УДК 004.56
DOI: 10.32626/2308-5916.2023-24.56-67

А. Ю. Прокофьєв, аспірант

Національний університет «Одеська політехніка», м. Одеса

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ТОЧНОСТІ МОДЕЛЕЙ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розробка та удосконалення методів розрахунку та контролю процесів функціонування та експлуатаційних режимів технічних систем, в тому числі електронних управляючих та моделюючих засобів, являє собою серйозну наукову проблему, що має актуальне прикладне значення. Проведення розрахунків з метою забезпечення якісної оптимізації параметрів технічних засобів за різними категоріями, організації ефективного виробничого та експлуатаційного контролю можливо лише на основі створення дієвих методів та алгоритмів аналізу процесів функціонування та точності складних структур та принципових схем систем та пристроїв, які проектуються і розробляються. При розробці зазначених методів та алгоритмів виникає комплекс складних наукових задач, розв'язок яких потребує проведення низки наукових досліджень.

Розглядається задача оцінки вплив впливу відхилень параметрів нелінійних динамічних систем на їх рух та показники якості.

Як при аналізі точності динамічних систем, так і при розв'язуванні задач синтезу з умов точності, важливе значення має можливість аналітичного вираження додаткового руху динамічних систем. Отримано та проаналізовано відповідні формули щодо відхилень траєкторій динамічної системи відносно опорної траєкторії та відносно збудженого руху.

Запропоновано методику раціонального визначення вузлів інтерполяції при обчисленні функціоналів від вихідних координат динамічної системи. Методика відноситься до вибору вузлів гаусовських квадратур при обчисленні показників якості динамічних систем з найменшою похибкою обчислень.

Ключові слова: *похибки обчислень, оцінки точності обчислень, квадратура, опорна траєкторія.*

Вступ. У досить загальному випадку математичний опис динамічної системи – суть її математична модель (ММ) – являє собою сукупність рівнянь

$$F\left(a,\mathbf{Q},\frac{d\mathbf{Q}}{d\,a},\mathbf{P}\right)=0 \tag{1}$$

стану системи, рівнянь

$$G\left(a,\mathbf{Q},\mathbf{Y},\mathbf{P}\right)=0 \tag{2}$$

вихідного сигналу $\mathbf{Y}$ динамічної системи та обмежень $U \in R_U(U)$ на відповідні змінні U.

При цьому прийнято наступні позначення: a – аргумент; $\mathbf{Q}$ – n-мірний вектор узагальнених координат динамічної системи; $\mathbf{Y}$ – l-мірний вектор вихідних координат динамічної системи; $\mathbf{P}$ – m-мірний вектор параметрів динамічної системи; $R_U(U)$ – область завдання змінних $U \in \{a, \mathbf{Q}, \mathbf{Y}, \mathbf{P}\}$.

Досліджуваними показниками точності динамічної системи є певні функціонали $J(\mathbf{Y})$, визначені на вихідних координатах динамічної системи. Основну проблему при аналізі та синтезі систем (в тому числі і динамічних) складає оцінка впливу збуджень параметрів на рух та показники якості системи. Це зумовлено тим, що вже сама побудова ММ системи неодмінно пов'язано з процесами апроксимації, так і тим, що при реалізації системи неможливо досягнути точного спів падіння фактичних параметрів системи з розрахунковими (номінальними, опорними, ідеальними тощо) значеннями цих параметрів та ММ [1]. Крім того, в реальних умовах функціонування динамічної системи її параметри змінюються внаслідок зношення, старіння, зміни параметрів зовнішнього середовища, тощо. На динамічній системі також позначаються різного роду впливи з боку взаємодіючих або протидіючих систем. Для подальших розмірковувань, беручи до уваги описи динамічних систем досить загального виду (1), (2), конкретизуємо ММ динамічних систем, які розглядаються у подальшому, обмежившись моделями у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) у нормальній формі:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = f(t, \mathbf{Y}, \mathbf{P}), \tag{3}$$

$$Y_i(t_s) = P_i;\ \left(i = \overline{1,l}\right),\ U \in R_U(U):\ U \in \{t, \mathbf{Y}, \mathbf{P}\}. \tag{4}$$

До компонент вектора параметрів $\mathbf{P}$ включено початкові умови (ПУ) виду $\mathbf{Y}(t_s)$. Додатковий рух $\Delta\mathbf{Y} = \mathbf{Y} - \overline{\mathbf{Y}}$ координат динамічної системи (3), (4) задовольняє системі рівнянь

$$\frac{d\Delta\mathbf{Y}}{dt} = f(t, \mathbf{Y}, \mathbf{P}) - \overline{f}\left(t, \overline{\mathbf{Y}}, \overline{\mathbf{P}}\right), \tag{5}$$

$$\Delta\mathbf{Y}(t_s) = \mathbf{Y}(t_s) - \overline{\mathbf{Y}}(t_s), \tag{6}$$

де рискою зверху позначено не збуджені величини. В (5) прийнято, що збудження правих частин f такі, що не спричиняють підвищення порядку системи.

Мета та задачі дослідження. *Метою* роботи є визначення умовно оптимальних вузлів інтерполяції при аналізі динамічних систем та оцінка показників точності нелінійних динамічних систем.

Викладення основного матеріалу дослідження. Для досягнення поставленої мети дослідження спочатку виконаємо *апроксимацію додаткового руху збуджених динамічних систем*.

Виконаємо лінеаризацію правої частини (5) для додаткового руху у наступній формі:

$$\frac{d\Delta\mathbf{Y}}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Y}}\right)_{(\mathbf{Y},\mathbf{P})=(\bar{\mathbf{Y}},\bar{\mathbf{P}})} \cdot \Delta\mathbf{Y} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}}\right)_{(\mathbf{Y},\mathbf{P})=(\bar{\mathbf{Y}},\bar{\mathbf{P}})} \cdot \Delta\mathbf{P} + \Delta f\left(\bar{\mathbf{Y}},\bar{\mathbf{P}}\right), \quad (7)$$

де

$$\Delta f\left(\bar{\mathbf{Y}},\bar{\mathbf{P}}\right) = f\left(t,\bar{\mathbf{Y}},\bar{\mathbf{P}}\right) - \bar{f}\left(t,\bar{\mathbf{Y}},\bar{\mathbf{P}}\right) + O_Y\left(\|\mathbf{Y}\|\right) + O_P\left(\|\mathbf{P}\|\right). \quad (8)$$

В (7), (8) використано розкладання правої частини (3) в ряд Тейлора відносно не збудженої (*опорної*) траєкторії.

Зважаючи на те, що елементи матриць Якобі $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{Y}}$ та $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}}$ залежать від опорної траєкторії $\mathbf{Y}$ (або $\bar{\mathbf{Y}}$), система (6)-(8), у загальному випадку, є *лінійною* системою зі змінними коефіцієнтами, і, таким чином, може бути розв’язаною лише числовим чином. Для розв’язування ж задач синтезу часто необхідно мати явні аналітичні залежності певних функцій $U(\mathbf{Y})$ вихідних координат від параметрів системи, причому вибір функцій $U_J(\mathbf{Y}) = \Psi_J(\mathbf{Y})$ визначається функціоналом $J(\mathbf{Y})$, який оцінюється. В такому разі шукану аналітичну залежність може бути записано наступним чином:

$$U_J(t,\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^{q_U} f_{sk}\left(t,\bar{\mathbf{P}}\right) \cdot \varphi_k(\mathbf{P}) + \Delta_U, \quad (9)$$

де $f_{sk}\left(t,\bar{\mathbf{P}}\right)$ – матриці формальних коефіцієнтів при наборі апроксимуючих функцій $\varphi_k(\mathbf{P})$; Δ_U – похибка апроксимації [2, 3] (або векторна статична характеристика безінерційної нелінійності при статистичній лінеаризації [5]). Вибір тих або інших апроксимуючих функцій $\varphi_k(\mathbf{P})$ залежить від специфікації вихідної системи; від функціоналів $J(\mathbf{Y})$, які оцінюються, та наявної інформації щодо збуджень параметрів динамічної системи. Ці фактори, у підсумку, визначають можливі методи для побудови залежностей виду (9).

Методи, що використовуються для побудови представлення (9), можна поділити на дві групи. В першій виконуються певні перетворення в системі (3), в результаті яких отримуються рівняння, що мають за свій розв'язок точні або наближені значення шуканих функцій $f_{sk}\left(t,\bar{\mathbf{P}}\right)$. У другій групі методів обирається конкретний вид представлення (9), а функції $f_{sk}\left(t,\bar{\mathbf{P}}\right)$ визначаються або методом невизначених коефіцієнтів [5] (так, наприклад, при апроксимації (9), точною для поліномів ступеня q_U), або визначаються з умов мінімізації критерію, що залежить від специфіки динамічної системи та вимог показників якості (зокрема, при застосуванні статистичної лінеаризації нелінійностей [1-3], чи – апроксимації функції $U\left(\mathbf{Y}\right)$ поліномами Чебишева, Ерміта, Лагера, Лежандра [4], а також набором ортогональних функцій, що визначаються специфікою досліджуваної динамічної системи [6]).

Визначення умовно оптимальних вузлів інтерполяції при аналізі нелінійних динамічних систем. Приймемо, як і раніше, що математичний опис динамічної системи являє собою сукупність рівнянь стану $F\left(a,\mathbf{Q},\dfrac{d\mathbf{Q}}{da},\mathbf{P}\right)=0$, рівнянь $G\left(a,\mathbf{Q},\mathbf{Y},\mathbf{P}\right)=0$ вихідної координати (вихідного сигналу динамічної системи) та обмежень $U\in R_U\left(U\right)$ на відповідні змінні U. Шуканими характеристиками досліджуваної системи в задачах аналізу є деякі функціонали $J\left(\mathbf{Y}\right)$, визначені на вихідних координатах динамічної системи. У більшості випадків числовими методами можна отримати лише дискретні значення компонентів вектора вихідних координат $\mathbf{Y}$ при дискретних значеннях аргументу a та компонентів вектора параметрів системи $\mathbf{P}$. В цих умовах для обчислення функціоналів $J\left(\mathbf{Y}\right)$ можна використати різні апроксимації неперервних залежностей $\mathbf{Y}=\left(a,\mathbf{P}\right)$ вектора вихідних координат $\mathbf{Y}$ від параметрів динамічної системи, зокрема такі, що розглянуто вище (вибір тої або іншої апроксимації залежить від вихідних даних щодо параметрів $\mathbf{P}=\left\{P_i\right\}$, $i=\overline{1,m}$).

При відомих, наприклад, моментах зв'язку

$$\mu_{r_1 r_2 \ldots r_m}=E\left\{\prod_{j=1}^{m}\left[P_j-E\left(P_j\right)\right]^{r_j}\right\}$$

параметрів $\mathbf{P}=\left\{P_i\right\}$, $i=\overline{1,m}$ раціонально використовувати *поліноміальну апроксимацію* залежностей вектора координат $\mathbf{Y}=\left(a,\mathbf{P}\right)$ або певних функцій $U_J\left(\mathbf{Y}\right)$ вектора координат від параметрів динамічної системи $\mathbf{P}=\left\{P_i\right\}$, $i=\overline{1,m}$. Шукані характеристики $J\left(\mathbf{Y}\right)$ при цьому можуть визначатися методами степеневих рядів або методами інтерполяції функцій координат [7]. Можна стверджувати, що при застосуванні останніх виникає можливість такого вибору вузлів інтерполяції параметрів $\mathbf{P}$, при якому мінімізується деякий функціонал $e_U\left(R_{U_J q+1}(a,\mathbf{P})\right)$ від залишкових членів $R_{U_J q+1}(a,\mathbf{P})$, які використовуються апроксимацією залежностей $U_J(\mathbf{Y})=U_J(a,\mathbf{P})$.

Для подальших розмірковувань розглянемо залишкові члени інтерполяційних формул Ньютона першого та другого видів для функцій $U_J(a,\mathbf{P})$, позначаючи індексами I та II відповідні доданки в цих формулах:

$$U_J(a,\mathbf{P})=N_{U_J}(a,\mathbf{P})_{q,J}+R_{U_J q+1}(a,\mathbf{P});\ \left(J\in\{I,II\}\right), \tag{10}$$

$$N_{U_J}(a,\mathbf{P})_{q,I}=\sum_{r_1=0}^{q_1}\dots\sum_{r_m=0}^{q_m} d_{U_J r_1\dots r_m}\prod_{j=1}^{m}\prod_{t_j=0}^{r_j-1}\left(P_j-P_{jt_j}\right). \tag{11}$$

$$N_{U_J}(a,\mathbf{P})_{q,II}=U_J(P_0)+\sum_{k=1}^{q}\dots\sum_{r_1+\dots+r_m=k}^{q_m} d_{U_J r_1\dots r_m}\prod_{j=1}^{m}\prod_{t_j=0}^{r_j-1}\left(P_j-P_j t_j\right). \tag{12}$$

$$R_{U_J q+1 I}(a,\mathbf{P})=\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}\sum_{j_1=1}^{m-(r-1)}\ \sum_{j_2=1+j_1}^{m-(r-2)}\dots\sum_{j_r=1+j_{r-1}}^{m}\prod_{k=1}^{r}D_{r_1\dots r_m}^{(q+1)_I}\prod_{t_{j_k}}^{q_{j_k}}\left[\frac{P_{j_k}-P_{j_k}t_{j_k}}{\left(q_{j_k}+1\right)!}\right], \tag{13}$$

$$R_{U_J q+1 II}(a,\mathbf{P})=\sum_{r_1+\dots+r_m=q+1}\left(D_{r_1\dots r_m}^{(q+1)_{II}}\right)\prod_{j+1}^{m}\prod_{t_j=0}^{r_j}\left[\frac{P_{j_k}-P_{j_k}t_{j_k}}{\left(r_j\right)!}\right]. \tag{14}$$

У виразах (10) та (11)

$$d_{U_J r_1\dots r_m}=\sum_{s_1=0}^{r_1}\dots\sum_{s_m=0}^{r_m}\left[\frac{U_J\left(P_{1s_1},\dots,P_{ms_m}\right)}{\prod_{j=1\, t_j=0}^{m}\ \prod_{t_j\neq s_j}^{r_j}\left(P_{js_j}-P_{jt_j}\right)}\right]$$

– розділені різниці k -го порядку ($k=\sum_{j=1}^{m}r_j$) функції $U_J(a,\mathbf{P})$.

В (13), (14) частинні похідні

$$D_{r_1\dots r_m}^{(q+1)_I}=\left[\frac{\partial^{\left(q_{j_1}+1\right)+\left(q_{j_2}+1\right)+\dots+\left(q_{j_r}+1\right)}U_J(a,\mathbf{P})}{\partial P_{j_1}^{q_{j_1}+1}\,\partial P_{j_1}^{q_{j_2}+1}\dots\partial P_{j_r}^{q_{j_r}+1}}\right]_{P=P_r}$$

$\left(r_j = \left(1+q_j\right)\cdot\delta_{j_{ik}}, \left(k=\overline{1,r}; i_k=\overline{1,m}\right)\right)$, $\delta_{j_{ik}}$ – символ Кронекера,

$$D_{r_1 \ldots r_m}^{(q+1)_{II}} = \left[\frac{\partial^{(q+1)} U_J(a,\mathbf{P})}{\partial P_1^{r_1}\,\partial P_2^{r_2} \ldots \partial P_m^{r_m}}\right]_{P=P_s} \times \left(\sum_{j=1}^{m} r_j = q+1\right)$$

обчислюються в точках $P_r = \left(P_{1_{r_1}},\ldots,P_{m_{r_m}}\right)$ та $P_s = \left(P_{1_{s_1}},\ldots,P_{m_{s_m}}\right)$, причому компоненти $P_{j_{r_j}}$ та $P_{j_{s_j}}$ належать найбільшому інтервалу, що утворюється для відповідного індексу j числами P_j, P_{jt_j} $\left(t_j = \overline{0,q_j};\ j=\overline{1,m}\right)$.

З формули (13) видно, що якщо

$$J(\mathbf{Y}) = E\left[U_J(\mathbf{Y})\right] = \int\limits_{R_{\mathbf{P}}(\mathbf{P})} U_J(a,\mathbf{P})\rho(\mathbf{P})\,d\mathbf{P} = \sum_{R_{\mathbf{P}}(\mathbf{P})} U_J(a,\mathbf{P}) \quad (15)$$

та для функціоналу $E[\cdot]$ виконується співвідношення

$$E\left[\prod_{j=1}^{m} P_j^{r_j}\right] = \prod_{j=1}^{m} E\left(P_j^{r_j}\right), \quad (16)$$

то вибір вузлів гаусовських квадратур (вузлів інтерполяції) по окремих змінних P_j забезпечує найменшу похибку

$$\Delta J(\mathbf{Y}) = E\left[R_{U_J\, q+1IN}(a,\mathbf{P})\right] \quad (17)$$

обчислення шуканої характеристики у порівнянні з використанням апроксимації $U_J(a,\mathbf{P})$ будь-яких інших поліномів ступеня q_j по змінних P_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$ за умови точного обчислення розділених різниць $d_{U_J\, r_1 \ldots r_m}$ у виразах (11), (12). Практично зазначені розділені різниці та частинні значення $U_J\left(P_{1s_1},\ldots,P_{ms_m}\right)$ функції $U_J(a,\mathbf{P})$ обчислюються з похибкою. Крім того, шукані характеристики можна обчислювати з використанням тих самих вузлів та формули (12), а також при виконанні умови (16). Вузли гаусовських квадратур, які при цьому використовуються, будемо називати *умовно оптимальними вузлами інтерполяції*.

Оцінка показників точності нелінійних динамічних систем. Практично у всіх задачах дослідження динамічних систем, оцінка показників якості системи та її елементів може бути отримана лише числовими методами із використанням засобів обчислювальної техніка (ОТ). При вирішенні питань формування комплекту програм щодо аналізу точності та синтезу елементів динамічної системи необхідно врахувати загальнометодологічну вимогу комплексного дослідження впливу збуджень всіх складових ММ на результат розв'язку конкретної технічної задачі, що, в даному випадку, підпадає під класифікацію задачі *дослідження операцій*.

Під розглядом впливу всіх складових ММ динамічної системи тут будемо розуміти оцінку впливу не тільки параметрів моделі (3), (4), але і таких факторів як: зміна вектора критеріїв $J(\mathbf{Y})$, варіація границь областей завдання параметрів динамічної системи $R_U(U)$, варіація допустимих похибок ΔJ_t показників якості $J(\mathbf{Y})$ та інших факторів з урахуванням взаємозв'язків елементів досліджуваної динамічної системи з оточуючим середовищем та системами більш високих рівнів ієрархії.

Значимість будь-якого фрагменту математичного опису динамічної системи для оцінки функціонала якості $J(\mathbf{Y})$ визначається долею внеску цього фрагменту у *сумарну похибку* оцінки функціоналу, який обчислюється. Природним тому вважати незначними відносно функціоналу $J(\mathbf{Y})$ ті члени f_{r_i} в описі динамічної системи, сумарний внесок яких

$$\Delta J_\Sigma = \sum_i \Delta J\left(f_{r_i}\right) \tag{18}$$

у функціонал $J(\mathbf{Y})$, що обчислюється, складає від допустимої похибки ΔJ_t оцінки функціоналу $J(\mathbf{Y})$ долю δJ_t, якою можна знехтувати:

$$\Delta J_\Sigma \le \delta J_t \cdot \Delta J_t . \tag{19}$$

І навпаки, якщо внесок $\Delta J\left(f_{r_i}\right)$ фрагменту f_{r_i} у функціонал $J(\mathbf{Y})$ більше за допустиму похибку ΔJ_t, то фрагмент f_{r_i} у математичному описі динамічної системи є значущим для функціоналу $J(\mathbf{Y})$.

Таким чином, якщо співвідношення (18), (19) для нелінійних частин апроксимуючого агрегату

$$U_J(a,\mathbf{P}) = \Psi_J(t,\mathbf{P}) \tag{20}$$

виконуються, то лінійна частина, яка залишилася, може бути використана для оцінки шуканого функціоналу з точністю, що вимагається.

У загальному вигляді агрегат (20) можна записати наступним чином:

$$U_J(a,\mathbf{P}) = \Psi_J(t,\mathbf{P}) = \sum_{id \in J_c} \varpi_{id} \cdot C_{id}(t,\mathbf{P}), \tag{21}$$

де ϖ_{id} – характеризує суттєву не лінійність агрегату (20), $C_{id}(t,\mathbf{P})$ – лінійна частина агрегату (20), id – індекс, а J_c – область апроксимації.

В рамках лінійної теорії точності коефіцієнти лінійної частини агрегату (20), тобто $C_{id}(t,\mathbf{P})$, можна розглядати як *узагальнені функції чутливості* вектора координат $\mathbf{Y}$ динамічної системи (або певної функції) $U_J(\mathbf{Y})$) по відношенню до параметрів $\mathbf{P}_{id}$ $(id \in J_c)$ системи досить загального виду.

Для обчислення функцій чутливості в компонентах $C_{id}(t,\mathbf{P})$ агрегату (20) необхідно формування відповідних систем рівнянь чутливості по параметрах $\mathbf{P}_{id}$. Принагідно слід зазначити, що однією з труднощів використання функцій чутливості полягає у складності контролю правильності побудови системи рівнянь чутливості. Одним із способів такого контролю може бути використання *інваріантів чутливості* [8]. В загальному випадку використання апроксимацій $C_{id}(t,\mathbf{P})$ $(id \in J_c)$ для контролю рівнянь чутливості необхідним є модуль числового диференціювання для порівняння функцій чутливості, які визначаються, з відповідними розділеними різницями.

Для розв'язування систем рівнянь чутливості можна скористатися методом фундаментальних та зведених систем [5], які (методи), як показує розв'язування прикладних задач, дають результати близькі до розв'язків систем рівнянь чутливості числовими методами, що ґрунтуються на розв'язуванні рівнянь стану системи [5]. У загальній системі диференціальних рівнянь, яка містить рівняння стану та систему рівнянь чутливості, змінні, які інтегруються, доцільно поділяти на «швидкі» та «повільні» компоненти, що зумовлено повільнішою швидкістю зміни функцій чутливості по відношенню до швидкості зміни компонент вектору $\mathbf{Y}$ координат системи.

Описаний вище метод визначення умовно оптимальних вузлів інтерполяції при адитивно збуджених параметрах дозволяє при аналізі динамічної системи комплексно врахувати поточні моментні характеристики повної похибки оцінки шуканого функціоналу $J(\mathbf{Y})$ методом інтерполяції координат (МІК) або функцій координат (МІФК) [9]. Ця особливість зазначених методів породжує замкненість їх алгоритмів відносно операцій визначення моментних характеристик вектору $\mathbf{Y}$ координат системи, що дозволяє, наприклад, отримати моменти зв'язку вектору $\mathbf{Y}$ координат системи на кожному кроці числового диференціювання системи (3), (4) з оптимальним урахуванням обчислювальних та наслідкових похибок обчислення відповідних характеристик. Зважаючи на те, що в алгоритмах МІК та МІФК немає потреби перетворення ММ досліджуваної динамічної системи, їх реалізація забезпечує однорідний обчислювальний процес при корегуваннях та змінах відповідних ММ в задачах дослідження складних та адаптивних систем, а також в задачах імітаційного моделювання.

Результати числового дослідження. В якості прикладної задачі дослідження динамічної системи розглядалася задача обчислення функціоналів $J(\mathbf{Y})$ інтегрального усереднення з вагою $g(\mathbf{V})$ функцій $U_J(\mathbf{V})$, завданих в областях $R_V(\mathbf{V})$ зміни цих функції (які виступають змінними у даній задачі). В даному випадку, при аналізі наявного (заданого) закону управління динамічною системою, процес визначення шуканих характеристик $J(\mathbf{Y})$ вектору вихідних координат $\mathbf{Y}$ досліджуваної динамічної системи можна звести до обчислення квадратур виду:

$$J(\mathbf{Y}) = E\left[U_J(\mathbf{V})\right] = \int\limits_{R_V(\mathbf{V})} U_J(\mathbf{V}) g(\mathbf{V}) d\mathbf{V} = \sum_{s=0}^{q} U_J(V_s) \cdot \varpi_s . \quad (22)$$

У виразі (22) оператором $E[\cdot]$ позначено операція інтегрального усереднення функції $U_J(\mathbf{V})$ відносно вагової функції $\rho(\mathbf{V})$; ϖ_s – вагові множники частинних значень $U_J(V_s)$ функції $U_J(\mathbf{V})$ у вузлах інтерполяції $V_s \in R_V(\mathbf{V})$.

При проведенні числових досліджень було прийнято, що $R_{U_J\, q+1}(\mathbf{V})$ являє собою залишковий член інтерполяційної формули, яка використовується, причому вузли інтерполяції, в даному випадку обрано наступним чином (з метою мінімізації похибки):

$$\Delta J(R) = \int\limits_{R_V(\mathbf{V})} R_{U_j\, q+1}(\mathbf{V}) \rho(\mathbf{V})\, d\mathbf{V} = E\left[R_{U_j\, q+1}(\mathbf{V}) \right] , \quad (23)$$

в процесі визначення шуканого функціоналу $J(\mathbf{Y})$.

Нижче, в табл. 1 наведено визначені умовно оптимальні вузли інтерполяції $x_{s(d)}^{[n]}$ та ваги $\omega_{s(d)}^{[n]}$ для стандартних вагових функцій $g_d(x)$.

Таблиця 1

Віднайдені умовно оптимальні вузли інтерполяції $x_{s(d)}^{[n]}$ *та ваги* $\omega_{s(d)}^{[n]}$

d	n	s	$x_{s(d)}^{[n]}$	$\omega_{s(d)}^{[n]}$
nl	2	1	0,98657839	0,5
	3	0	0	0,64650391
		1	1,6593549	0,17674804
	4	1	0,69427468	0,43885805
		3	2,1212914	0,06114194
	5	0	0	0,48401647
		1	1,2141464	0,23371169
		3	2,4195594	0,02428006

Після визначення умовно оптимальних вузлів інтерполяції (табл. 1) та визначення у віднайдених вузлах частинних значень $U_J\left(V_{s(d)}^{[n]}\right)$ функції $U_J(\mathbf{V})$ у відповідності до (21) шукані характеристики $J(\mathbf{Y})$ легко обчислити по квадратурній формулі:

$$J(\mathbf{Y}) = E\left[U_J(\mathbf{V})\right] = \sum_{s=0}^{n-1} U_J\left(V_{s(d)}^{[n]}\right) \cdot \omega_{s(d)}^{[n]},$$

що забезпечує найвищу алгебраїчну ступінь точності.

Висновки. У роботі розглянуто задачу оцінки впливу відхилень параметрів нелінійних динамічних систем на їх рух та показники якості, зокрема, розроблено процедуру визначення умовно оптимальних вузлів інтерполяції при аналізі динамічних систем.

Також розроблено методологічну підтримку щодо оцінка показників точності нелінійних динамічних систем в умовах збудження складових їх ММ, причому дану задачу розглянуто в постановці задачі дослідження операцій.

Було показано, що при аналізі точності динамічних систем, рівно як і при розв’язуванні задачі синтезу на основі умов точності, важливе значення має можливість аналітичного вираження (тобто формалізації) додаткового руху досліджуваної системи. Отримано відповідні формули щодо відхилення траєкторій системи відносно опорної траєкторії та відносно збудженого руху.

На тестовому прикладі показано конструктивність запропонованих процедур та методів, а також практичну цінність останніх при оцінюванні показників точності реальних динамічних систем.

Список використаних джерел:

1. Касянчук М. М., Якименко І. З., Волинський О. І., Пітух І. Р. Теорія алгоритмів в розмежованій системі числення. *Вісник Хмельницького нац. ун-ту. Технічні науки*, 2011. № 3. С. 265-273.
2. Николайчук Я. М., Долинюк Т. М. та ін. Теоретичні основи виконання модульних операцій множення та експоненціювання в теоретико-числовому базисі Крестерсона-Раденмахера. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*, 2011. № 3. С. 123-130.
3. Музиченко В. С. Теорія чутливості: методи та прикладні аспекти. Київ: Либідь, 2016. 284 с.
4. Мокін, Б. І., Мокін В. Б., Мокін О. Б. Математичні методи ідентифікації динамічних систем. Вінниця: ВНТУ, 2010. 260 с.
5. Скопецький В. В., Стоян В. А., Кривонос Ю. Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. Київ: Наукова думка, 2002. 458 с.
6. Івасьєв С. В., Мотанюк О. В. Експериментальне дослідження програмної реалізації методів пошуку оберненого елемента за модулем. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2017. Т. 7. №3. С. 178-186.
7. Ладанюк А. П., Луцька Н. М., Кишенько В. Д. та ін. Сучасна теорія управління. Київ: Ліра-К, 2019. 372 с.
8. Кунченко Ю. П. Розробка теорії нелінійних методів опрацювання негаусівських сигналів на основі застосування стохастичних поліномів. *Праці IX Міжнародної науково-практичної конференції «Системи та засоби передачі та обробки інформації» (СЗПОІ-2005)*. Черкаси: ЧДТУ, 2005. С. 9-11.
9. Fainzilberg L. S. Mathematical methods for evaluating the usefulness of diagnostic features. Kiyv: Osvita Ukrainy, 2010. 152 p.

STUDY OF ACCURACY INDICATORS OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS MODELS

The development and improvement of methods for calculation and control of functioning processes and operating modes of technical systems, including electronic control and modeling tools, is a serious scientific problem that has actual applied significance. Carrying out calculations to ensure the qualitative optimization of the parameters of technical means in various categories, the organization of effective production and operational control is possible only on the basis of the creation of effective methods and algorithms for the analysis of functioning processes and the accuracy of complex structures and schematic diagrams of systems and devices that are designed and developed. When developing these methods and algorithms, a set of complex scientific problems arises, the solution of which requires a number of scientific studies.

The task of assessing the impact of deviations of the parameters of nonlinear dynamic systems on their movement and quality indicators is considered.

Both when analyzing the accuracy of dynamic systems and when solving synthesis problems with accuracy conditions, the ability to analytically express the additional motion of dynamic systems is of great importance. The corresponding formulas for the deviations of the trajectories of the dynamic system relative to the reference trajectory and relative to the excited motion were obtained and analyzed.

A method of rational determination of interpolation nodes when calculating functionals from the initial coordinates of the dynamic system is proposed. The technique refers to the selection of Gaussian quadrature nodes when calculating the quality indicators of dynamic systems with the smallest calculation error.

Key words: *calculation errors, calculation accuracy estimates, quadrature, reference trajectory.*

Отримано: 10.11.2023

УДК 621.377:681.5
DOI: 10.32626/2308-5916.2023-24.67-78

Л. Л. Прокофьєва, старший викладач,
А. А. Савєльєв, старший викладач

Національний університет «Одеська політехніка», м. Одеса

ЕВРИСТИЧНІ МОДЕЛІ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПРОЦЕДУР В ЗАДАЧАХ АНАЛІТИЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕНЗОМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ

Тенденція зростання складності та апаратних засобів систем вимірювання (АЗСВ) залишається сталою у зв’язку з масовим застосуванням засобів обчислювальної техніки в процесах вимірювання. Надлишкова складність створюваних нових АЗСВ, висока вартість комплектуючих та програмних засобів і достатньо низький рівень якості виробництва не дозволяють виключити можливість виникнення похибок, які спричиняють порушення працездатності АЗСВ в цілому, а також зниження їх продуктивності.

Термін «надійність АЗСВ», аналогічно терміну «надійність апаратури» в задачах діагностики тензометричної апаратури, означає, що «відмови», в даному випадку, як результат появи похибок, має якісно відмінну фізичну природу, ніж відмови суто АЗ. Це свідчить про можливість використання певних термінів та показників надійності технічних засобів при дослідженні якості АЗСВ. Зокрема, це виправдовується і необхідністю розв’язування задачі розподілу ресурсів власно між АЗ та програмними засобами (ПЗ) при забезпеченні заданого показника надійності СВ.

Перевірка правильності функціонування АЗ та ПЗ, що входять до складу СВ, здійснюється на етапі налаштування та тестування. Як правило, основним фактором налаштування є ви-