ЛОГІКА

УДК 161
DOI 10.35423/2078-8142.2023.2.2.6

Я. О. Кохан,
кандидат філософських наук,
молодший науковий співробітник відділу логіки та методології науки
Інституту філософії імені Г. С. Сковороди НАН України,
м. Київ, Україна
e-mail: yarkaen@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8958-772X

СИМВОЛІЧНА ЛОГІКА: ПОВЕРНЕННЯ ДО ВИТОКІВ. СТАТТЯ IV. ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ ТА ВІДНОШЕНЬ

Існує два типи задання функцій: операційне (спершу функція застосовується до аргументів) і граматичне (спершу вводиться значення функції). Всяка функція формує два відношення: пряме, або аверсне (за операційного задання) та зворотне, або реверсне (за граматичного задання). Прямим, або аверсним (відповідно, зворотним, або реверсним), графіком функції, називається множина послідовностей таких об'єктів, що останній (відповідно, перший) з них є значенням даної функції на послідовності інших із цих об'єктів як аргументів. У граничному випадку 0-місних функцій обидва графіки збігаються. Прямі графіки функцій під назвою пробігів значень функцій відкрив Ґотлоб Фреґе. Він підкреслював не тотожність функцій та їхніх графіків. На жаль, у теорії множин під впливом Джузепе Пеано було прийнято альтернативний підхід, за яким функції та відношення тотожні своїм графікам і, зрештою, одне одному. Цей підхід призводить до двох неприйнятних і взаємно суперечливих висновків, а тому має бути відкинутий.

Ключові слова: *логістика, категорії, відношення, графік функції, графік відношення, декартів добуток.*

Пропонована стаття є четвертою у серії. Метою всієї даної серійної розвідки є демонстрація того, що всю сучасну логіку як науку можливо перебудувати на новій категорійній основі, отримавши при цьому велику кількість теоретичних переваг.

У першій статті серії [2] було показано, що сучасна логіка категорійно не відповідає задуму її творця – Ґотлоба Фреґе, котрий передбачав побудову логіки функцій як дисиципліни, тоді як у дійсності в силу кількох причин поняття функції було замінене на поняття предиката, внаслідок чого сам Фреґе, а також Дузеппе Пеано (незалежно від Фреґе) та їхні послідовники збудували замість логіки функцій логіку предикатів, і остання є фактичним теоретичним стрижнем усієї сучасної символічної логіки. У тій самій статті автор уперше в літературі поставив питання про можливість побудови логіки функцій і окреслив позитивну відповідь на це питання.

Категорійна основа обох логік: предикатів та функцій – доволі подібна. Логіка предикатів ґрунтується на таких вихідних категоріях, як *предмет*, *предикат*, *рівність* та (неявно) *послідовність*. Логіку функцій можливо збудувати, якщо замінити категорії предиката та рівності на більш загальні категорії *функції* та *представлення* (предикат є частинним випадком функції, а рівність – частинним випадком представлення). Тому друга стаття серії [3] була присвячена загальному опису всіх вихідних категорій функційної логіки.

Оскільки ж на основі вихідних категорій завжди вводяться похідні категорії, то третя стаття серії [4] була присвячена опису найважливіших похідних категорій логіки функцій, а саме – категорій *аргумента* функції та відношення, *значення* функції, *відношення* (та *властивості* як частинного випадку відношення) і, нарешті, *множини* (*класу*) та *підмножини* (*підкласу*). При цьому в межах логіки функцій був сформульований фреґевський принцип (множинної) абстракції, що лежить в основі поняття множини.

За межами розгляду залишилася лише одна важлива похідна категорія логіки – добре відома категорія *графіка* функції (або, що те саме, графіка відношення). Пропонована четверта стаття серії присвячена розгляду саме цієї категорії, більш звичної для математиків, ніж для логіків, хоча, насправді, такої, що має фундаментальний логічний статус.

Відзначимо, що у цій статті ми без додаткових роз'яснень використовуємо введений у попередніх трьох статтях серії теоретичний та технічний матеріал (термінологію та символіку), тому для розуміння подальшого викладу слід ознайомитися з названними [2; 3; 4].

Два способи зіставлення функцій та їхніх значень. Однозначне представлення ми називаємо *заданням* (*специфікацією*). Щоб задати будь-яку функцію, слід задати той закон, той метод, за яким функція зіставляє наборам своїх аргументів (якщо вони у неї є) свої значення. Цей закон, власне, є відношенням і має форму формули представлення. А саме, нехай дано функцію $f^{(n)}$, першу валентність якої можуть займати лише g_1-об'єкти, другу валентність – лише g_2-об'єкти, ..., n-ну валентність – лише g_n-об'єкти, а значеннями можуть бути лише g_0-об'єкти; відповідний закон, яким задається ця функція $f^{(n)}$, ми записуємо у вигляді виразу:

$$(g_0{}^{(0)})^2 \approx (f^{(n)}((g_1{}^{(0)})^2, ..., (g_n{}^{(0)})^2)),$$

який ми, згідно з роз'ясненнями [3], для зручності прочитання скорочуємо скрізь, де це не призводить до непорозумінь, до вигляду:

$$g_0{}^2 \approx f(g_1{}^2, ..., g_n{}^2).$$

(таку символіку надалі називатимемо *спрощеною*).

Насправді, це лише один з двох допущенних способів запису, оскільки незалежно задане значення функції тут стоїть на першому місці: перед представленням і раніше за застосування функції до її аргументів, тоді як у природних мовах і математиці використовується також і протилежна послідовність, коли спершу застосовують функцію до її аргументів, після чого вже переходять до її значення. Приміром, при вивченні математики у школі воліють казати: «Два плюс три буде п'ять», тоді як формулі (1) буквально відповідають розмовні фрази з протилежним порядком слів: «П'ять є сумою двох і трьох», «П'ять отримуємо додаванням до двох трьох» та подібні. Називатимемо фрази (власне, речення) першого типу, а отже, й ті задання функції, в яких спершу функція застосовується до аргументів, *операційними*, а фрази другого типу, а отже, й самі задання функції, в яких спершу називається значення функції, *граматичними* (оскільки значення функції позначається у реченні підметом або групою підмета, а група підмета у природних мовах в нормі стоїть на початку речення; принаймні, така ситуація в українській, від якої ми й відштовхуємося).

При логічному аналізі природних мов і в процесі побудови теорій логічної прагматики та математичної лінгвістики доводиться враховувати порядок слів у реченні, тож доводиться розрізняти операційні та граматичні формулювання. Для цього у прагматиці та матлінгвістиці ми вживаємо квазіформули та формули, в яких до знака представлення з боку характеристики приписано двокрапку [1, с. 169]. У цьому разі граматичне задання (2) функції $f^{(n)}$ перепишеться, набувши наступного вигляду:

$$g_0{}^2 \approx: f\,(g_1{}^2, ..., g_n{}^2), \qquad 33)$$

тоді як операційне задання тієї самої функції запишеться у вигляді:

$$f\,(g_1{}^2, ..., g_n{}^2) :\approx g_0{}^2. \qquad 44)$$

Для цілей чистої предметної логіки достатньо квазіформул (тобто, задань функцій) виглядів (1) та (2), однак, у металогіці доводиться звертатися й до більш деталізованих задань (3) й (4), з чим ми й матимемо справу нижче.

Ще раз нагадаємо, що задання функції – це не що інше, як *відношення* (див. попередню статтю [4] даної серії, зокрема формули розв'язання відношень (5) і (6) у ній), тож вирізнені нами вище способи задання функцій (1)–(4) – це все відношення; більше того, за фіксованих функцій $f^{(n)}$, $g_0^{(0)}$, $g_1^{(0)}$, ..., $g_n^{(0)}$, всі ці задання являють собою одне відношення лише, якщо збігаються за порядком своїх змістовних компонентів; скажімо, *Для однієї планети бути супутником другої планети* (символічно: $g^2 \approx: f(g^4)$) і *Бути супутником другої планети для однієї планети* (символічно: $f(g^4) :\approx g^2$) – це різні двомісні відношення, зворотні одне до одного, оскільки всяке з них має місце точно на тих парах об'єктів, які суть зворотння пар, на котрих має місце друге з цих відношень.

Це означає, що всяка функція $f^{(n)}$ може бути задана двома різними відношеннями: те з них, яке зображається квазіформулою (4), ми назвемо *прямим* (або *аверсним*) *відношенням*, яке формує функція $f^{(n)}$ (або *відносно* функції $f^{(n)}$), і позначатимемо його символом '${}^{a}R_f^{(n+1)}$', тоді як відношення, що зображається квазіформулами (1)–(3), ми назвемо *зворотним* (або *реверсним*) *відношенням*, яке формує функція $f^{(n)}$ (або *відносно* функції $f^{(n)}$), і позначатимемо його символом '${}^{r}R_f^{(n+1)}$'. Із таких означень випливає, що операційне задання всякої функції – це аверсне відношення, для якого дана функція є формівною, а граматичне задання тієї самої функції – це реверсне відношення, для якого дана функція є формівною. Така термінологія доволі природна, оскільки ми завжди починаємо вивчення функцій як окремих об'єктів із задання їх як дій, які виконуються над якимись списками об'єктів з метою отримання результату, і тільки пізніше дізнаємося, що вивчена дія називається абстрактним словом «функція», а результат цієї дії так само абстрактно кваліфікується як «значення функції». Тим самим, операційне задання функцій у людському пізнанні і в освіті передує їхньому граматичному заданню.

Графіки функцій та відношень. Функції – це суто якісні логічні об'єкти, однак у всіх них є об'ємнісний, теоретико-множинний відповідник. Навіть, два такі відповідники. А саме, йдеться про графіки функцій. Нехай функція $f^{(n)}$ задана відношенням (1)/(2)/(3), тобто, зворотним (відносно $f^{(n)}$) відношенням ${}^{r}R_f^{(n+1)}$; в такому разі існує також і пряме відносно $f^{(n)}$ відношення ${}^{a}R_f^{(n+1)}$, котре має вигляд (4). *Прямим* (*аверсним*) *графіком* ${}^{a}\mathrm{G}_f$ функції $f^{(n)}$ – і також просто *графіком* ${}^{a}\mathrm{G}_{Rf}$ прямого відношення ${}^{a}R_f^{(n+1)}$ – назвемо множину всіх таких n+1-ок вигляду $<(g_1^{(0)})^{i1}, ..., (g_n^{(0)})^{in}, (g_0^{(0)})^{i0}>$ (або, у спрощеній символіці: $<g_1^{i1}, ..., g_n^{in}, g_0^{i0}>$), для яких має місце $(g_0^{(0)})^{i0} \approx (f^{(n)}((g_1^{(0)})^{i1}, ..., (g_n^{(0)})^{in}))$; символічно:

$$ {}^{a}\mathrm{G}_f = {}^{a}\mathrm{G}_{Rf} = \{<(g_1^{(0)})^{i1}, ..., (g_n^{(0)})^{in}, (g_0^{(0)})^{i0}> \mid (g_0^{(0)})^{i0} \approx (f^{(n)}((g_1^{(0)})^{i1}, ..., (g_n^{(0)})^{in}))\}, \qquad 55) $$

або, у спрощеній символіці:

$$ {}^{a}\mathrm{G}_f = {}^{a}\mathrm{G}_{Rf} = \{<g_1^{i1}, ..., g_n^{in}, g_0^{i0}> \mid g_0^{i0} \approx f(g_1^{i1}, ..., g_n^{in})\}. \qquad 66) $$

Відповідно, *зворотним* (*реверсним*) *графіком* ${}^{r}\mathrm{G}_f$ функції $f^{(n)}$ – і також просто *графіком* ${}^{r}\mathrm{G}_{Rf}$ зворотного (відносно $f^{(n)}$) відношення ${}^{r}R_f^{(n+1)}$ — назвемо множину всіх таких n+1-ок вигляду $<(g_0^{(0)})^{i0}, (g_1^{(0)})^{i1}, ..., (g_n^{(0)})^{in}>$ (або, у спрощеній символіці: $<g_0^{i0}, g_1^{i1}, ..., g_n^{in}>$), для яких має місце $(g_0^{(0)})^{i0} \approx (f^{(n)}((g_1^{(0)})^{i1}, ..., (g_n^{(0)})^{in}))$; символічно:

$$ {}^{r}\mathrm{G}_f = {}^{r}\mathrm{G}_{Rf} = \{<(g_0^{(0)})^{i0}, (g_1^{(0)})^{i1}, ..., (g_n^{(0)})^{in}> \mid (g_0^{(0)})^{i0} \approx (f^{(n)}((g_1^{(0)})^{i1}, ..., (g_n^{(0)})^{in}))\}, \qquad 77) $$

або, у спрощеній символіці:

$$ {}^{r}\mathrm{G}_f = {}^{r}\mathrm{G}_{Rf} = \{<g_0^{i0}, g_1^{i1}, ..., g_n^{in}> \mid g_0^{i0} \approx f(g_1^{i1}, ..., g_n^{in})\}. \qquad 88) $$

(Як бачимо, спрощена символіка справді дуже полегшує сприйняття формальних виразів логіки функцій.)

Таким чином, графіки відношень та їхніх формівних функцій – це множини, які складаються із саме тих списків (послідовностей) об'єктів, між якими (об'єктами) мають місце ці відношення. Із наведених означень добре видно, що відмінність між прямими та зворотними графіками полягає лише у тому, на якому місці списку: останньому або першому – в них перебуває той об’єкт, який є значенням функції, про графіки якої йдеться. При цьому обидва графіки всякої функції абсолютно об’єктивні й рівноправні, так само, як і обидва відношення, які формує ця функція. Більше того, вони однозначно пов’язані з описаними у попередньому пункті двома способами зіставлення функцій з їхніми значеннями. А саме, прямий графік всякої функції є об’ємним (або об’ємнісним, екстенсіональним) відповідником функції при її операційному заданні (що зображає квазіформула (4)), тоді як зворотний графік тієї самої функції є об’ємним відповідником функції при її граматичному заданні (що зображають квазіформули (1)–(3)).

У граничному випадку 0-місної функції $f^{(0)}$, заданої прямим відношенням $(g^{(0)})^2 \approx (f^{(0)})$ і, відповідно, зворотним відношенням $(f^{(0)}) :\approx (g^{(0)})^2$ (у спрощеній символіці, це відповідно, відношення $g^2 \approx f$ та $f :\approx g^2$), аверсний та реверсний графіки збігаються, оскільки обидва мають вигляд множини одиничок, складених зі значень функції $f^{(0)}$: ${}^a\mathrm{G}_f = {}^a\mathrm{G}_{Rf} = {}^r\mathrm{G}_f = {}^r\mathrm{G}_{Rf} = \{<(g^{(0)})^i> \mid (g^{(0)})^i \approx (f^{(0)})\}$.

Прямі графіки функцій під назвою *пробігів* (або *прогресій*) *значень функцій* («Werthverlauf» в однині) відкрив і ввів у літературу Фреґе у своїй піонерській роботі 1891 р. [6]. Але, оскільки на той час поняття множини й послідовності тільки оформлювалися (сам Фреґе докладав зусиль для їхнього прояснення – в інших працях) і ще не були робочим інструментом логіки й математики в цілому, Фреґе не дав прямим графікам жодного прямого (явного) опису, а ввів їх за допомогою наступного не конструктивного означення [5, с. 7], яке з поправкою на нашу термінологію і символіку може бути сформульоване двома наступними способами:

I. A) *Вираз «функції* $f^{(1)}(h^2)$ *і* $g^{(1)}(h^2)$ *мають один і той самий пробіг значень» означає те саме, що й вираз «функції* $f^{(1)}(h^2)$ *і* $g^{(1)}(h^2)$ *завжди набувають однакового значення на однаковому аргументі»;*

B) *вираз «функції зі значеннями виглядів* $f(h^2)$ *і* $g(h^2)$ *мають один і той самий пробіг значень» означає те саме, що й вираз* *«функції зі значеннями виглядів $f(h^2)$ і $g(h^2)$ завжди набувають однакового значення на однаковому аргументі»*.

Тут обмеження лише одномісними функціями насправді не зменшує рівня загальності, оскільки аргументами таких функцій можуть бути *n*-членні послідовності якихось об'єктів; приміром, можна означити $h^{(0)}$ через іншу функцію $l^{(0)}$ наступним чином: $\square k^2\,(k^2 \approx h \leftrightarrow \square l_1^2 \ldots \square l_n^2\ (k^2 \approx <l_1^2, \ldots, l_n^2>))$, де ‘*k*’ – змінна, а другий знак представлення можна замінити на знак рівності; в цьому разі одномісні функції $f^{(1)}(h^2)$ і $g^{(1)}(h^2)$ природно трактуватимуться як *n*-місні функції, оскільки матимемо: $f^{(1)}(h^2) = f^{(1)}(<l_1^2, \ldots, l_n^2>) = f^{(n)}(l_1^2, \ldots, l_n^2)$, і так само: $g^{(1)}(h^2) = g^{(1)}(<l_1^2, \ldots, l_n^2>) = g^{(n)}(l_1^2, \ldots, l_n^2)$.

Попередньо Фреґе унаочнює це означення, щоб не було жодних сумнівів у тому, якого роду об'єкти є тими самими пробігами значень, спільними для еквівалентних функцій. Він пише, що інтуїцію пробігу значень, інтуїцію зіставлення значень функції її аргументам дає метод аналітичної геометрії, в якій аргументи функції відкладаються на площині на осі абсцис, а значення функції – на осі ординат тієї самої площини, відповідно до чого кожна точка деякої кривої зображає відповідність між аргументом і значенням (на цьому аргументі) деякої функції [6, с. 25]. Але це якраз і означає, що пробіг значень функції, її прямий графік – це множина пар <аргумент, значення>.

На жаль, неконструктивний характер означення і відсутність прямого опису пробігів значень привели Фреґе до неправильних висновків. А саме, він ввів для пробігів значень символіку вигляду ‘$\overset{,}{\varepsilon}(f(\varepsilon))$’ (над першим епсілоном стоїть знак легкого придиху), яка вводить в оману, оскільки всі сприймають її як позначення для множини об'єктів вигляду ε, а не пар об'єктів вигляду $<\overset{,}{\varepsilon}, f^i(\varepsilon)>$ (зокрема, у фреґевському випадку однозначних функцій: $<\overset{,}{\varepsilon}, f^0(\varepsilon)>$), про які (пари об'єктів), по суті, йдеться у формулюванні I. Сам Фреґе теж так помилився, коли, ототожнивши властивості (він називав їх *поняттями* згідно з тодішнім філософським слововжитком) з одномісними істинневими функціями, заявив, що для таких функцій (*предикатів* у сучасному слововжитку) їхні пробіги значень – це *об'єми* їх як понять, тобто, множини всіх тих об'єктів, котрі мають відповідну властивість (підпадають під відповідне поняття). Що прямо суперечить його ж опису інтуїції пробігу значень як кривої в аналітичній геометрії. Справді, нехай **1** – це істина, **0** – це лож, і нехай дано якийсь предикат $F^{(1)}$ та предмети a і b такі, що $F(a) = \mathbf{1}$ і $F(b) = \mathbf{0}$. У такому разі елементами пробігу значень функції $F^{(1)}$ будуть пари $<a, \mathbf{1}>$ і $<b, \mathbf{0}>$, тоді як елементом об'єму $F^{(1)}$ як властивості («поняття» традиційної логіки) є предмет a, але не є ні предмет b, ні жодна з пар $<a, \mathbf{1}>$ і $<b, \mathbf{0}>$.

Названа суперечність є достатнім аргументом на користь тієї позиції, що графіки функцій (та відношень) мають описуватися прямо і явно, як ми це зробили вище за допомогою означень (5)/(6) та (7)/(8), а фреґевське положення I має бути переформульоване з означення на змістовне твердження, котре має доводитися як теорема логістики. Власне, таке доведення тривіальне і просто зводиться до порівняння поняття еквівалентності (рівнозначності) функцій з дефініенсами означень (5)/(6) та (7)/(8).

Логічний та теоретико-множинний підходи до опису графіків. Фреґе завжди й принципово вказував на різницю між функцією та її графіком як цілком різними об'єктами дійсності. Він особливо підкреслював: «У багатьох фразах звичайного математичного слововживання слово "функція" напевне відповідає тому, що я тут назвав пробігом значень функції. Однак функція в сенсі, в якому це слово вживається тут, є логічно первинною [як поняття]» [6, с. 26, прим.]. Ця теза ілюструється у текстах Фреґе багатьма прикладами; скажімо, перед зацитованим пасажем ми бачимо приклад еквівалентних числових функцій зі значеннями вигляду $x^3 - 4x$ та вигляду $x(x - 4)$, де змінна x може вказувати на будь-яку непорожню числову область; зрозуміло, що ці дві функції різняться між собою як методи обчислення – тобто, власне, як функції; отже, вони не тотожні; при цьому вони мають один і той самий прямий графік (і так само, один і той самий зворотний графік), оскільки вірно, що □x $(x^3 - 4x = x(x - 4))$.

На превеликий жаль, після Фреґе розуміння різниці між функціями та їхніми графіками було майже повністю втрачене у логіці й математиці. Переважна більшість дослідників під впливом Пеано [7, с. 69, прим. 2] прийняла зовсім іншу, вироблену в межах теорії множин, точку зору, яка перевертає все з ніг на голову; а саме:

1) спершу, не маючи ще в теорії загальних понять функції та відношення, – але насправді активно користуючись як відношеннями ($\in^{(2)}$, $\square^{(2)}$, $\subset^{(2)}$ та їхні доповнення), так і однозначними функціями ($\sim^{(1)}$ (доповнення), $\cap^{(2)}$ і $\cup^{(2)}$), – будують поняття n-членного *декартового добутку* $\mathrm{M}_1 \times \ldots \times \mathrm{M}_n$ *множин* $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$ як множини всіх таких n-ок $<a_1, \ldots, a_n>$, для яких вірно, що $a_1 \in \mathrm{M}_1, \ldots, a_n \in \mathrm{M}_n$; прямі графіки, вочевидь є підмножинами декартових добутків;

2) після цього без аргументів, постулативно оголошують підмножини декартових добутків, тобто, прямі графіки, відношеннями; при цьому заявляється, що це не постулат, не аксіома, а означення – тобто, слово «відношення» треба розуміти як таке, що позначає певну підмножину певного декартового добутку, і ніяк інакше; жодні змістовні міркування при цьому до уваги не беруться;

3) нарешті, розглядають ті прямі графіки (новоозначені «відношення») ${}^{a}\mathrm{G}$, в яких для всяких $a_1, \ldots, a_{n-1}$ існує один-єдиний a_n такий, що $<a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n> \in {}^{a}\mathrm{G}$, і називають ці графіки «функційними відношеннями»; в якості останнього кроку оголошують слово «функція» просто евфемізмом для словосполучення «функційне відношення», бо, мовляв, це просто зручно – писати ‘$x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$’ замість ‘$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$’ або ‘$R(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$’, де ‘$F$’/‘$R$’ – це позначення для прямого графіка як «відношення».

У світлі викладеної у даній серії статей логічної теорії зрозуміло, що така – майже загальноприйнята в математиці (якщо не брати до уваги окремих теоретиків з теорії категорій та теорії обчислювань) – точка зору і занадто вузька, і, через свою вузькість, просто хибна у загальному випадку. Вона завузька, бо в ній буквально відсутній граничний: 0-місний – випадок як функцій, так і відношень; хибність цієї теоретико-множинної точки зору виявляється саме при спробі розглянути 0-місні відношення.

Справді, фіксацією однієї з валентностей всякого n-місного відношення $R(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ деяким предметом a_n ми отримуємо або n–1-місне відношення $R(x_1, ..., x_{n-1}, a_n)$ *з параметром* a_n, або нічого – якщо отримана конструкція в дійсності не трапляється, є неможливою. У частинному випадку $n = 1$ фіксацією предметом a_1 ми з одномісного відношення $R(x_1)$ отримуємо або 0-місне відношення $R(a_1)$, або нічого. Наприклад, з 1-місного відношення *x більш(ий/а/е) за Землю* фіксацією предметом (астрономічним об'єктом) *Сонце* ми отримуємо 0-місне відношення *Сонце більше за Землю*, а фіксацією того самого 1-місного відношення предметом *Місяць* ми не отримуємо нічого, оскільки такого відношення між Місяцем і Землею, яке позначалося б реченням «Місяць більший за Землю», у природі просто не існує.

Конструкція ж декартового добутку, при спробі застосувати її до таких фіксацій, дає два однаково хибні, і при тому взаємно несумісні висновки. З одного боку, оскільки n-місні «відношення» суть підмножини декартових добутків n множин, то 0-місні відношення мали б бути підмножинами декартового добутку 0 (нуля) множин, тобто, підмножинами порожньої множини; це означає, що всі 0-місні відношення рівні порожній множині, зокрема,

$$\textit{Сонце більше за Землю} = \textit{Уран більший за Землю} = 2 < 3 = (2 + 2 = 4) = \emptyset,$$

що очевидно абсурдно. З іншого боку, оскільки n-місні «відношення»-прямі графіки суть множини n-ок, то 0-місні відношення мали б бути множинами 0-ок (нульок). Така нулька у природі одна – це порожня послідовність Λ (позначення – грецька лямбда), відтак, всі 0-місні відношення виявляються рівними єдиній одноелементній множині {Λ}, яка містить Λ. Звідси маємо, що

$$\textit{Сонце більше за Землю} = \textit{Уран більший за Землю} = 2 < 3 = (2 + 2 = 4) = \{\Lambda\},$$

що так само абсурдно, як і попередній висновок, і при цьому не сумісно з ним, оскільки $\emptyset \neq \{\Lambda\}$.

Таким чином, теоретико-множинна точка зору на відношення (а отже, й функції), панівна у сучасній математиці й логіці, просто суперечлива і має бути відкинута. Натомість, слід прийняти викладену в даній серії статей точку зору, за якою

(і) функція – це первинне логічне поняття; функцією ми називаємо всякий спосіб представлення якихось довільних об'єктів (значень функції);

(іі) відношення – це похідне поняття; відношенням ми називаємо представлення функцією;

(ііі) існує два рівноправні способи задання функції: операційний та граматичний, – що означає, що функція формує одразу два рівноправні відношення: пряме, аверсне (яке відповідає операційному заданню) та зворотне, реверсне (котре відповідає граматичному заданню).

Підкреслимо ту принципову обставину, що ця наша точка зору є лише результатом послідовного розвитку позиції Фреґе. Єдині дві новації, які ми вводимо відносно фреґевської системи категорій – це введення первинного, неозначуваного поняття представлення (що тягне за собою розширення поняття функції відносно фреґевського) та розрізнення двох типів задання функції – яке Фреґе, на жаль, прямим текстом відмовився визнавати об'єктивним логічним розрізненням, і яке тягне за собою розрізнення двох не тотожних графіків функції: прямого (як об'ємнісного відповідника прямого відношення щодо даної функції) та зворотного (як об'ємнісного відповідника зворотного відношення щодо даної функції).

ЛІТЕРАТУРА

1. Кохан Я. О. Виражальні можливості формальних мов. Ч. І. *Мова і культура.* 2012. Вип. 15. Т. ІІ(156). Київ : Видавничий дім Дмитра Бураго. С. 165–172.
2. Кохан Я. Символічна логіка: повернення до витоків. Функціональний погляд на світ. *Практична філософія.* 2006. 1(19). С. 240–244.
3. Кохан Я. Символічна логіка: повернення до витоків. Стаття ІІ. Базові категорії. *Вісник Національного юридичного університету імені Ярослава Мудрого.* Серія: Філософія, філософія права, політологія, соціологія. 2020. № 4(47). С. 47–57.
4. Кохан Я. Символічна логіка: повернення до витоків. Стаття ІІІ. Похідні логістичні категорії. *Мультиверсум. Філософський альманах.* 2021. 2(2). С. 141–155. URL: https://doi.org/10.35423/2078-8142.2021.2.2.9
5. Frege G. *Basic Laws of Arithmetic.* Vol. I & II / trans. from German. Oxford : Oxford University Press, 2016.
6. Frege G. Function and Concept. Geach P., Black M. (eds). *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* Oxford : Basil Blackwell, 1960. C. 21–41.
7. Kuratowski K., Mostowski A. *Set Theory* / trans. from Polish. Warszawa : PWN, Amsterdam : North-Holland, 1968. 417 p.

REFERENCES

Kokhan, Y. O. (2012). Expressive Capabilities of Formal Languages (Part I). *Language and Culture*, *15, II(156),* 165-172. [In Ukrainian].

Kokhan, Y. (2006). Symbolic Logic: Return to the Origins. A Functional View of the World. *Practical Philosophy*, *1(19),* 240-244.

Kokhan, Y. (2020). Symbolic Logic: Return to the Origins. Paper II. Basic Categories. *The Bulletin of Yaroslav Mudryi National Law University. Series:Philosophy, philosophy of law, political science, sociology, 4(47)*, 47-57.

Kokhan, Y. (2021). Symbolic Logic: Return to the Origins. Paper III. Derivative Logistic Categories. *Multiversum. Philosophical Almanac, 2(2),* 141-155. Retrieved from: https://doi.org/10.35423/2078-8142.2021.2.2.9

Frege, G. (2016). *Basic Laws of Arithmetic.* Vol. I & II. Oxford: Oxford University Press.

Frege, G. (1960). Function and Concept. In: Geach, P. & Black, M. (eds). *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege,* pp. 21-41. Oxford: Basil Blackwell.

Kuratowski, K. & Mostowski, A. (1968). *Set Theory*. Warszawa: PWN, Amsterdam: North-Holland.

Yaroslav Kokhan
Candidate of Philosophical Sciences, Junior Researcher at the Department of Logic and Sciense Methodology of the H. Skovoroda Institute of Philosophy of the NAS of Ukraine; Kyiv, Ukraine; e-mail: yarkaen@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8958-772X

Symbolic logic: return to the origins. Paper IV. Function and relation graphs

Abstract
The paper is the Part IV of the large research, dedicated to both revision of the system of basic logical categories and generalization of modern predicate logic to functional logic. The topic of the paper is consideration of graphs of functions and relations as a derivative and definable category of ultra-Fregean logistics. There are two types of function specification: an operational specification, in which a function is first applied to arguments and then the value of the function is entered as the result of such application, and a grammar specification, in which an object is first entered and then represented as a value of the function on the given arguments. Since function specifications are relations themselves (which was shown in the previous article of the series), this means that each function forms two relations: the obverse (for an operational specification) and the reverse one (for a grammatical specification). Hence, the definitions introduce two types of graphs: the obverse graph of a function, or a graph of the obverse relation formed by this function, is a set of sequences of such objects, the last of which is a value of this function on the sequence of other of these objects as arguments of the same function. Similarly, the reverse graph of a function, or the graph of the reverse relation formed by this function, is called a set of sequences of such objects, the first of which is the value of this function on the sequence of other of these objects as arguments of the same function. In the limiting case of 0-ary functions, both graphs of any such function coincide. Gottlob Frege

discovered obverse graphs of functions and called them function value-ranges. He fundamentally emphasized the non-identity of functions and their graphs. Unfortunately, in set theory under the influence of Giuseppe Peano, an alternative approach was adopted, according to which functions and relations are identical to their graphs and, ultimately, to each other. We show that this approach leads to two unacceptable and, at the same time, mutually contradictory conclusions, and must therefore be rejected.

Keywords: *logistics, categories, relation, function graph, relation graph, Cartesian product.*