / (1 + \hat{\gamma}^2 \hat{\kappa}_{i,j}^2);
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma} = & \frac{4}{(m+1)(n+1)} \times \\
 & \times \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{(\hat{d}_{i+0.5,j} + \hat{d}_{i+0.5,j+1})(\hat{d}_{i,j+0.5} + \hat{d}_{i+1,j+0.5})^{-1}}{\hat{\kappa}_{i,j} + \hat{\kappa}_{i+1,j} + \hat{\kappa}_{i,j+1} + \hat{\kappa}_{i+1,j+1}};
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{i,0} = & \tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(\tau_{\hat{D}\hat{A}}), \quad \hat{y}_{i,0} = \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(\tau_{\hat{D}\hat{A}}), \\
 \hat{x}_{i,n+1} = & \tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(\tau_{\hat{B}\hat{C}}), \quad \hat{y}_{i,n+1} = \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(\tau_{\hat{B}\hat{C}}), \\
 \hat{x}_{0,j} = & \tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(\tau_{\hat{A}\hat{B}}), \quad \hat{y}_{0,j} = \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(\tau_{\hat{A}\hat{B}}), \\
 \hat{x}_{m+1,j} = & \tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(\tau_{\hat{C}\hat{D}}), \quad \hat{y}_{m+1,j} = \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(\tau_{\hat{C}\hat{D}});
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}'_{\hat{D}\hat{A}}(\tau)(\hat{y}_{i,1} - \hat{y}_{i,0}) + \tilde{y}'_{\hat{D}\hat{A}}(\tau)(\hat{x}_{i,1} - \hat{x}_{i,0}) = & 0, \\
 \tilde{x}'_{\hat{B}\hat{C}}(\tau)(\hat{y}_{i,n} - \hat{x}_{i,n+1}) + \tilde{y}'_{\hat{B}\hat{C}}(\tau)(\hat{x}_{i,n} - \hat{x}_{i,n+1}) = & 0, \\
 \tilde{x}'_{\hat{A}\hat{B}}(\tau)(\hat{y}_{1,j} - \hat{y}_{0,j}) + \tilde{y}'_{\hat{A}\hat{B}}(\tau)(\hat{x}_{1,j} - \hat{x}_{0,j}) = & 0, \\
 \tilde{x}'_{\hat{C}\hat{D}}(\tau)(\hat{y}_{m,j} - \hat{x}_{m+1,j}) + \tilde{y}'_{\hat{C}\hat{D}}(\tau)(\hat{x}_{m,j} - \hat{x}_{m+1,j}) = & 0;
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 & (4\hat{x}_{i,1} - 3\hat{x}_{i,0} - \hat{x}_{i,2})(\hat{x}_{i+1,0} - \hat{x}_{i-1,0}) + \\
 & + (4\hat{y}_{i,1} - 3\hat{y}_{i,0} - \hat{y}_{i,2})(\hat{y}_{i+1,0} - \hat{y}_{i-1,0}) = 0, \\
 & (3\hat{x}_{i,n+1} + \hat{x}_{i,n-1} - 4\hat{x}_{i,n})(\hat{x}_{i+1,n+1} - \hat{x}_{i-1,n+1}) + \\
 & + (3\hat{y}_{i,n+1} + \hat{y}_{i,n-1} - 4\hat{y}_{i,n})(\hat{y}_{i+1,n+1} - \hat{y}_{i-1,n+1}) = 0, \\
 & (4\hat{x}_{1,j} - 3\hat{x}_{0,j} - \hat{x}_{2,j})(\hat{x}_{0,j+1} - \hat{x}_{0,j-1}) + \\
 & + (4\hat{y}_{1,j} - 3\hat{y}_{0,j} - \hat{y}_{2,j})(\hat{y}_{0,j+1} - \hat{y}_{0,j-1}) = 0, \\
 & (3\hat{x}_{m+1,j} + \hat{x}_{m-1,j} - 4\hat{x}_{m,j})(\hat{x}_{m+1,j+1} - \hat{x}_{m+1,j-1}) + \\
 & + (3\hat{y}_{m+1,j} + \hat{y}_{m-1,j} - 4\hat{y}_{m,j})(\hat{y}_{m+1,j+1} - \hat{y}_{m+1,j-1}) = 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

При цьому,  $G_z^{\hat{z}} = \{\hat{z}_{i,j} = \hat{x}_{i,j} + i \hat{y}_{i,j} : \hat{z}_{i,j} \in G_z, i = \overline{0, m+1}, j = \overline{0, n+1}\}$ .

**Алгоритм розв'язання задачі (8)-(11) ((8)-(10), (12)).** Спершу задаємо границю фізичної області  $G_z$  (функціями  $x = \tilde{x}(\tau)$ ,  $y = \tilde{y}(\tau)$ ) і



параметри  $\tau = \tau_A$ ,  $\tau = \tau_B$ ,  $\tau = \tau_C$ ,  $\tau = \tau_D$ . Далі здійснюємо ФО згідно підходу, що описаний вище. Задаємо квазіпотенціали  $\varphi_*$ ,  $\varphi^*$ , кількості вузлів розбиття  $m$ ,  $n$  та параметр точності  $\varepsilon$ . Обчислюємо крок  $\Delta\hat{\varphi} = (\varphi^* - \varphi_*) / (m+1)$  та координати кутових точок  $\hat{x}_{m+1,0} = \tilde{x}_{DA}(0)$ ,  $\hat{y}_{m+1,0} = \tilde{y}_{DA}(0)$ ,  $\hat{x}_{0,0} = \tilde{x}_{AB}(0)$ ,  $\hat{y}_{0,0} = \tilde{y}_{AB}(0)$ ,  $\hat{x}_{m+1,n+1} = \tilde{x}_{CD}(0)$ ,  $\hat{y}_{m+1,n+1} = \tilde{y}_{CD}(0)$ ,  $\hat{x}_{0,n+1} = \tilde{x}_{BC}(0)$ ,  $\hat{y}_{0,n+1} = \tilde{y}_{BC}(0)$ .

Формуємо початкові наближення координат граничних  $\hat{x}_{0,j}^{(0)}$ ,  $\hat{y}_{0,j}^{(0)}$ ,  $\hat{x}_{m+1,j}^{(0)}$ ,  $\hat{y}_{m+1,j}^{(0)}$ ,  $\hat{x}_{i,0}^{(0)}$ ,  $\hat{y}_{i,0}^{(0)}$ ,  $\hat{x}_{i,n+1}^{(0)}$ ,  $\hat{y}_{i,n+1}^{(0)}$  та внутрішніх  $\hat{x}_{i,j}^{(0)}$ ,  $\hat{y}_{i,j}^{(0)}$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ) вузлів і квазіконформного інваріанту  $\hat{\gamma}^{(0)}$  (за формулою (9)).

Розпочинаємо ітераційний процес почергової параметризації граничних і внутрішніх вузлів сіткових областей, а також квазіконформного інваріанту з використанням ідей методу блочної ітерації [1, 9]. А саме: розв'язуємо системи рівнянь (10), (11) ((10), (12)) стосовно  $\hat{x}_{0,j}^{(l)}$ ,  $\hat{y}_{0,j}^{(l)}$ ,  $\hat{x}_{m+1,j}^{(l)}$ ,  $\hat{y}_{m+1,j}^{(l)}$ ,  $\hat{x}_{i,0}^{(l)}$ ,  $\hat{y}_{i,0}^{(l)}$ ,  $\hat{x}_{i,n+1}^{(l)}$ ,  $\hat{y}_{i,n+1}^{(l)}$  (тут  $l = 0, 1, \dots$  — номер наближення), потім застосовуємо формули (8) до вузлів  $\hat{x}_{i,j}^{(l)}$ ,  $\hat{y}_{i,j}^{(l)}$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ), після чого уточнюємо  $\hat{\gamma}^{(l)}$ , використовуючи (9). Умовами завершення ітераційного процесу можуть бути [1]. Остаточно, при необхідності, обчислюємо повну витрату  $\hat{Q} = (n+1)\Delta\hat{\varphi} / \hat{\gamma}^{(l)}$ , нев'язку квазіконформності, виводимо на екран гідродинамічну сітку тощо [1-3].

**Порівняння ефективності розв'язання задачі моделювання при застосуванні різних підходів до забезпечення виконання умов ортогональності на границі.** Нехай межа досліджуваної (вихідної) області задається за допомогою бісплайнних функцій

$$x = \tilde{x}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^*-1} x_k^* b_{k,3}^*(\tau), \quad y = \tilde{y}(\tau) = \sum_{k=0}^{m^*-1} y_k^* b_{k,3}^*(\tau) \quad [7], \quad \text{утворених}$$

$m^* = 12$  контрольними точками, а саме:

$$\begin{aligned} (x_0^*, y_0^*) &= (272, 379), & (x_1^*, y_1^*) &= (260, 269), & (x_2^*, y_2^*) &= (360, 189), \\ (x_3^*, y_3^*) &= (433, 335), & (x_4^*, y_4^*) &= (556, 260), & (x_5^*, y_5^*) &= (711, 373), \\ (x_6^*, y_6^*) &= (694, 493), & (x_7^*, y_7^*) &= (549, 544), & (x_8^*, y_8^*) &= (456, 444), \\ (x_9^*, y_9^*) &= (357, 516), & (x_{10}^*, y_{10}^*) &= (281, 455), & (x_{11}^*, y_{11}^*) &= (272, 379), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\tau_k &= \tau_{k-1} + (m^* - 3)^{-1} \overline{(k = 4, m^*)}, \\ b_{k,r}^*(\tau) &= \frac{\tau - \tau_k}{\tau_{k+r} - \tau_k} b_{k,r-1}^*(\tau) + \frac{\tau_{k+r+1} - \tau}{\tau_{k+r+1} - \tau_{k+1}} b_{k+1,r-1}^*(\tau), \\ b_{k,0}^*(\tau) &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } \tau \notin [\tau_k, \tau_{k+1}), \\ 1, & \text{якщо } \tau \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \end{cases} \\ \tau_{m^*+k} &= 1 \quad (k = \overline{1, 4}), \quad \tau_k = 0 \quad (k = \overline{0, 3}).\end{aligned}$$

Точки  $A, B, C, D \in \partial G_z$  визначатимемо параметрами  $\tau_A = 0.58$ ,  $\tau_B = 0.68$ ,  $\tau_C = 0.04$ ,  $\tau_D = 0.042$ . Сталі  $\varphi_*$ ,  $\varphi^*$  задаємо рівними 0 і 1, відповідно. При наведених даних і різних параметрах розбиття  $m$ ,  $n$  розв'язано задачі моделювання руху частинок як в області  $G_z$ , так і в  $G_z$  (процедура ФО виконувалась при  $m^{\hat{D}\hat{A}} = 269$ ,  $m^{\hat{A}\hat{B}} = 9$ ,  $m^{\hat{B}\hat{C}} = 364$ ,  $m^{\hat{C}\hat{D}} = 139$ ,  $n^{DA} = 2680$ ,  $n^{AB} = 40$ ,  $n^{BC} = 3630$ ,  $n^{CD} = 690$ ,  $\Delta_A^L = \Delta_A^R = \Delta_B^L = \Delta_B^R = 0.418311$ ,  $\Delta_C^L = \Delta_C^R = \Delta_D^L = \Delta_D^R = 13.892004$ ). В обох випадках обчислено усереднені нев'язку ортогональності  $\varepsilon^{\angle} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \varepsilon_{i,j}^{\angle}$  та узагальнену нев'язку відношення дов-

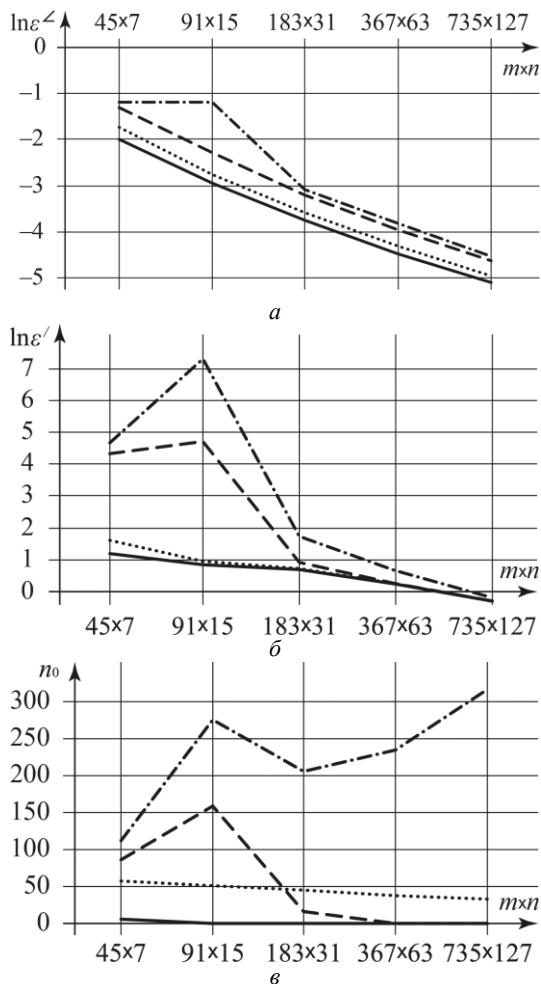
жин суміжних відрізків  $\varepsilon' = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \varepsilon_{i,j}'$  в малому, де  $\varepsilon_{i,j}'$  та  $\varepsilon_{i,j}^{\angle}$  в області  $G_{\hat{\omega}}^{\hat{\gamma}}$  розраховуються за формулами:

$$\max \left( \hat{d}_{i+0.5,j} / (\hat{\gamma} \hat{\kappa}_{i,j} \hat{d}_{i,j+0.5}), \hat{\gamma} \hat{\kappa}_{i,j} \hat{d}_{i,j+0.5} / \hat{d}_{i+0.5,j} \right) - 1$$

та

$$\left| \arcsin \frac{(\hat{x}_{i+1,j} - \hat{x}_{i,j})(\hat{x}_{i,j+1} - \hat{x}_{i,j}) + (\hat{y}_{i+1,j} - \hat{y}_{i,j})(\hat{y}_{i,j+1} - \hat{y}_{i,j})}{\hat{d}_{i+0.5,j} \hat{d}_{i,j+0.5}} \right|,$$

відповідно. Графіки розподілу величин  $\varepsilon_{i,j}'$  та  $\varepsilon_{i,j}^{\angle}$ , зважаючи на різність порядків їх значень, зображено, подібно до [10], у логарифмічному вигляді (рис. 2, а та рис. 2, б). При цьому, для спрощення аналізу результатів, із розрахунків  $\varepsilon'$  (рис. 2, б) виключено вузли з особливостями, для яких  $\varepsilon_{i,j}' > 10^6$ , але пораховано їх кількість  $n_0$  (рис. 2, в).



**Рис. 2.** Усереднені нев'язка ортогональності (а) та узагальнена нев'язка відношення довжин суміжних відрізків (б) в малому, а також кількість вузлів з особливостями (в); тут зображено результати у випадку ФО (—, — —), без ФО (....., —. —), при застосуванні формул (11) (— —, —. —) та виразів (12) (—, .....

Як видно з рис. 2, застосування формул (11) при порівняно малій кількості вузлів є неефективним. Але починаючи з розбиття 183x31, похибки квазіконформності, очікувано [6], локалізуються у точках  $A, B, C, D$  ( $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ ). Процедура ж ФО дозволяє взагалі позбавитись особливостей в околах «стику» граничних ліній течії та ек-

випотенціальних ліній (хоча й тут спостерігається певна залежність від параметрів «густини» розбиття).

Також, як і очікувалось, зі збільшенням кількості вузлів розбиття рівень похибок квазіконформності зменшується. Найефективнішим з цієї точки зору є застосування процедури ФО та різницевих рівнянь (12). Подальша градація наступна: без ФО та із задіюванням виразів (12), при збуреннях за допомогою ФО та використанні (11), за умови гладкої границі області та реалізації формул (11). Варто зауважити, що в 2-му та 4-му серед перелічених випадків мають місце особливості у певних околах особливих точок. Тому, наприклад, при розв'язанні задач електричної томографії [2, 3], апріорними даними на відповідних ділянках, у багатьох випадках, доводиться нехтувати (для забезпечення вищого рівня коректності за Адамаром [4]).

**Перспективи подальших досліджень у задачах електричної томографії.** У роботах [2, 3] при розв'язанні задач електричної томографії (реконструкції зображення) використовувались формули (11) стосовно областей із гладкими границями. Проте, як видно з рис. 2, можливо досягнути суттєво вищої точності отримуваних розв'язків із застосуванням процедури ФО та виразів (12). Зокрема, суттєвою перевагою тут стає уникнення вузлів із особливостями, які мають місце в околах точок «стику» граничних ліній течії та еквіпотенціальних ліній.

У такому випадку, замість чотирьох бісплайнів виду  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}(\tau))$  будуються  $\tilde{p}$  четвірок  $(\tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{(p)}(\tau), \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{(p)}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{(p)}(\tau), \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{(p)}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{B}\hat{C}}^{(p)}(\tau), \tilde{y}_{\hat{B}\hat{C}}^{(p)}(\tau))$ ,  $(\tilde{x}_{\hat{C}\hat{D}}^{(p)}(\tau), \tilde{y}_{\hat{C}\hat{D}}^{(p)}(\tau))$  при заданих  $\tau = \tau_A^{(p)}$ ,  $\tau = \tau_B^{(p)}$ ,  $\tau = \tau_C^{(p)}$ ,  $\tau = \tau_D^{(p)}$ . При цьому, оскільки значення  $\tilde{p}$  у задачах томографії може досягати кількох сотень [2], то очевидно є перевага в описаному вище саме автоматизованому алгоритмі ФО.

Тоді задачі виду (4), (5), (7) на знаходження функцій  $\hat{x}_{i,j} = \hat{x}(\hat{\varphi}_i, \hat{\psi}_j)$ ,  $\hat{y}_{i,j} = \hat{y}(\hat{\varphi}_i, \hat{\psi}_j)$ ,  $\hat{\kappa}_{i,j} = \kappa(\hat{x}_{i,j}, \hat{y}_{i,j})$  із врахуванням інжекційності [2, 3] (з доданням індексу  $p$  до відповідних змінних та параметрів, яке означає належність до конкретного ситуаційного випадку розміщення ділянок прикладання квазіпотенціалів) та доповнені умовами [3]

$$\begin{aligned} x^{(p)}(\hat{\varphi}, 0) &= \tilde{x}_{\hat{D}\hat{A}}^{(p)}\left(\tau_{\hat{D}\hat{A}}^{(p)}(\hat{\varphi})\right), \quad y^{(p)}(\hat{\varphi}, 0) = \tilde{y}_{\hat{D}\hat{A}}^{(p)}\left(\tau_{\hat{D}\hat{A}}^{(p)}(\hat{\varphi})\right), \\ x^{(p)}(\varphi_*, \hat{\psi}) &= \tilde{x}_{\hat{A}\hat{B}}^{(p)}\left(\tau_{*\hat{A}\hat{B}}^{(p)}(\hat{\psi})\right), \quad y^{(p)}(\varphi_*, \hat{\psi}) = \tilde{y}_{\hat{A}\hat{B}}^{(p)}\left(\tau_{*\hat{A}\hat{B}}^{(p)}(\hat{\psi})\right), \end{aligned}$$

$$x^{(p)}(\hat{\varphi}, \hat{Q}^{(p)}) = \tilde{x}_{\hat{BC}}^{(p)}\left(\bar{\tau}_{\hat{BC}}^{(p)}(\hat{\varphi})\right), \quad y^{(p)}(\hat{\varphi}, \hat{Q}^{(p)}) = \tilde{y}_{\hat{BC}}^{(p)}\left(\bar{\tau}_{\hat{BC}}^{(p)}(\hat{\varphi})\right), \quad (13)$$

$$x^{(p)}(\varphi^*, \hat{\psi}) = \tilde{x}_{\hat{CD}}^{(p)}\left(\tau_{\hat{CD}}^{*(p)}(\hat{\psi})\right), \quad y^{(p)}(\varphi^*, \hat{\psi}) = \tilde{y}_{\hat{CD}}^{(p)}\left(\tau_{\hat{CD}}^{*(p)}(\hat{\psi})\right)$$

$$(\hat{\varphi} \in [\varphi_*, \varphi^*], \hat{\psi} \in [0, \hat{Q}])$$

розв'язуватимуться при різних  $A_p, B_p, C_p, D_p$ . При цьому, числові значення виразів (13) отримуються із апіорної інформації щодо розподілу значень  $\bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \Psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, \Psi_{j_*^{(p)}}^{*(p)}$  ( $\bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)} < \bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)+1}^{(p)}, \underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)} < \underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)+1}^{(p)}, \Psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)} < \Psi_{*j_*^{(p)+1}^{(p)}, \Psi_{j_*^{(p)}}^{*(p)} < \Psi_{j_*^{(p)+1}^{*(p)}$ ) у точках  $(\bar{x}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \bar{y}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}), (\underline{x}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \underline{y}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}), (x_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, y_{*j_*^{(p)}}^{(p)}), (x_{j_*^{(p)}}^{*(p)}, y_{j_*^{(p)}}^{*(p)})$  ( $j_*^{(p)} = 0, n_*^{(p)} + 1, \bar{i}^{(p)} = 0, \bar{m}^{(p)} + 1, j_*^{(p)} = 0, n_*^{(p)} + 1, \underline{i}^{(p)} = 0, \underline{m}^{(p)} + 1$ ) на межі досліджуваної області  $G_z$  [2-4]. Виходячи з того, що ці дані задаються дискретно (з певними кроками) на  $\partial G_z$ , то доцільним є вибирання «околів»  $\Delta_A^{(p)L}, \Delta_A^{(p)R}, \Delta_B^{(p)L}, \Delta_B^{(p)R}, \Delta_C^{(p)L}, \Delta_C^{(p)R}, \Delta_D^{(p)L}, \Delta_D^{(p)R}$  настільки малими, щоб під суттєво збурені внаслідок ФО ділянки області не потрапляли точки  $(\bar{x}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \bar{y}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}), (\underline{x}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \underline{y}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}), (x_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, y_{*j_*^{(p)}}^{(p)}), (x_{j_*^{(p)}}^{*(p)}, y_{j_*^{(p)}}^{*(p)})$  ( $j_*^{(p)} = 1, n_*^{(p)}, \bar{i}^{(p)} = 1, \bar{m}^{(p)}, j_*^{(p)} = 1, n_*^{(p)}, \underline{i}^{(p)} = 1, \underline{m}^{(p)}$ ). Координати останніх на бісплайнових кривих апроксимуємо за допомогою параметрів  $\tau = \hat{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \tau = \hat{\tau}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \tau = \hat{\tau}_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, \tau = \hat{\tau}_{j_*^{(p)}}^{*(p)}$ , більшість з яких ( $j_*^{(p)} = 1, n_*^{(p)}, \bar{i}^{(p)} = 1, \bar{m}^{(p)}, j_*^{(p)} = 1, n_*^{(p)}, \underline{i}^{(p)} = 1, \underline{m}^{(p)}$ ) обчислюємо за умови мінімізації виразів:

$$\left(\tilde{x}_{\hat{DA}}^{(p)}(\hat{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}) - \underline{x}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}\right)^2 + \left(\tilde{y}_{\hat{DA}}^{(p)}(\hat{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}) - \underline{y}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}\right)^2 \rightarrow \min,$$

$$\left(\tilde{x}_{\hat{AB}}^{(p)}(\hat{\tau}_{*j_*^{(p)}}^{(p)}) - x_{*j_*^{(p)}}^{(p)}\right)^2 + \left(\tilde{y}_{\hat{AB}}^{(p)}(\hat{\tau}_{*j_*^{(p)}}^{(p)}) - y_{*j_*^{(p)}}^{(p)}\right)^2 \rightarrow \min,$$

$$\left(\tilde{x}_{\hat{BC}}^{(p)}(\hat{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}) - \bar{x}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}\right)^2 + \left(\tilde{y}_{\hat{BC}}^{(p)}(\hat{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}) - \bar{y}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}\right)^2 \rightarrow \min,$$

$$\left(\tilde{x}_{\hat{CD}}^{(p)}(\hat{\tau}_{j_*^{(p)}}^{*(p)}) - x_{j_*^{(p)}}^{*(p)}\right)^2 + \left(\tilde{y}_{\hat{CD}}^{(p)}(\hat{\tau}_{j_*^{(p)}}^{*(p)}) - y_{j_*^{(p)}}^{*(p)}\right)^2 \rightarrow \min.$$

Решта ж відповідає кутовим точкам:  $\hat{\tau}_0^{(p)} = \hat{\tau}_0^{(p)} = \hat{\tau}_0^{*(p)} = \hat{\tau}_0^{*(p)} = 0$ ,  $\hat{\tau}_{\bar{m}^{(p)+1}^{(p)}}^{(p)} = \hat{\tau}_{\underline{m}^{(p)+1}^{(p)}}^{(p)} = \hat{\tau}_{n_*^{(p)+1}^{(p)}}^{(p)} = \hat{\tau}_{n_*^{(p)+1}^{(p)}}^{*(p)} = 1$ . Функції  $\tau = \tau_{\hat{DA}}^{(p)}(\hat{\varphi}), \tau = \tau_{\hat{AB}}^{(p)}(\hat{\psi}), \tau = \bar{\tau}_{\hat{BC}}^{(p)}(\hat{\varphi}), \tau = \tau_{\hat{CD}}^{*(p)}(\hat{\psi})$ , що входять у формулу (13), будуються вна-

слідок інтерполювання (наприклад, за допомогою монотонних кубічних сплайнів [11]) значень  $\tau = \hat{\tau}_{\bar{l}}^{(p)}$ ,  $\tau = \hat{\tau}_{\underline{l}}^{(p)}$ ,  $\tau = \hat{\tau}_{*j_n}^{(p)}$ ,  $\tau = \hat{\tau}_{j^*(p)}^{(p)}$  при параметрах  $\bar{\varphi}_{\bar{l}}^{(p)}$ ,  $\underline{\varphi}_{\underline{l}}^{(p)}$ ,  $\Psi_{*j_n}^{(p)}$ ,  $\Psi_{j^*(p)}^{*(p)}$ .

Загалом, використання апріорних даних у збуреному вигляді (13) при достатньо малих значеннях  $\Delta_A^{(p)L}$ ,  $\Delta_A^{(p)R}$ ,  $\Delta_B^{(p)L}$ ,  $\Delta_B^{(p)R}$ ,  $\Delta_C^{(p)L}$ ,  $\Delta_C^{(p)R}$ ,  $\Delta_D^{(p)L}$ ,  $\Delta_D^{(p)R}$  забезпечує більшу коректність вихідної задачі за Адамаром. Таким чином, зменшується необхідність у регуляризації [4], яка негативно впливає і на швидкість розрахунків, і на їх точність.

**Висновки.** Реалізовано механізм підвищення точності квазіконформних відображень при розв'язанні крайових задач в ізотропному середовищі з чотирикутною гладкою границею, яка складається з двох ліній течії та двох екіпотенціальних ліній. Для цього розроблено спеціальну процедуру «фіктивної ортогоналізації», яка передбачає заміну вихідної області деякою апроксимованою. Це хоч і вносить певні збурення у форму досліджуваного об'єкта, проте забезпечує вищу точність квазіконформних відображень та більшу «прозорість» ходу розв'язання відповідної задачі. Проведено порівняння нев'язок квазіконформності, обчислених на прикладах гладкої границі деякої області та серії «фіктивно ортогоналізованих». Показано безумовну ефективність застосування деякої «п'ятиточкової» схеми (над «двоточковою») в обох випадках. Більше того, «фіктивна ортогоналізація» забезпечує «позбавлення» від особливих точок і похибок, що, при цьому, виникають. Локалізація ж нев'язок квазіконформності в околах особливих точок, що має місце при гладкості межі досліджуваної області, спостерігається лише при «густому» розбитті. Тоді як у, наприклад, задачах електричної томографії, у багатьох випадках, критичними є показники швидкості розрахунків та їх точності вздовж усієї ділянки границі.

У перспективі: реалізація процедури «фіктивної ортогоналізації» у задачах електричної томографії [2-4], зокрема, у випадках, коли на ділянках границі мають місце негладкості [1], що моделюється критичними точками, в околах яких мають місце «застійні зони». Окрім цього, планується розроблення підходів до врахування наявності у досліджуваному середовищі тонких прошарків [5] із власними фільтраційними (електричними) характеристиками.

### Список використаних джерел:

1. Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярошак С. В. Методи комплексного аналізу: монографія. Рівне: НУВГП, 2013. 415 с.
2. Bomba A., Voichura M., Sydoruk B. Generalization of numerical quasiconformal mapping methods for geological problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5 (4). P. 45-54.

3. Bomba A. Ya., Boichura M. V. One numerical complex analysis method for parameters identification of piecewise homogeneous conductivity media with using applied quasipotential tomographic data. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2016. Вип. 14. С. 5-17. DOI: 10.32626/2308-5916.2016-14.5-17.
4. Holder D. *Electrical Impedance Tomography. Methods, History and Applications*. London: Institute of Physics, 2005. 456 p.
5. Michuta O., Ivanchuk N., Martyniuk P., Ostapchuk O. A finite-element study of elastic filtration in soils with thin inclusions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5 (5). P. 41-48.
6. Петрусєв А. С. Разностные схемы и их анализ: учебно-методическое пособие. Москва: МФТИ, 2004. 89 с.
7. Prautzsch H., Boehm W., Paluszny M. *Bézier and B-Spline Techniques*. Heidelberg: Springer, 2002. 304 p.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 656 с.
9. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Мир, 1975. 558 с.
10. Доманов В. Н., Костин А. Г., Никифорович Е. И. Процессы теплообмена в водоемов-охладителей с атмосферой. Киев: Наукова думка, 2011. 320 с.
11. ALGLIB — C++/C# numerical analysis library. URL: <http://www.alglib.net> (Last accessed: 26.07.2021).

## **ON AN APPROACH TO SMOOTHING THE NONSMOOTHNESS OF SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS USING NUMERICAL QUASICONFORMAL MAPPING METHODS**

The problem of modeling the motion of particles (charges, liquids, etc.) in a single-connected quadrangular curvilinear domain bounded by smooth two streamlines and two equipotential lines is formulated. Although if they are not «joined» at right angles and the corresponding medium is isotropic, then, according to the quasiconformal mapping method, there will be singularities in the vicinities of exactly four points of the boundary. To avoid these singularities, an approach to approximation the boundary of the studied domain (by cubic B-splines) with the use of a special procedure of “fictitious orthogonalization” is proposed. The corresponding direct and inverse problems on quasiconformal mappings are formulated. In this, two ways for the formation of orthogonality on smooth sections of the boundary (using some «two-» and «four-point» schemes for comparison; the corresponding difference problems and algorithms for their solving are given) are proposed. An approach to estimating the accuracy of quasiconformity properties fulfilling is proposed, separately calculating the averaged orthogonality residual and the generalized residual of ratio of the lengths of adjacent segments in the small. Numerical experiments were carried out and corresponding results were analyzed. In particular, the distributions of both types of residuals and the number of nodes with singularities when different mesh partitions take place are illustrated in the graphs. As expected, «fictitious orthogonalization» with sufficiently «dense» discretization

provides an opportunity to solve the problem of singularity at the points of «junction» of boundary streamlines and equipotential lines, contributes to increasing the accuracy of quasiconformal mappings and improving the «transparency» of solving process of the corresponding problem. Also, as expected, the «five-point» scheme for ensuring orthogonality on smooth boundary lines showed greater efficiency compared to the «two-point» one.

As a prospect for further application of the developed procedure of «fictitious orthogonalization», the mechanism of its adaptation is described on the example of electrical tomography problems.

**Key words:** *mathematical modeling, nonlinear problems, quasiconformal mappings, numerical methods.*

Отримано: 12.10.2021

UDC 519.6: 621.382.233

DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.20-30

**Andriy Bomba**, D-r of Tech. Science, Professor,  
**Igor Moroz**, PhD, Associate Professor

National University of Water and Environmental Engineering, Rivne

## **SIMULATION OF THE CHARGE CARRIERS DISTRIBUTION IN THE ACTIVE REGION OF THE P-I-N-DIODES BY THE PERTURBATION THEORY METHODS**

A mathematical model of the electron-hole plasma stationary distribution in the active region (i-region) of p-i-n-diodes in the diffusion-drift approximation is proposed. The model is represented in the form of a nonlinear singularly perturbed boundary value problem for the system of equations of the electron-hole currents continuity, the Poisson equation and the corresponding boundary conditions. The decomposition of the nonlinear boundary value problem of modeling the stationary distribution of charge carriers in the plasma of p-i-n-diodes is carried out on the basis of the solutions asymptotic representation. The model problem is reduced to a sequence of the linear boundary value problems with a characteristic separation of the main (regular) components of the asymptotics and a boundary corrections. It was found that the formulation of the problem for finding the zero term of the asymptotics regular part coincides with the classical formulation of the p-i-n-diodes characteristics modeling problem, which is carried out in the approximation of the ambipolar diffusion (approximation of a self-consistent electrostatic field). The proposed mathematical model and the method of its linearization make it possible to determining the main components in the diffusion-drift process and to study their role. For example, it becomes possible to study (including by analytical