УДК 517.94: 519.62
DOI: 10.32626/2308-5916.2022-23.73-82

А. В. Кунинець, канд. фіз.-мат. наук,
Р. Я. Пелех

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОЦІНКОЮ ЛОКАЛЬНОЇ ПОХИБКИ

Одним із сучасних наукових методів дослідження явищ та процесів є математичне моделювання, яке в багатьох випадках дозволяє замінити реальний процес і дає можливість отримувати як якісну так і кількісну картину процесу. Оскільки точні розв'язки таких моделей можна знайти в дуже окремих випадках, то необхідно використовувати наближені методи. В прикладній математиці широкого застосування набули дробово-раціональні наближення, які при відповідних умовах дають високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні та монотонні наближення.

У роботі, використовуючи методику побудови однокрокових методів для розв'язання початкової задачі для звичайних диференціальних рівнянь та розвинення шуканого розв'язку в скінчений ланцюговий дріб, запропоновано числовий метод розв'язування задачі Коші для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтери. Знайдено значення параметрів, при яких отримано нелінійний метод першого та другого порядку точності.

Запропоновано обчислювальні формули, які на кожному кроці інтегрування дозволяють отримати верхнє та нижнє наближення до точного розв'язку без додаткових обчислень правої частини інтего-диференціального рівняння. Розрахункові формули, в яких головні члени локальної похибки відрізняються тільки знаком, утворюють двосторонній метод. Півсуму двосторонніх наближень до точного розв'язку приймаємо за наближений розв'язок в даній точці інтегрування, а абсолютна величина піврізниці визначає похибку отриманого результату.

Модульний характер запропонованих алгоритмів дає можливість в кожній точці інтегрування отримати кілька наближень до точного розв'язку початкової задачі для нелінійного інтегро-диференціального рівняння. Співставлення цих наближень дає корисну інформацію у питанні вибору кроку інтегрування або при оцінці точності результату.

Ключові слова: *інтегро-диференціальне рівняння, початкова задача, методи Рунге-Кутти, локальна похибка, двосторонні наближення.*

Вступ. При розрахунку задач епідеміології, динаміки росту населення, в'язко-пружності і т.д. виникає проблема знаходити не тільки наближені розв'язки досліджуваних математичних моделей, але й отримувати оцінку похибки результату. В роботі [1] розроблено основні принципи побудови двосторонніх методів, які відносяться до групи аналітичних методів і дозволяють на кожному відрізку інтегрування побудувати дві послідовності кривих, які апроксимують шукану інтегральну криву цього рівняння зверху і знизу. Однак такий підхід накладає досить сильні обмеження на праву частину диференціального рівняння і, крім того, його важко реалізувати на ПК. У роботах [2-4] розглядаються методи дещо іншого типу, які не є строго двосторонніми, а забезпечують наближення точного розв'язку з недостачею і надлишком (верхнє та нижнє наближення) у розумінні головного члена локальної похибки. Такі методи належать до групи числових методів, легко програмуються і є більш універсальними. Ці двосторонні формули будуються так, щоб локальна похибка схеми в кожній вузловій точці мала вигляд:

$$u\left(x_{n+1}\right)-u_{n+1}=\omega h^{p}K\Phi_{n}(F)+O(h^{p+1}),$$

де $u(x_{n+1})$ і u_{n+1} — відповідно точний і наближений розв'язок досліджуваної задачі, h — крок інтегрування, $\Phi_n\left(F\right)$ — деякий диференціальний оператор, K — константа, p — порядок точності, ω - параметр двосторонності.

Вибором h і p (h — крок інтегрування, p — порядок точності числового методу) можна керувати, порівнюючи, наприклад, значення основного (головного) члена локальної похибки методу зі значенням похибки отриманого наближення до точного розв'язку і наступне узгодження цих похибок з вимогами до точності результату. Двосторонність і необхідна точність на всьому інтервалі інтегрування досягається за допомогою параметрів ω і h.

У прикладній математиці набули широкого застосування дробово-раціональні апроксимації, оскільки вони дають високу швидкість збіжності алгоритмів, а також монотонні та двосторонні апроксимації [5-7].

1. Постановка задачі. Розглянемо на відрізку $I_L:\left[x_0,x_0+L\right]$ задачу Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u'\left(x\right)=F\left[x,u\left(x\right),\int_{x_0}^{x}g\left[x,s,u\left(s\right)\right]ds\right], \tag{1}$$

$$u\left(x_0\right)=u_0,\ x\in\left[x_0,x_0+L\right]. \tag{2}$$

Припустимо, що розв'язок (1), (2) існує і єдиний, а функції F і g володіють необхідною гладкістю.

Запропоновані у даній роботі обчислювальні алгоритми дають можливість на кожному кроці інтегрування отримувати наближення першого та другого порядку точності, а також двосторонні наближення до точного розв'язку.

2. Нелінійний метод Рунге-Кутти. На відрізку I_L введемо сітку $\sigma_h = \{x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = x_0 + L\}$ з кроком $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Використовуючи апарат ланцюгових дробів [6, 7] та теорію побудови методів Рунге-Кутта [8, 9], наближений розв'язок задачі (1)-(2) в точці $x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді неперервного дробу:

$$u_1^{[k,\,l]} = \frac{P_{[k,l]}}{Q_{[k,l]}} = \cfrac{c_0}{\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \cfrac{d_{k,1}}{1 + \ddots + d_{k,l}}}}. \tag{3}$$

При $k + l = 2$ $(k = 1, 2; l = 0, 1)$

$$c_0 = u_0,\ d_{1,0} = -\frac{\delta_1}{c_0},\ d_{1,1} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{\delta_1 c_0},\ d_{2,0} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{c_0^2},$$

$$\delta_i = h\sum_{j=1}^{2} a_{ij}k_j,\ i = 1, 2,\ k_1 = F\left[x_0 + \alpha_1 h_1, u_0, 0\right], \tag{4}$$

$$k_2 = F\left[x_0 + \alpha_2 h, x_0 + \beta_{21}hk_1, \gamma_{21}K_1\right],$$

$$K_1 = hg\left[x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma hk_1\right],$$

де a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, α, α_1, α_2, β, β_{21}, γ — невідомі параметри.

Розвинення розв'язку задачі (1)-(2) в ряд Тейлора в околі точки x_0 має вигляд:

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + h(F)_0 + \frac{1}{2}h^2\left\{(F_x)_0 + (F_u)_0(F)_0 + (F_z)_0(g)_0\right\} +$$

$$+\frac{h^3}{6}\Big\{(F_{xx})_0 + 2(F_{xu})_0(F)_0 + (F_{uu})_0\left(F^2\right)_0 + (F_x)_0(F_u)_0 +$$

$$+(F_{zz})_0\left(g^2\right)_0 + 2(F_{xz})_0(g)_0 + 2(F_{uz})_0(F)_0(g)_0 +$$

$$+2(F_z)_0(g_x)_0 + (F_z)_0(g_u)_0(F)_0 + (F_z)_0(g_s)_0 +$$

$$+\left(F_u^2\right)_0(F)_0 + (F_u)_0(F_z)_0(g)_0\Big\} + O\left(h^4\right). \tag{5}$$

Розглянемо формули (3) і (4) при $k = 1$, $l = 1$:

$$u_1^{[1,1]} = \frac{u_0}{1 - \dfrac{h\dfrac{(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)}{u_0}}{1 + \dfrac{h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)^2 - u_0(a_{21}k_1 + a_{22}k_2)}{u_0(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)}}}, \qquad (6)$$

$$k_1 = F[x_0 + \alpha_1 h, u_0, 0],\ k_2 = F[x_0 + \alpha_2 h, u_0 + \beta_{21}hk_1, \gamma_{21}K_1],$$

$$K_1 = hg[x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma hk_1].$$

Невідомі параметри a_{ij}, α_j $(i = 1,2;\ j = 1,2)$, β_{21}, γ_{21}, α, β, γ виберемо з умови, щоб $R_1^{[1,1]} = \left|u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]}\right| = O(h^3)$.

Для цього спочатку перетворимо формулу (6) до вигляду:

$$u_1^{[1,1]} = u_0 + \frac{h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)}{1 - \dfrac{(a_{21}k_1 + a_{22}k_2)}{a_{11}k_1 + a_{12}k_2}}, \qquad (7)$$

або

$$u_1^{[1,1]} = u_0 + \frac{h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)^2}{(a_{11} - a_{21})k_1 + (a_{12} - a_{22})k_2} = u_0 + \frac{P_{[1,1]}}{Q_{[1,1]}}. \qquad (8)$$

Представлення формули (6) у вигляді (8) дає можливість проводити розрахунки при $u_0 \equiv 0$, а також, як показують розрахунки, якщо $a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = 0$, то $\left|u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]}\right| = O(h^3)$.

Розвинення $P_{[1,1]}$ і $Q_{[1,1]}$ в ряди Тейлора в околі точки x_0 мають вигляд:

$$P_{[1,1]} = h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)^2 = h(a_{11} + a_{12})^2 (F^2)_0 +$$

$$+2h^2(a_{11} + a_{12})(F)_0 \{ (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2)(F_x)_0 +$$

$$+a_{12}\beta_{21}(F_u)_0 (F)_0 + a_{12}\gamma_{21}(F_z)(g)_0 \} +$$

$$+h^3\{(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2)^2 (F_x^2)_0 + (a_{12}\beta_{21})^2 (F_u^2)_0 (F)_0^2 + a_{12}\gamma_{21}(F_z^2)_0 (g)_0^2 +$$

$$+2(a_{11} + a_{12})(F)_0 \times [\alpha_2^2 / 2(F_{xx})_0 + \alpha_2\beta_{21} / 2(F_{xu})_0 (F)_0 +$$

$$+\beta_{21}\alpha_1(F_x)_0 (F_u)_0 + \frac{\gamma_{21}^2}{2}(F_{zz})_0 + \alpha_2\gamma_{21}(F_{xz})_0 (g)_0 + \frac{\beta_{21}}{2}(F_{uu})(F^2)_0 +$$

$$+\beta_{21}\gamma_{21}(F_{uz})_0 (F)_0 (g)_0 + \gamma_{21}\alpha(F_z)_0 (g_x)_0 + \gamma_{21}\gamma(F_z)_0 (g_u)_0 (F)_0 +$$

$$+\gamma_{21}\beta\left(F_z\right)_0\left(g_s\right)_0\Big]+a_{12}\beta_{21}\left(F_u\right)_0+a_{12}\gamma_{12}\left(F_u\right)_0\left(g\right)_0\Big\}+O\left(h^4\right). \quad (9)$$

$$Q_{[1,1]}=\left(a_{11}-a_{21}\right)k_1+\left(a_{12}-a_{22}\right)k_2=\left(a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22}\right)\left(F\right)_0+$$

$$+h\Big\{\Big[\left(a_{11}\alpha_1-a_{21}\alpha_2\right)\Big]\left(F_x\right)_0+\left(a_{12}-a_{22}\right)\beta_{21}\left(F_u\right)_0\left(F\right)_0+$$

$$+\left(a_{12}-a_{22}\right)\gamma_{21}\left(F_z\right)_0\left(g\right)_0\Big\}+h^2\Big\{\Big[\left(a_{11}-a_{21}\right)\alpha_1+\left(a_{12}-a_{22}\right)\alpha_2\Big]\left(F_{xx}\right)_0+$$

$$+\left(a_{12}-a_{22}\right)\frac{\alpha_2\beta_{21}}{2}\left(F_{xu}\right)_0\left(F\right)_0+\left(a_{12}-a_{22}\right)\frac{\beta_{21}^2}{2}\left(F_{uu}\right)_0\left(F^2\right)_0+$$

$$+\left(a_{12}-a_{22}\right)\beta_{21}\alpha_1\left(F_x\right)_0\left(F_u\right)_0+\left(a_{12}-a_{22}\right)\frac{\gamma_{21}^2}{2}\left(F_{zz}\right)_0\left(g^2\right)_0+$$

$$+\left(a_{12}-a_{22}\right)\alpha_2\gamma_{21}\left(F_{xz}\right)_0\left(g\right)_0+\left(a_{12}-a_{22}\right)\beta_{21}\gamma_{21}\left(F_{uz}\right)_0\left(F\right)_0\left(g\right)_0+$$

$$+\left(a_{12}-a_{22}\right)\gamma_{21}\alpha\left(F_z\right)_0\left(g_x\right)_0+\left(a_{12}-a_{22}\right)\gamma_{21}\gamma\left(F_z\right)_0\left(g_u\right)_0\left(F\right)_0+$$

$$+\left(a_{12}-a_{22}\right)\gamma_{21}\beta\left(F_z\right)_0\left(g_s\right)_0\Big\}+O\left(h^3\right). \quad (10)$$

Тоді

$$u\left(x_0+h\right)-u_1^{[1,1]}=\frac{1}{Q_{[1,1]}}\Big(h\left(F^2\right)_0\Big[a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22}-\left(a_{12}+a_{22}\right)^2\Big]+$$

$$+h^2\Big[\left(a_{11}-a_{21}\right)\alpha_1+\left(a_{12}-a_{22}\right)\alpha_2+\frac{1}{2}\left(a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22}\right)-$$

$$-2\left(a_{12}+a_{22}\right)\left(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2\right)\Big]\left(F\right)_0\left(F_x\right)_0+$$

$$+h^2\Big[\frac{1}{2}\left(a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22}\right)+\left(a_{11}-a_{22}\right)\alpha_1+\left(a_{12}-a_{22}\right)\beta_{21}-$$

$$-2\left(a_{11}+a_{12}\right)a_{12}\beta_{21}\Big]\left(F_u\right)_0\left(F^2\right)_0+h^2\Big[\frac{1}{2}\left(a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22}\right)+$$

$$+\left(a_{12}-a_{22}\right)\gamma_{21}-2\left(a_{11}+a_{12}\right)a_{12}\gamma_{21}\Big]\left(F\right)_0\left(F_z\right)_0\left(g\right)_0+O\left(h^3\right). \quad (11)$$

Вирази для коефіцієнтів чисельника при степенях h і h^2 мають вигляд:

$$h\left(F\right)_0^2:\ a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22}-\left(a_{11}+a_{12}\right)^2,$$

$$h^2\left(F\right)_0\left(F_x\right)_0:\left(a_{11}-a_{21}\right)\alpha_1+\left(a_{12}-a_{22}\right)\alpha_2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22}\right)-2\left(a_{11}+a_{12}\right)\left(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2\right),$$

$$h^2\left(F\right)_0\left(F_u\right)_0:\frac{1}{2}\left(a_{11}-a_{21}+a_{12}-a_{22}\right)+\left(a_{12}-a_{22}\right)\beta_{21}-2\left(a_{11}+a_{12}\right)a_{12}\beta_{21},$$

$$h^2 \left(F\right)_0 \left(F_z\right)_0 \left(g\right)_0 :$$

$$\frac{1}{2}\left(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}\right) + \left(a_{12} - a_{22}\right)\gamma_{21} - 2\left(a_{11} + a_{12}\right) a_{12}\gamma_{21}.$$

Прирівнявши коефіцієнти при h і h^2 до нуля, то одержимо наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22} - \left(a_{11} + a_{12}\right)^2 = 0,$$

$$\left(a_{11} - a_{21}\right)\alpha_1 + \left(a_{12} - a_{22}\right)\alpha_2 + \frac{1}{2}\left(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}\right) -$$

$$-2\left(a_{11} + a_{12}\right)\left(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2\right) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}\right) + \left(a_{12} - a_{22}\right)\beta_{21} - 2\left(a_{11} + a_{12}\right)a_{12}\beta_{21} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22}\right) + \left(a_{12} - a_{22}\right)\gamma_{21} - 2\left(a_{11} + a_{12}\right)a_{12}\gamma_{21} = 0. \quad (12)$$

При цьому локальна похибка матиме вигляд:

$$R_1^{[1,1]} = u\left(x_0 + h\right) - u_1^{[1,1]} = O\left(h^3\right).$$

Оскільки α, β, γ не входить в систему (12), то їх можна вибрати довільними, наприклад, покласти $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Система рівнянь (12) значно спроститься, якщо покласти $a_{11} + a_{12} = 1$, і набуде наступного вигляду:

$$a_{11} + a_{12} = 1, \quad a_{21} + a_{22} = 0,$$

$$\left(a_{11} - a_{21}\right)\alpha_1 + \left(a_{12} - a_{22}\right)\alpha_2 + \frac{1}{2} - 2\left(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2\right)_1 = 0,$$

$$\frac{1}{2} + \left(a_{12} - a_{22}\right)\beta_{21} - 2a_{12}\beta_{21} = 0,$$

$$\frac{1}{2} + \left(a_{12} - a_{22}\right)\gamma_{21} - 2a_{12}\gamma_{21} = 0. \quad (13)$$

Розв'язок даної системи має вигляд:

$$a_{11} = 1 - a_{12}, \; a_{21} = a_{12} - \frac{1}{2\beta_{21}}, \; a_{22} = \frac{1}{2\beta_{21}} - a_{12},$$

$$\alpha_2 = \beta_{21} + \left(1 - 2\beta_{21}\right)\alpha_1, \; \gamma_{21} = \beta_{21}, \quad (14)$$

де $\alpha_1, a_{12}, \beta_{21}\left(\beta_{21} \neq 0\right)$ — параметри.

Зауважимо, якщо у формулі (6) взяти два і три або у формулі (7) один або два поверхи скінченого ланцюгового дробу, то отримаємо відповідно метод першого та другого порядку точності. Поклавши у формулах (14) $a_{21} = a_{22} = 0$, то після нескладних спрощень, одержимо метод з [10].

3. Метод з двосторонньою оцінкою локальної похибки. У зв'язку з відсутністю ефективного способу оцінки похибки наближеного розв'язку виникла необхідність розробки двосторонніх методів. Побудуємо розрахункові формули, які дають двосторонні наближення до точного розв'язку задачі (1)-(2), а саме, щоб похибка в точці $x = x_1$ мала вигляд:

$$R_1^{[1,1]} = \Big\{ \omega_1 h^2 \left(F\right)_0 \left(F_x\right)_0 + \omega_2 h^2 \left(F\right)_0^2 \left(F_u\right)_0 +$$

$$+ \omega_3 \left(F\right)_0 \left(F_z\right)_0 \left(g\right)_0 + O\left(h^3\right) \Big\} \Big/ Q_{[1,1]} .$$

При різних значеннях $\omega_i \; \left(i = 1, 2, 3\right)$ отримуємо відповідно різні двосторонні розрахункові формули.

Поклавши $a_{11} + a_{12} = 1$, система рівнянь (13) набуде наступного вигляду:

$$a_{11} + a_{12} = 1, \;\; a_{21} + a_{22} = 0,$$

$$\left(1 - a_{21}\right)\alpha_1 - a_{22}\alpha_2 + \frac{1}{2} - 2\alpha_1 = \omega_1 ,$$

$$\frac{1}{2} - a_{22}\beta_{21} = \omega_2 , \quad \frac{1}{2} - a_{22}\gamma_{21} = \omega_3 . \tag{15}$$

Розглянемо конкретні випадки розв'язків системи (15):

1. У випадку, якщо $\omega_2 = \omega$, а $\omega_1 = \omega_3 = 0$, то отримаємо такі розв'язки

1а) $\alpha_1 = \alpha_2$:

$$a_{11} = 1 - a_{12} , \; a_{21} = a_{12} - \frac{1}{2\gamma_{21}} , \; a_{22} = -a_{21} ,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2} , \; \beta_{21} = \left(1 - 2\omega\right)\gamma_{21}, \tag{16}$$

де a_{12}, $\gamma_{21}\left(\gamma_{21} \neq 0\right)$ — параметри.

1б) $\alpha_1 \neq \alpha_2$:

$$\alpha_2 = \gamma_{21} + \left(2\gamma_{21} - 1\right)\alpha_1 , \; \beta_{21} = \left(1 - 2\omega\right)\gamma_{21},$$

$$a_{11} = 1 - a_{12} , \;\; a_{21} = -a_{22} , \; a_{22} = \frac{1}{2\gamma_{21}} , \tag{17}$$

де $\alpha_1, \gamma_{21}\left(\gamma_{21} \neq 0\right)$ — параметри. Тоді

$$R_1^{[1,1]}\left(\omega_2=\omega\right)=u\left(x_0+h\right)-u_1^{[1,1]}=\{\omega h^2\left(F\right)_0\left(F_u\right)_0+O\left(h^3\right)\}/Q_{[1,1]}.$$

2. Поклавши $\omega_2=\omega_3=\omega$ і $\omega_1=0$, отримаємо наступні розв'язки:

2а) $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{2}$,

$$a_{11}=1+a_{22}+\frac{2\omega-1}{2\beta_{21}},\ a_{12}=\frac{1-2\omega}{2\beta_{21}}-a_{22},$$

$$a_{21}=a_{22}-\frac{1-2\omega}{2\beta_{21}},\ a_{21}=\ -a_{22},\ \gamma_{21}=\beta_{21}, \tag{18}$$

де a_{22}, $\beta_{21}\left(\beta_{21}\neq 0\right)$ — параметри.

2б) $\alpha_1\neq\alpha_2$:

$$\alpha_2=\alpha_1+\frac{\left(1-2\alpha_1\right)}{\left(1-2\omega\right)}\beta_{21},\ a_{11}=1+a_{22}+\frac{2\omega-1}{2\beta_{21}},$$

$$a_{12}=\frac{1-2\omega}{2\beta_{21}}-a_{22},\ a_{21}=-a_{22},\ \gamma_{21}=\beta_{21}, \tag{19}$$

де a_{22}, $\alpha_1,\beta_{21}\left(\beta_{21}\neq 0\right)$ параметри. При цих значеннях параметрів

$$R_1^{[1,1]}\left(\omega_2=\omega_3=\omega\right)=\{\omega h^2[\left(F\right)_0\left(F_u\right)_0+\left(F\right)_0\left(F_z\right)\left(g\right)_0]+O\left(h^3\right)\}/Q_{[1,1]}.$$

3. Якщо покласти $\omega_1=\omega_2=\omega_3=\omega$, то

$$a_{11}=1-a_{12},\ a_{21}=a_{12}-\frac{1-2\omega}{2\,\beta_{21}},\ a_{22}=\frac{1-2\omega}{2\,\beta_{21}}-a_{12},$$

$$\gamma_{21}=\beta_{21},\ \alpha_2=\beta_{21}+\alpha_1\left(1-\frac{2\,\beta_{21}}{1-2\omega}\right),\ (\omega\neq 1/2), \tag{20}$$

де a_{12}, $\beta_{21}\left(\beta_{21}\neq 0\right)$ — параметри. Тоді

$$R_1^{[1,1]}\left(\omega\right)=\left\{\omega h^2\ \left[\left(F\right)_0\left(F_x\right)_0+\left(F\right)_0^2\left(F_u\right)_0+\left(F\right)_0\left(F_z\right)_0\left(g\right)_0\right]+O\left(h^3\right)\right\}/Q_{[1,1]}.$$

Зауважимо, що у формулах (18) параметри $\alpha_1,\alpha_2,\beta_{21},\gamma_{21}$ не містять параметр двосторонності ω. Це означає, що не потрібно додаткових обчислень правої частини інтегро-диференціального рівняння (1) для знаходження двостороннього наближення до точного розв'язку. Формули (20) при $\alpha_1=0$ також не містять параметр ω.

Таким чином, запропоновано числовий метод, який дозволяє знаходити наближення до точного розв'язку задачі (1)-(2) першого та другого порядку точності, а також отримувати двосторонні наближення без додаткових обчислень правої частини рівняння (1).

Для знаходження наближень у наступних точках $x_n\ (n \geq 2)$ користуємося способом рухомого початку. Представивши рівняння (1) у вигляді

$$u'(x) = F\left[x, u(x), w_n(x) + W(x)\right],$$

де

$$w_n(x) = \int_{x_0}^{x_n} g\left(x, s, u(s)\right) ds\ ,\ W(x) = \int_{x_n}^{x} g\left(x, s, u(s)\right) ds\ ,$$

отримаємо задачу з новим початком інтегрування , для розв'язування якої використовуються формули виду (6)-(8), причому наближення до знаходимо за допомогою квадратурних формул.

Висновок. Виведено розрахункові формули розв'язування задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь, що базуються на неперервних дробах. При відповідних значеннях параметрів отримано наближення до точного розв'язку задачі Коші (1)-(2) першого та другого порядку точності.

Знайдено множину параметрів, при яких отримуємо двосторонні розрахункові формули. Пара формул, що відповідають двом значенням, які відрізняються лише знаком, складають розрахункові формули двостороннього методу. Одна з них буде давати верхнє наближення до точного розв'язку, а інша — нижнє наближення. За наближений розв'язок приймаємо півсуму двосторонніх наближень. Модуль піврізниці двосторонніх наближень дає похибку методу.

Запропоновано числовий метод, який дозволяє знаходити наближення до точного розв'язку задачі (1)-(2) першого та другого порядку точності, а також отримувати двосторонні наближення без додаткових обчислень правої частини рівняння (1)

Запропоновану методику знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь можна застосувати для побудови числових методів більш високого порядку точності.

Список використаних джерел:

1. Чаплыгин С. А. Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1950. 103 с.
2. Добронец Б. С., Шайдуров В. В. Двусторонние численные методы. Новосибирск: Наука. 1990. 206 с.
3. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. Том II. Москва: Наука, 1977. 400 с.
4. Пелех Я. М., Кунинець А. В., Берегова Г. І., Магеровська Т. В. Методи розв'язування початкової задачі з двосторонньою оцінкою похибки. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2021. Вип. 33. С. 88-92.

5. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. Обобщения и приложения. Москва: Мир. 1986. 502 с.
6. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Москва: Мир. 1985. 416 с.
7. Brezinski C., Redivo-Zaglia M. New representations of Pad´e. Pad´e-type and partial Pad´e approximants. *J. Comput. Appl. Math*. 2015. № 284. P. 69-77.
8. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. Москва: Мир, 1990. 512 с.
9. Butcher J. C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Third Edition. London: John Wiley & Sons. 2016. 544 p.
10. Coroian I. Asupra metodei Runge-Kutta-Fehlberg, pentru ecuatia integrala neliniara de tip Volterra. *Stud. Cerc. Math*. 1974. Vol 26. № 4. P. 505-511.

METHODS OF SOLVING THE INITIAL VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH LOCAL ERROR ESTIMATION

One of the modern scientific methods of researching phenomena and processes is mathematical modeling, which in many cases allows replacing the real process and makes it possible to obtain both a qualitative and a quantitative picture of the process. Since the exact solutions of such models can be found in very individual cases, it is necessary to use approximate methods. In applied mathematics, fractional-rational approximations, which under appropriate conditions give a high rate of convergence of algorithms, bilateral and monotonic approximations have become widely used.

In this work, using the technique of constructing one-step methods for solving the initial problem for ordinary differential equations and developing the sought solution into a finite continued fraction, a numerical method for solving the Cauchy problem for nonlinear integro-differential equations of the Volterra type is proposed. The values of the parameters at which the nonlinear method of the first and second order of accuracy is obtained are found.

Computational formulas are proposed, which at each integration step allow obtaining an upper and lower approximation to the exact solution without additional references to the right-hand side of the integro-differential equation. Calculation formulas, in which the main terms of the local error differ only in sign, form a two-sided method. We take the half-sum of bilateral approximations to the exact solution as the approximate solution at the given integration point, and the absolute value of the half-difference determines the error of the obtained result.

The modular nature of the proposed algorithms makes it possible to obtain several approximations to the exact solution of the initial problem for the nonlinear integro-differential equation at each point of integration. The comparison of these approximations gives useful information in the matter of choosing the integration step or in assessing the accuracy of the result.

Key words: *integro-differential equation, initial value problem, Runge-Kutta methods, local error, bilateral approximations.*

Отримано: 27.10.2022