DOI 10.35423/2078-8142.2024.2.1.4
УДК 161

***Я. О. Кохан*,**
кандидат філософських наук,
молодший науковий співробітник відділу логіки та методології науки
Інституту філософії імені Г. С. Сковороди НАН України,
м. Київ, Україна
e-mail: yarkaen@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8958-772X

ЧОМУ ВІДНОШЕННЯ НЕ ТОТОЖНІ СВОЇМ ГРАФІКАМ

У математиці загальноприйнятим є запропоноване Джузеппе Пеано ототожнення відношень з їхніми графіками. Однак, це ототожнення спростовується на граничному прикладі 0-місних відношень. У статті розвивається альтернативна теорія відношень, яка будується в межах логіки функцій. На основі первинних, неозначуваних логічних понять предмета, представлення (репрезентації, неоднозначного задання) й послідовності ми задаємо поняття (неоднозначної) функції та множини, після чого означуємо відношення як ті закони, якими однозначно задаються окремі функції. Кожна функція має два різні відношення-завдання: пряме (аверсне) та зворотне (реверсне). У кожної більш ніж 0-місної функції є два графіки: прямий (графік її аверсного відношення) та зворотний (графік її реверсного відношення). Співвідношення між відношеннями та їхніми графіками задаються V постулатом формальної арифметики Фреґе (системи Grundgesetze), який у логіці функцій є теоремою. У статті ця теорема доводиться у її найбільш загальному формулюванні.

***Ключові слова**: відношення, графік відношення, графік функції, логіка функцій, Grundgesetze.*

Одним з найважливіших висновків доктрини фалібілізму є відома попперівська формула: «Наука погрішна, бо наука – справа рук людських» [12, с. 491]. Згідно з нею, помилитися можна в будь-якому твердженні й міркуванні найнесподіванішим чином. Часом такі помилки трапляються у важливих і навіть фундаментальних теоріях та сферах науки. І що найбільш важливо: деякі такі помилки можуть тривалим часом лишатися непоміченими. Їх можуть повторювати цілі покоління вчених, навіть не підозрюючи, що стверджують щось не те.

Дана стаття присвячена розбору однієї такої помилки. Ідеться про загальноприйняте у теорії множин, а отже, і в усій математиці трактування відношень як множин. Або більш точно: про те, що в теорії множин відношення ототожнюються зі своїми графіками. Таке ототожнення загальноприйняте і вважається означенням (!), однак насправді це змістовне твердження, і воно є математично хибним. На наступних сторінках ми доведемо цю хибність, після чого побудуємо альтернативну теорію відношень, збудовану на логіці, а не на теорії множин.

1. Неадекватність теоретико-множинного трактування відношень

Доведення хибності теоретико-множинного трактування відношень для більшої наочності ми розіб'ємо на пункти.

0. Наведемо потрібні означення й символіку. Відношення ми позначаємо одним з двох способів: явно вказуючи або їхню арність: '$R^{(n)}$', або ж їхні *валентності*, тобто аргументні місця: '$R(x_1, ..., x_n)$'. Якщо об'єкти $a_1, ..., a_n$ перебувають у відношенні $R^{(n)}$, цей факт записуємо формулою '$R(a_1, ..., a_n)$'. *Графіком* відношення $R^{(n)}$ називається множина $\mathrm{G}R(n) = \{<a_1, ..., a_n> \mid R(a_1, ..., a_n)\}$ всіх n-ок $<a_1, ..., a_n>$ предметів таких, що $R(a_1, ..., a_n)$. Якщо для деяких $a_1, ..., a_n$ формулювання '$R(a_1, ..., a_n)$' взагалі осмислене (істинне або хибне, але не абсурдне), казатимемо, що разом $a_1, ..., a_n$ *допущенні для* $R^{(n)}$, і що кожен з об'єктів $a_1, ..., a_n$ окремо *допущенний для* відповідної валентності відношення $R(x_1, ..., x_n)$. Зрозуміло, що можна говорити про такі множини M_1, ..., M_n,, що хоч би якими були $a_1, ..., a_n$, допущенні для $R^{(n)}$, вірно, що $a_1 \in M_1, ..., a_n \in M_n$. У такому разі графік $GR(n)$ виявляється підмножиною декартового добутку $M_1 \times ... \times M_n$: $GR(n) \subseteq M_1 \times ... \times M_n$.

1. Граничним випадком відношення є 0-місне відношення. Таке відношення завжди можна отримати з годящого n-місного відношення за $n > 0$, послідовно *фіксуючи* валентності останнього за допомогою деяких об'єктів, допущенних для даної валентності даного відношення. Наступна таблиця наочно зображає процес такої фіксації:

$R(x_1, ..., x_n)$	—	n-місне відношення
$R(x_1, ..., x_{n-1}, a_n)$	—	n–1-місне відношення
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$R(x_1, a_2, ..., a_n)$	—	1-місне відношення
$R(a_1, ..., a_n)$	—	0-місне відношення

Табл. 1. Фіксація валентностей відношень

Звісно, не всяка фіксація валентності у відношенні дає нове відношення; приміром, фіксація другої валентності бінарного (2-місного) відношення *x – старіший за y* предметом *Місяць* породжує унарне (сингулярне, 1-місне) відношення (властивість) *x – старіший за Місяць*, яке має місце або ні на астрономічних об'єктах (точніше, на одиничках, на 1-членних послідовностях, складених з астрономічних об'єктів), тоді як фіксація тієї самої валентності того самого бінарного відношення предметом *множина істиннєвих значень класичної логіки* не породжує ніякого відношення, оскільки множини за самою своєю суттю не мають віку, а тому не можна бути старішим або молодшим за будь-яку задану множину. Це означає, що деякі фіксації валентностей у відношеннях не породжують ніякого об’єкта дійсності взагалі; зокрема, немає такого відношення (такого об’єкта дійсності), як *x – старіший за множину істиннєвих значень класичної логіки*: є лише самé формулювання «*x* – старіший за множину істиннєвих значень класичної логіки», яке нічого не позначає.

Тим не менше, деякі фіксації приводять нас послідовно до 0-місних відношень, як це показано у табл. 1. Наприклад, з бінарного відношення $<^{(2)}$ (*Менше, ніж*$^{(2)}$, *Менше за*$^{(2)}$), воно ж: *x – менш(ий/а/е) за y*, можна послідовними фіксаціями отримати унарне відношення *(число) x – менше за 3* та нульарне відношення *2 – менше за 3*:

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (x_1 < 3) \Rightarrow (2 < 3)$$

(тут відношення взяті в дужки для кращої читності). Таким чином, 0-арні відношення об’єктивно існують.

2. Графік всякого *n*-місного відношення є множиною, що складається з *n*-ок, тобто *n*-членних послідовностей; відтак графік всякого 0-місного відношення може бути тільки множиною, що складається з єдиної 0-ки (0-членної послідовності, порожньої послідовності) Λ. Іншими словами, для всякого $R^{(0)}$ має місце $\mathrm{G}_R(0) = \{\Lambda\}$. Для графіків таких відношень, як у табл. 1, це можна наочно продемонструвати наступною таблицею:

$\mathrm{G}_R(n)$	=	$\{<a_1, \ldots, a_n>\}$
$\mathrm{G}_R(n-1)$	=	$\{<a_1, \ldots, a_{n-1}>\}$
⋮	⋮	⋮
$\mathrm{G}_R(1)$	=	$\{<a_1>\}$
$\mathrm{G}_R(0)$	=	$\{\Lambda\}$

Табл. 2. Графіки залежно від арності відношень

3. Таким чином, виходить, що всі 0-місні відношення тотожні, оскільки всі вони рівні множині $\{\Lambda\}$. Однак, це, насправді, не має місця.

По-перше, щоразу, коли ми розглядаємо якесь 0-місне відношення, це стає можливим саме тому, що ми виділяємо в ньому якісь непорожні частини і навіть елементи (точніше, члени, якщо розглядати відношення як послідовність) – тоді як множина $\{\Lambda\}$ за означенням містить єдиний елемент: Λ, а відтак не містить жодних непорожніх частин. Наприклад, $2 < 3$ і $3 < 25$ – це два 0-місні відношення, отримані послідовними фіксаціями з двомісного відношення $<^{(2)}$ (для кожного з них існує дві такі послідовні фіксації; для першого – це

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (x_1 < 3) \Rightarrow (2 < 3) \text{ та } (x_1 < x_2) \Rightarrow (2 < x_2) \Rightarrow (2 < 3)),$$

а для другого –

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (x_1 < 25) \Rightarrow (3 < 25) \text{ та } (x_1 < x_2) \Rightarrow (3 < x_2) \Rightarrow (3 < 25)).$$

У кожному з цих 0-місних відношень ми виділяємо по три різні елементи (або непорожні частини): числа *2* і *3* – у першому, *3* і *25* – у другому та відношення $<^{(2)}$ – в обох. Відтак, жодне з них не тотожне $\{\Lambda\}$.

У загальному випадку (див. табл. 1 вище) ми виділяємо у довільному 0-місному відношенні $R(a_1, ..., a_n)$ такі його складові, як

1) деяке однозначно задане n-місне відношення $R(x_1, ..., x_n)$, з якого $R(a_1, ..., a_n)$ можна отримати фіксаціями, і

2) *параметри* $a_1, ..., a_n$ відношення $R(a_1, ..., a_n)$.

У граничному випадку $n = 0$ відношення $R^{(0)}$ не має параметрів. Цей випадок позначається у природних мовах за допомогою непоширених безособових речень (власне, у тих мовах, які допускають безособові речення), наприклад, «Світало». Але й у цьому разі $R^{(0)} \neq \{\Lambda\}$, бо очевидно, що, приміром, *Світати*$^{(0)} \neq \Lambda$ і *Світати*$^{(0)} \neq \{\Lambda\}$.

По-друге, ми відрізняємо 0-місні відношення одне від одного. Скажімо, очевидно, що

$$2 < 3,$$
$$3 < 25,$$

Земля – це планета

і

Київ – столиця України в 1991 році –

це чотири різні 0-місні відношення, отримані фіксаціями, відповідно, з відношень $<^{(2)}$ (перші два), *Бути планетою*$^{(1)}$ та *Бути столицею*$^{(3)}$ за допомогою об'єктів *2*, *3*, *25*, *Земля*, *Київ*, *Україна* та *1991 рік*. Таким чином, відношення – це змістовні об'єкти, і їх є багато не тотожних між собою, тоді як існує одна єдина множина $\{\Lambda\}$.

Зауваження. Слід застерегти читачів-філософів від помилки, яку зробив автор у [4, с. 139–140], коли з позначення декартових добутків «$M_1 \times \ldots \times M_n$» зробив висновок: «З одного боку, оскільки *n*-місні "відношення" суть підмножини декартових добутків *n* множин, то 0-місні відношення мали б бути підмножинами декартового добутку 0 (нуля) множин, тобто підмножинами порожньої множини». Насправді, такий висновок не випливає з означення декартового добутка. Автора ввела в оману невдала теоретико-множинна символіка «$M_1 \times \ldots \times M_n$», яка не відповідає суті справи (таким чином, у теорії множин не лише будується неправильна теорія відношень, а й у її основах вживається дещо невдала символіка, яка може навести на неправильні ходи думки).

2. Логічна теорія відношень

Таким чином, ми спростували теоретико-множинну теорію відношень, показавши її (коли використовувати термінологію А. Тарського) *матеріальну неадекватність,* тобто невідповідність прийнятих у ній означень прикладам, які вона має охоплювати [14, с. 128–129]. Відтак, ми конче потребуємо альтернативної теорії, яка пояснювала б, чим є відношення з логіко-математичної точки зору. На щастя, така теорія існує. Вона була розроблена автором у межах такого нового розділу логіки, як логіка функцій [9; 3]. Її виклад ми розіб'ємо на окремі пункти.

1. Ми починаємо із самих основ логіки, або, точніше, з тієї частини основ, які ми називаємо *логістикою* і протиставляємо *семантиці* [2].

Найперше неозначуване поняття логістики – це поняття предмета. *Предметом* (або більш розлого: *логічним предметом*) ми називаємо всякий об'єкт, в якому ми не виділяємо жодної внутрішньої структури, іншими словами, на який ми дивимося, як на атом. У будь-якій науковій теорії завжди вирізняють одну або кілька множин первинних об'єктів, які є предметами у сенсі логіки (такими є числа арифметики та точки, прямі й площини класичної геометрії).

2. Всякий предмет можна задати, або, краще сказати, *представити* (*репрезентувати*) різними способами: побудувати (сконструювати), обчислити, остенсивно вказати, описати, і навіть просто назвати. Для всіх цих різних ситуацій ми вживатимемо як загальний охопний термін слово «представлення». Якщо деякий предмет a може бути представлений як предмет b (наприклад, планета Венера – як Вранішня зірка на небосхилі, а число 3 – як число 2+1) ми формулюємо це реченням «(Предмет) a є (предметом) b» і записуємо у вигляді формули

$$a \approx b, \tag{1}$$

де знак '$\approx$' — це знак представлення, і він передається у природних мовах дієсловом-зв'язкою «бути» (зокрема, її формами «є», «суть», «бу(в/ла/ло/ли)» і «буд(у/ем(о)/еш/ете/е/уть»). Заперечення $\neg (a \approx b)$ висловлювання про те, що $a \approx b$, можна скорочено записувати у вигляді '$a \not\approx b$'.

Формула (1) описує випадок однозначного представлення; таке представлення ми називатимемо *заданням*. Однак, представлення може бути неоднозначним. Так, предмет a може бути неоднозначно представлений як представник деякого різновиду предметів; наприклад, коли ми називаємо людину по імені, і це ім’я мають (або мали коли-небудь) інші люди, ми тим самим неоднозначно представляємо цю людину. Інший приклад: сказавши: «Архімед був математиком», ми тим самим представляємо деяку людину спершу як носія імені «Архімед», а після цього – ще й як представника такого різновиду людей, яким є математики.

Поняття представлення є другим після поняття предмета фундаментальним поняттям логістики.

Існує два важливі частинні випадки представлення, потрібні в наступному викладі. Це — *тотожність* $\eqcirc$ та *рівність* $=$. Поняття, які осмислюють ці логічні об’єкти, а разом з ними й нерівність $\neq$, означуються наступним чином:

$(\eqcirc)\ t \eqcirc s \eqcirc_{Df} t \approx s \wedge s \approx t;$

$(=)\ t = s \eqcirc_{Df} t \approx s \wedge \forall r\, \forall q\, (r \approx s \rightarrow (q \approx s \rightarrow r \approx q));$

$(\neq)\ t \neq s \eqcirc_{Df} t \not\approx s \wedge \forall r\, \forall q\, (r \approx s \rightarrow (q \approx s \rightarrow r \approx q)).$

Із цих означень добре видно, що рівність і нерівність, всупереч чи не безальтернативно поширеній у логіці й математиці думці (див., наприклад: [6, с. IX; 1, с. 209; 13, с. 85]), не є тотожністю, а рівність і нерівність не суть альтернативи (доповнення, заперечення) одна одної. Водночас, неважко пересвідчитися, що метамовні об’єкти (як ми далі побачимо – відношення), які вживаються в означеннях, а саме: графічна рівність, рівність за означенням та еквівалентність за означенням – всі є різновидами тотожності $\eqcirc$, а не рівності $=$ (справді, вони означають те і тільки те, що дефініендум та дефініенс можуть замінювати один одного, тобто позначувані ними об’єкти є один одним).

3. Третім фундаментальним поняттям логістики є поняття *послідовності*. Якщо ми поглянемо на формулу (1), то побачимо, що вона є послідовністю знаків, і що порядок, в якому ці знаки розміщені у всякій послідовності, суттєвий для розуміння, для осягнення цієї послідовності. Так, послідовності ‘$a \approx b$’ і ‘$b \approx a$’ суть різні, хоча й еквівалентні формули, тоді як послідовності ‘$\approx a\ b$’ і ‘$b\ a \approx$’ не є формулами взагалі і являють собою неосмислені набори знаків. Для наших цілей достатньо розглянути лише частинний випадок загального поняття послідовності, який включає у себе граничний випадок порожньої послідовності Λ і частинний випадок скінченної послідовності. Таке поняття можна задати наступним індуктивним означенням:

(es_0) Λ – це послідовність, і Λ не має елементів (членів);

(es_1) якщо α – це послідовність, то хоч би яким був об'єкт t, αt – це послідовність, і t є елементом (членом) послідовності αt;

(es_∞) інших послідовностей немає.

До цього означення додається аксіома

(es_Λ) $\Lambda t \approx t \wedge t\Lambda \approx t$,

де t – будь-який об'єкт. Так означені послідовності правильно було б називати *елементарними*, але надалі для простоти ми опускатимемо характеристику «елементарний». Записувати ж (елементарні) послідовності можна з пробілами (можливо з комами) між окремими знаками: 'α t', 'α, t', або без них: 'αt', із зовнішніми кутовими чи круглими дужками: '<αt>', '<$a \approx b$>', '(α, t)', '($a \approx b$)' або без них: '$a_1, ..., a_n$'.

4. Практично завжди один і той самий предмет можна представити різними способами (див. вище приклади з числом 3 та Архімедом). Окремі *способи* представлення ми називатимемо *функціями*, а ті предмети, які дана функція представляє, – *значеннями* цієї функції. Функція може представляти свої значення або безпосередньо, або на основі якихось списків (послідовностей) раніше заданих об'єктів (зокрема предметів). Такі раніше задані об'єкти, що використовуються при представленні значення функції, ми називаємо *аргументами* функції. Функція, яка представляє свої значення безпосередньо, не має аргументів; така ситуація очевидно є граничним випадком загального випадку функції з аргументами, оскільки можна сказати, що функція без аргументів – це функція, яка представляє свої значення на основі порожнього списку аргументів, на основі послідовності аргументів Λ. Всяка функція, згідно з нашою теорією, за самою своєю суттю представляє всяке своє значення на основі послідовностей аргументів з фіксованою кількістю членів; ми виражатимемо це, кажучи, що всяка функція має фіксовану кількість *валентностей*, або *аргументних місць* (тобто, місць у фіксованому списку, на які можна підставляти аргументи цієї функції). Кількість валентностей функції ми називатимемо її *арністю* або *місністю*; в якості арностей розглядатимемо надалі лише натуральні числа (що відповідає нашому обмеженому поняттю послідовності); відтак, функція без аргументів, або 0-місна (0-арна) функція може бути записана за допомогою виразу вигляду '$f^{(0)}$', а n-місна функція – тобто, функція загального вигляду – за допомогою виразів вигляду '$f^{(n)}$' та '$f^{(n)}(x_1, ..., x_n)$', де $(x_1, ..., x_n)$ – це послідовність валентностей даної функції.

Значення функції $f^{(n)}(x_1, ..., x_n)$ ми записуватимемо услід за Чорчем [5, с. 1], беручи позначення самої функції у круглі дужки, тобто у вигляді '$(f^{(n)}(x_1, ..., x_n))$' [3, с. 144]. Наприклад, у реченні «Архімед був математиком» ідеться про те, що індивід (логічний предмет) *Архімед* є значенням (може бути представлений як значення) функції без аргументів *математик*$^{(0)}$; ми записуватимемо таку ситуацію формулою

$$a \approx (f^{(0)}). \tag{2}$$

У загальному випадку, коли функція $f^{(n)}$ представляє якесь своє значення a_0 на основі списку аргументів $(a_1, ..., a_n)$, казатимемо, що функція $f^{(n)}$ *набуває* свого *значення* a_0 *на аргументах* $a_1, ..., a_n$, і записуватимемо цю ситуацію формулою

$$a_0 \approx (f^{(n)}(a_1, ..., a_n)). \tag{3}$$

Наприклад, арифметичні факти $2 = 6 : 3$ і $11 > 5 + 4$ однаково зображатимуться формулою '$a_0 \approx (f^{(2)}(a_1, a_2))$'; у цих випадках числа 2 і 11 – це значення вказаних двомісних функцій на парах аргументів (6, 3) та (5, 4) відповідно.

Там, де це не призводить до непорозумінь, формули (2) і (3) можуть бути скорочені до вигляду

$$a \approx f \tag{4}$$

і

$$a_0 \approx f(a_1, ..., a_n) \tag{5}$$

відповідно.

Окремо підкреслимо ту обставину, що функції у загальному випадку суть неоднозначні, тобто можуть представляти різні значення на одному й тому самому наборі (списку) аргументів. Це відповідає теоретико-множинному поняттю часткового мультивідображення, а не відображення чи часткового відображення. Приміром, обернені тригонометричні функції мають нескінченну кількість значень на кожному своєму аргументі, а функція *притока річки*$^{(1)}$ (одномісна, як і обернені тригонометричні) має скінченну кількість значень на кожному своєму аргументі, але при цьому на багатьох аргументах ці кількості різняться між собою. Саме тому ми не можемо у загальному випадку замінити у формулах (2) і (3) представлення на рівність. Зокрема, строго кажучи, є некоректним писати: '$\sqrt{4} = \pm 2$', як звикли математики, оскільки на множині цілих (і так само дійсних) чисел функція $\sqrt{}^{(1)}$ є неоднозначною, відтак вираз '$\sqrt{4}$' і штучне позначення '± 2' суть неоднозначні, тоді як рівність передбачає, що прирівнюються однозначно задані об'єкти; коректно було б писати: '$2 \approx (\sqrt{}^{(1)}4) \wedge -2 \approx (\sqrt{}^{(1)}4)$', або у стилі скорочень (4) і (5): '$2 \approx \sqrt{4} \wedge -2 \approx \sqrt{4}$'.

5. Тепер, на основі введених вище понять предмета, представлення, послідовності та функції ми легко введемо поняття відношення. Для цього достатньо згадати, як ми задаємо функції. Щоб задати (тобто, однозначно представити) функцію, слід вказати закон, за яким функція зіставляє послідовностям своїх аргументів свої ж значення. Цей закон можна вказати, склавши таблицю, намалювавши графік або записавши вираз, котрий цей закон явним чином описуватиме (з точки зору логіки – позначатиме). Для всякої функції $f^{(n)}(x_1, ..., x_n)$ такий вираз матиме вигляд

$$x_0 \approx (\,f^{(n)}(x_1, ..., x_n)), \tag{6}$$

де знак ‘x_0’ вказує *місце значень* функції – що є аналогом *аргументних місць* функції: при формулюванні закону ми *вказуємо* знаками ‘x_0’, ‘x_1’, ..., ‘x_n’ саме місця, на які можна підставляти окремі об’єкти (що вже можуть бути аргументами і значеннями функції), але *не позначаємо* жодні об’єкти, оскільки закон має бути універсальним, виражати закономірність (залежність), яка стосується не конкретних об’єктів, а взагалі будь-яких об’єктів певних різновидів або певних виглядів. Саме цим вираз (6) відрізняється від виразу (формули) (3): в останньому ми бачимо позначення ‘a_0’, ‘a_1’, ..., ‘a_n’ для окремих об’єктів (у логіці такі знаки – це *вільні змінні*) там, де у виразі (6) є лише *вказівки* (референції) ‘x_0’, ‘x_1’, ..., ‘x_n’ *на* місця, які можуть займати в корпусі закону якісь об’єкти (у логіці такі знаки – це *зв’язані змінні*). Через це ми називаємо вирази вигляду (6) не формулами, а лише *квазіформулами*; всяка квазіформула може бути перетворена на формулу, якщо замінити в ній всі зв’язані змінні на вільні змінні і/або сталі.

Граничним випадком квазіформул вигляду (6) будуть квазіформули вигляду

$$x \approx (\,f^{(0)}), \tag{7}$$

які також можна дещо надлишково записувати у вигляді ‘$x \approx (\,f^{(0)}\Lambda)$’.

У математиці поширене трактування функції як закону, який зіставляє аргументам функції її значення. Однак у квазіформулах (6), (7) добре видно, що функція є лише неповною частиною цього закону, а тому не може бути з ним ототожнена; це відкриття належить Ґ. Фреґе [8, с. 113].

Водночас, можна бачити, що всякий позначений квазіформулою вигляду (6) закон – це *відношення* між об’єктами, які можна підставляти на місця, вказані знаками ‘x_0’, ‘x_1’, ..., ‘x_n’ (зокрема, у випадку (7) – одномісне відношення, тобто *властивість*). Справді, сказати, що a_0 є значенням функції $f^{(n)}$ (одним з її значень, якщо вони у неї взагалі є) на аргументах $a_1, ..., a_n$, – це те саме, що сказати, що a_0 *перебуває у відношенні* $\approx (f^{(n)} ...)$ *до* $a_1, ..., a_n$, або, що $a_0, a_1, ..., a_n$ *перебувають (між собою) у відношенні* $\approx (f^{(n)} ...)$. Наприклад, ситуація $-2 \approx \sqrt{4}$ – це відношення між числами –2 й 4, а той факт, що Африка більша за Австралію, який може бути записаний формулою ‘$a_0 \approx (>^{(1)} (a_1))$’, – це відношення між такими континентами, як Африка й Австралія; звідси маємо, що *Буття квадратним коренем:* $x \approx \sqrt{y}$ і *Буття більшим, ніж:* $x \approx (>^{(1)} (y))$ – це бінарні відношення.

Те саме стосується будь-яких інших відношень. Тим самим, всяке *відношення – це закон, яким задається (однозначно представляється) деяка функція*.

Структуру всякого відношення чітко видно у квазіформулі (6). А саме, всяке відношення складається з:

– функції, як *змістовної* (contensive, contentful), або *дескриптивної* частини *ядра* цього відношення;

– представлення, як *логічної*, або *структурної*, частини ядра цього відношення;

– виділеної валентності, яка є місцем значення згаданої функції;

– усіх інших валентностей, котрі є валентностями згаданої функції (можуть бути відсутні, якщо ця функція нульмісна);

– вказівки на значення функції у вигляді дужок (може бути відсутня).

Таким чином, всяке відношення має ядро, і це ядро у загальному випадку складається з двох частин: змістовної, дескриптивної (функція) та логічної, структурної (представлення), а тому можна сказати, що всяке *відношення – це представлення деякою функцією (деяких об’єктів).* Як можна бачити на прикладі відношень вигляду

$$x \approx y \tag{8}$$

та його частинних випадків $x = y$ та $x \neq y$, існує граничний випадок *вироджених* відношень, ядро яких скаладається тільки з логічної, структурної частини; ситуація, коли ядро відношення не містить логічної частини, неможлива, тому ядро всіх інших, невироджених відношень обов'язково містить і логічну, і змістовну частини; відтак, вироджені відношення можна назвати *логічними*, а невироджені – *дескриптивними*.

Важливо відзначити, що для всякої функції можна вказати два різних відношення, кожне з яких є законом, який задає цю функцію. Це добре видно у природних мовах, де ми можемо задати відповідний закон одним з двох наступних способів: або спершу вказати функцію та її аргументні місця, а потім перейти до вказівки на її значення (наприклад: «Множачи одне число на друге, отримуємо добуток», «Множачи 3 на 2, отримуємо 6»), або, навпаки, вказуючи спершу місце значення функції, а вже потім вказуючи саму функцію та її валентності (наприклад: «Добуток – це результат множення одного числа на друге», «6 – це результат множення 3 на 2»). Перший з цих способів ми називатимемо *операційним* заданням функції, а другий – *граматичним* заданням тієї самої функції, оскільки перший спосіб відображає безпосередньо дії, в яких реалізується функція, що задається таким чином, тоді як другий спосіб відповідає нормальній будові речень у природних мовах, в яких значення функції позначається групою підмета, а застосування функції до її аргументів – групою присудка, до того ж в основній формі речення група підмета передує групі присудка.

Квазіформули виглядів (6), (7) і (8) позначають граматичне задання функцій. Щоб зобразити операційне задання нам доведеться збагатити нашу термінологію й символіку. Називатимемо будь-які квазіформули виглядів (6), (7) та (8) (відповідно, формули виглядів (3), (2) й (1)) *квазіформулами представлення* (відповідно, *формулами представлення*); *результантом* квазіформули представлення (відповідно, формули представлення) називатимемо знакову конфігурацію, яка стоїть зліва від знака представлення і вказує (відповідно, позначає) місце значення (відповідно, значення) функції, яку задає дана квазіформула представлення (відповідно, яка є змістовною частиною ядра відношення, що позначається даною формулою представлення); *характеристикою* квазіформули представлення (відповідно, формули представлення) називатимемо знакову конфігурацію, яка стоїть справа від знака представлення і вказує (відповідно, позначає), яким чином значення функції, яку задає дана квазіформула представлення (відповідно, яка є змістовною частиною ядра відношення, що позначається даною формулою представлення), виражається через саму функцію та її валентності (відповідно, аргументи), якщо вони у цієї функції є. Таким чином, у виразах ‘s ≈ t’ та ‘s ≈ (t)’ вираз ‘s’ є їхнім результантом, а характеристики різняться: у першому виразі характеристика – це ‘t’, у другому – це ‘(t)’.

Щоб зобразити операційне задання слід дозволити писати у квазіформулах та формулах характеристику раніше (лівіше) за результант. Ми досягнемо цього, якщо додаватимемо до знака представлення з боку характеристики двокрапку – так, що вирази ‘s ≈ t’, ‘s ≈ (t)’, які відповідають граматичному заданню, перетворяться на ‘s ≈: t’, ‘s ≈: (t)’; у цьому разі операційне задання зображатиметься квазіформулами та формулами виглядів ‘t :≈ s’, ‘(t) :≈ s’.

Таким чином, для кожної функції існує два різних відношення, одне з яких є операційним заданням цієї функції, а друге – граматичним заданням цієї самої функції; називатимемо перше з них *прямим* (*аверсним*) відношенням, що задає дану функцію (або простіше: прямим відношенням цієї функції), а друге – *зворотним* (*реверсним*) відношенням цієї функції. Казатимемо також, що всяка функція *формує* свої пряме й зворотне відношення, або що вона *є формівною* для цих відношень. Із (6) видно, що якщо функція має арність *n*, є *n*-місною, то її пряме й зворотне відношення суть *n*+1-місні, оскільки мають всі валентності своєї формівної функції, а також одну додаткову валентність, яка відповідає місцю значень формівної функції. Якщо для всякої даної функції $f^{(n)}$ позначити її пряме відношення через '${}^{a}R_f^{(n+1)}$', а її зворотне відношення через '${}^{r}R_f^{(n+1)}$', матимемо

$$ {}^{a}R_f(x_1, ..., x_n, x_0) \eqcirc_{\mathrm{Df}} x_0 \approx (f^{(n)}(x_1, ..., x_n)) \tag{9}$$

і

$$ {}^{r}R_f(x_0, x_1, ..., x_n) \eqcirc_{\mathrm{Df}} x_0 \approx (f^{(n)}(x_1, ..., x_n)). \tag{10}$$

Це і є, в загальних рисах, наша логічна теорія відношень. Залишається розглянути питання, щó являють собою графіки функцій та відношень.

3. Графіки відношень і функцій

Згідно з означенням з розділу 1, графік відношення – це деяка множина послідовностей. Поняття послідовності ми ввели вище у пункті 2.3. Поняття ж множини вводиться у логіці за допомогою фреґевського принципа множинної абстракції, який у логіці функцій має наступний вигляд:

(SET) всяка *множина* — це множина всіх *f-об'єктів* (тобто значень функції $f^{(0)}$) для деякої функції $f^{(0)}$; *множина всіх f-об'єктів* – це всі *f*-об'єкти, взяті разом.

Ми позначаємо множину всіх *f*-об'єктів термом (позначальним виразом) '$\{(f^{(0)})\}$', який має практично буквальне прочитання у природних мовах, а саме: «множина всіх [фігурні дужки] значень [круглі дужки] функції $f^{(0)}$», і у випадках, де це не призводить до непорозумінь, може бути скорочений згідно з домовленостями (4), (5) до вигляду '$\{f\}$'.

Загалом, графік – це множина послідовностей, котрі задовольняють деякій умові. Вираз «об'єкт s, який задовольняє умові $R^{(1)}$» – це *дескрипція*; у логіці функцій ми записуємо дескрипції *квазітермами* (тобто, виразами, що вживаються не для позначення окремих об'єктів певного різновиду, а для вказівки на весь їхній різновид) вигляду '$\mathrm{s}\,(R\,(\mathrm{s}))$' (це, в загальному випадку, квазітерми, а не терми, оскільки вираз 's' може містити зв'язані змінні; через це поняття квазітерма є узагальненням поняття зв'язаної змінної, тоді як поняття терма узагальнює поняття вільної змінної). Відтак, ‘$s(R(s))$’ – це дескрипція, а речення «Об’єкт t є таким об’єктом s, який задовольняє умові $R^{(1)}$» у логіці функцій запишеться у вигляді квазіформули ‘$t \approx s(R(s))$’. Звідси, означення з розділу 1, яке можна записати реченням «Графік $\mathrm{G}R(n)$ відношення $R^{(n)}$ – це множина всіх таких послідовностей $<x_1, ..., x_n>$, що $R(x_1, ..., x_n)$», у логіці функцій запишеться метаквазіформулою (квазіформулою метамови)

$$\mathrm{G}R(n) \risingdotseq_{\mathrm{Df}} \{<x_1, ..., x_n>(R(x_1, ..., x_n))\}, \quad (11)$$

що відрізняється від теоретико-множинної символіки, але не принципово. У силу означень (9), (10) можна говорити, що графік всякого відношення є також графіком формівної функції цього відношення. Як ми встановили у попередньому розділі, за будь-якого $n > 0$ всяке відношення $R^{(n)}$ є прямим або зворотним відношенням деякої функції $f^{(n-1)}$; оскільки ж для всякої нульмісної функції очевидно, що її пряме й зворотне відношення збігаються: ${}^{a}R_f(0) = {}^{r}R_f(0) = x \approx (f^{(0)})$ (або, що те саме: ${}^{a}R_f(0) \risingdotseq {}^{r}R_f(0) \risingdotseq x \approx (f^{(0)})$), звідси випливає, що всяка функція $f^{(n)}$ за умови $n > 0$ має два різні графіки: *прямий* (*аверсний*) ${}^{a}\mathrm{G}f(n)$, який є графіком її прямого відношення: ${}^{a}\mathrm{G}f(n) = \mathrm{G}aR(n+1)$, та *зворотний* (*реверсний*), який є графіком її зворотного відношення: ${}^{r}\mathrm{G}f(n) = \mathrm{G}rR(n+1)$, а у випадку $n = 0$ обидва графіки функції збігаються: ${}^{a}\mathrm{G}f(0) = {}^{r}\mathrm{G}f(0) = \{<x>(x \approx (f^{(0)}))\}$ – тобто, всяка нульмісна функція має лише один графік.

Відношення між відношеннями, з одного боку, та їхніми графіками – з іншого, регулюються п’ятим постулатом формальної арифметики Фреґе (в яку входить логіка другого порядку, і яку, як правило, називають за заголовком книги Фреґе, в якій вона викладена, системою *Grundgesetze*, або Системою основних законів арифметики) [6, с. 36, 61]. Цей постулат у нашій символіці виглядає наступним чином:

$$(\mathrm{FA}_5)\ \mathrm{G}R(1) = \mathrm{G}P(1) \leftrightarrow \forall x(R(x) \leftrightarrow P(x)).$$

Його можна сформулювати в наступному найбільш загальному вигляді, якщо дозволити підстановку квазітермів і термів на позначення послідовностей замість предметних змінних:

$$\mathrm{G}_{R}(n) = \mathrm{G}_{P}(n) \leftrightarrow \forall\langle x_1, ..., x_n\rangle (R(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow P(x_1, ..., x_n)).$$

Ми не потребуємо цього постулата, оскільки в розширеній логіці функцій: логіці з послідовностями, множинами та дескрипціями – він виводиться як наступна

ТЕОРЕМА. *Графіки відношень рівні між собою, якщо і тільки якщо ці відношення еквівалентні,* символічно:

$$\mathrm{G}_{R}(n) = \mathrm{G}_{P}(n) \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n (R(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow P(x_1, ..., x_n)).$$

Коротко намітимо доведення, оскільки повний його виклад потребуватиме завершеного формулювання такого числення, в якому його можна провести від початку й до кінця, що зайняло б суттєвий обсяг тексту.

Нам потрібні наступні аксіоми:
аксіома (c) логіки функцій (аксіома Ляйбніца):

(c) $a \approx b \rightarrow (a \approx f \rightarrow b \approx f)$,

аксіома дескрипцій:

(dscr_1) $a \approx f \leftrightarrow a \approx x\,(x \approx f)$,

дві аксіоми множин:

(set_1) $a \in \{f\} \leftrightarrow a \approx f$

(аксіома еквівалентності множин і 0-місних функцій),

(set_2) $\forall x\,(x \approx f \leftrightarrow x \approx g) \rightarrow \{f\} = \{g\}$

(аксіома екстенсіональності множин)
і очевидне означення відношення множинного включення $\subseteq^{(2)}$:

[$\subseteq$] $\{f\} \subseteq \{g\} \rightleftharpoons_{\mathrm{Df}} \forall x\,(x \in \{f\} \rightarrow x \in \{g\})$.

Для початку доведемо теорему ‘$\{f\} = \{g\} \leftrightarrow \{f\} \subseteq \{g\} \wedge \{g\} \subseteq \{f\}$’, яка випливає з аксіоми (c), теореми ‘$a \approx b \rightarrow (b \approx f \rightarrow a \approx f)$’, аксіом ($\mathrm{set}_1$), ($\mathrm{set}_2$) та означення [$\subseteq$]:

1. $\forall x\,(x \approx f \leftrightarrow x \approx g) \leftrightarrow (\forall x\,(x \approx f \rightarrow x \approx g) \wedge \forall x\,(x \approx g \rightarrow x \approx f))$,
2. $(\forall x\,(x \approx f \rightarrow x \approx g) \wedge \forall x\,(x \approx g \rightarrow x \approx f)) \leftrightarrow \{f\} \subseteq \{g\} \wedge \{g\} \subseteq \{f\}$,

3. $\{f\} \subseteq \{g\} \wedge \{g\} \subseteq \{f\} \rightarrow \{f\} = \{g\}$,
4. $\{f\} = \{g\} \rightarrow (a \in \{f\} \rightarrow a \in \{g\})$,
5. $\{f\} = \{g\} \rightarrow (a \in \{g\} \rightarrow a \in \{f\})$,
6. $\{f\} = \{g\} \rightarrow \forall x\,(x \in \{f\} \rightarrow x \in \{g\})$,
7. $\{f\} = \{g\} \rightarrow \forall x\,(x \in \{g\} \rightarrow x \in \{f\})$,
8. $\{f\} = \{g\} \rightarrow \{f\} \subseteq \{g\} \wedge \{g\} \subseteq \{f\}$,
9. $\{f\} = \{g\} \leftrightarrow \{f\} \subseteq \{g\} \wedge \{g\} \subseteq \{f\}$.

Далі зауважимо, що, умова ‘$a_0 \approx f(a_1, ..., a_n)$’ – це не лише відношення між предметами $a_0, ..., a_n$ (і те саме для будь-яких інших об’єктів), а й властивість послідовності $<a_0, ..., a_n>$. Відтак, можна зробити наступну заміну (підстановку й перейменування) в акс. (dscr_1):

10. $a_0 \approx f(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow <a_0, ..., a_n> \approx <x_0, ..., x_n>(x_0 \approx f(x_1, ..., x_n))$,
11. $a_0 \approx g(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow <a_0, ..., a_n> \approx <x_0, ..., x_n>(x_0 \approx g(x_1, ..., x_n))$.

Заміна в конверсію акс. (set_1) дає:

12. $<a_0, ..., a_n> \approx <x_0, ..., x_n>(x_0 \approx f(x_1, ..., x_n)) \leftrightarrow <a_0, ..., a_n> \in \{<x_0, ..., x_n>(x_0 \approx f(x_1, ..., x_n))\}$,
13. $<a_0, ..., a_n> \approx <x_0, ..., x_n>(x_0 \approx g(x_1, ..., x_n)) \leftrightarrow <a_0, ..., a_n> \in \{<x_0, ..., x_n>(x_0 \approx g(x_1, ..., x_n))\}$.

Звідси, в силу логіки висловлювань та теорії квантифікації:

14. $(a_0 \approx f(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow a_0 \approx g(a_1, ..., a_n)) \leftrightarrow (<a_0, ..., a_n> \in \{<x_0, ..., x_n>(x_0 \approx f(x_1, ..., x_n))\} \leftrightarrow <a_0, ..., a_n> \in \{<x_0, ..., x_n>(x_0 \approx g(x_1, ..., x_n))\})$,
15. $\forall x_0 ... \forall x_n\,(x_0 \approx f(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow x_0 \approx g(x_1, ..., x_n)) \leftrightarrow \forall x_0 ... \forall x_n\,(<x_0, ..., x_n> \in \{<x_0, ..., x_n>(x_0 \approx f(x_1, ..., x_n))\} \leftrightarrow <x_0, ..., x_n> \in \{<x_0, ..., x_n>(x_0 \approx g(x_1, ..., x_n))\})$.

Застосовуючи до формули 15 означення [$\subseteq$], разом із формулою 9 маємо:

16. $\forall x_0 ... \forall x_n\,(x_0 \approx f(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow x_0 \approx g(x_1, ..., x_n)) \leftrightarrow \{<x_0, ..., x_n>(x_0 \approx f(x_1, ..., x_n))\} = \{<x_0, ..., x_n>(x_0 \approx g(x_1, ..., x_n))\}$.

Тепер, застосовуючи до конверсії формули 16 означення (9), (10), маємо:

17. $\{<x_0, ..., x_n>({}^rR_f(x_0, ..., x_n))\} = \{<x_0, ..., x_n>({}^rR_g(x_0, ..., x_n))\} \leftrightarrow \forall x_0 ... \forall x_n ({}^rR_f(x_0, ..., x_n) \leftrightarrow {}^rR_g(x_0, ..., x_n))$.

Якщо тепер замінити у формулах 10–17 даного доведення $<a_0, ..., a_n>$ на $<a_1, ..., a_n, a_0>$ і $<x_0, ..., x_n>$ на $<x_1, ..., x_n, x_0>$, отримаємо:

25. $\{<x_1, ..., x_n, x_0>({}^aR_f(x_1, ..., x_n, x_0))\} = \{<x_1, ..., x_n, x_0>({}^aR_g(x_1, ..., x_n, x_0))\} \leftrightarrow \forall x_1 ... \forall x_n \forall x_0 ({}^aR_f(x_1, ..., x_n, x_0) \leftrightarrow {}^aR_g(x_1, ..., x_n, x_0))$.

Нарешті, застосовуючи означення (11), остаточно маємо:

26. $\mathrm{G}\, a_{Rf}(n+1) = \mathrm{G}\, a_{Rg}(n+1) \leftrightarrow \forall x_1 ... \forall x_n \forall x_0 ({}^aR_f(x_1, ..., x_n, x_0) \leftrightarrow {}^aR_g(x_1, ..., x_n, x_0))$,

27. $\mathrm{G}\, r_{Rf}(n+1) = \mathrm{G}\, r_{Rg}(n+1) \leftrightarrow \forall x_0 ... \forall x_n ({}^rR_f(x_0, ..., x_n) \leftrightarrow {}^rR_g(x_0, ..., x_n))$.

Оскільки ж всяке відношення є заданням якої-небудь функції, це й доводить теорему.

Підсумовуючи відзначимо, що історично графіки були відкриті та введені в літературу винятково як прямі графіки функцій; це було зроблено Ґ. Фреґе у праці 1891 р. [7]. Зворотні графіки функцій та два типи відношень, які формує всяка n-місна функція за $n > 0$, були відкриті автором у 2017 р. (відповідна стаття наразі не опублікована). Ототожнення відношень з прямими графіками функцій здійснив, за свідченням К. Куратовського та А. Мостовського [10, с. 69, прим. 2], Дж. Пеано у праці 1911 р. [11]. Нині це трактування є загальноприйнятим. Але, як ми показали вище у розділі 1, воно хибне, а тому має бути відкинуте.

Натомість, ми пропонуємо прийняти логічну теорію відношень, яка формулюється у логіці функцій (остання є узагальненням логіки предикатів). Така теорія матеріально адекватна, оскільки в ній графіки не зводяться до декартових добутків, а вводяться незалежно. Відтак, у ній $G_R(0) = \{\Lambda\}$ для всіх $R^{(0)}$, а жодне $R^{(n)}$, зокрема й $R^{(0)}$, взагалі не є множиною. У нашій логічній теорії відношення – це задання (однозначні представлення) функцій; і, як і функції, вони є *змістовними* (у сенсі: *інтенсіональними*) об'єктами, на відміну від графіків, котрі, будучи множинами, суть *об'ємні* (*екстенсіональні*) об'єкти (це протиставлення, яке у дофреґевській логіці формулювалося як протиставлення *логіки змісту* та *логіки об'єму*, не слід плутати із введеним в даній роботі протиставленням змістовної та логічної частин ядра відношення). Оскільки ж ми приймаємо, услід за Фреґе, що функції суть логічно первинні щодо своїх графіків [6, с. 26, прим.], то те саме стосується й відношень, котрі суть представлення (довільних об'єктів) функціями: *відношення логічно первинні щодо своїх графіків.* Зокрема, нульмісні відношення не визначаються своїми графіками, оскільки всі ці графіки збігаються; натомість, згідно з (11), графіки визначаються своїми відношеннями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гильберт Д., Бернайс П. *Основания математики. Т. 1. Логические исчисления и формализация арифметики* / пер. с нем. М., 1979. 557 с.

2. Кохан Я. Непомічена металогічна дисципліна. *Філософські діалоги. 2009.* Вип. 1. С. 325–340.

3. Кохан Я. О. Символічна логіка: повернення до витоків. Стаття III. Похідні логістичні категорії. *Мультиверсум. Філософський альманах*. 2021. Вип. 2 (2). С. 141–155. https://doi.org/10.35423/2078-8142.2021.2.2.9

4. Кохан Я. О. Символічна логіка: повернення до витоків. Стаття IV. Графіки функцій та відношень. *Мультиверсум. Філософський альманах*. 2023. Вип. 2(2). С. 129–143. https://doi.org/10.35423/2078-8142.2023.2.2.6

5. Church A. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Princeton : Princeton University Press; London : Humphrey Milford Oxford University Press, 1941. P. ii, 82.

6. Frege G. *Basic Laws of Arithmetic. Derived using concept-script. Vol. I & II.* Oxford : Oxford University Press, 2016. P. xxxix, XXXII, 253, XV, 285, A-42, I-11.

7. Frege G. Function and Concept. Geach P., Black M. (Eds). *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Oxford : Basil Blackwell, 1960. P. 21–41.

8. Frege G. What is a Function? Geach P., Black M. (Eds). *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Oxford : Basil Blackwell, 1960. P. 107–116.

9. Kokhan Y. Semantic presuppositions in logical syntax. *Journal of Applied Non-Classical Logic*. 2012. Вип. 1. P. 41–56.

10. Kuratowski K., Mostowski A. *Set Theory* / trans. from Polish. Warszawa : PWN; Amsterdam : North-Holland, 1968. P. viii, 417.

11. Peano G. Sulla defnizione di funzione. *Atti della Reale Accademia dei Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*. 1911. Vol. 20. P. 3–5.

12. Popper K. *The Open Society and Its Enemies*. New One-Volume ed. Princeton and Oxford : Princeton University Press, 2013. P. xlvi, 755.

13. Tarski A. *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences* (4th ed.). New York and Oxford : Oxford University press, 1994. P. xxii, 229.

14. Tarski A. *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*. Oxford : Clarendon Press, 1956. P. xiv, 472.

REFERENCES

Hilbert, D., & Bernays, P. (1979). *Foundations of Mathematics. Vol. 1. Logical Calculi and Formalization of Arithmetics*. Translated from German. M.: Nauka.

Kokhan, Y. (2023). Symbolic Logic: Return to the Origins. Paper IV. Function and Relation Graphs. *Multiversum. Philosophical Almanac*, *2*(2), 129-143. https://doi.org/10.35423/2078-8142.2021.2.2.9 [In Ukrainian].

Church, A. (1941). *The Calculi of Lambda-Conversion*. Princeton : Princeton University Press; London : Humphrey Milford Oxford University Press.

Frege, G. (2016). *Basic Laws of Arithmetic. Derived using concept-script. Volumes I & II.* Oxford : Oxford University Press.

Frege, G. (1960). Function and Concept. In: Geach, P. & Black, M. (Eds). *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* (pp. 21-41). Oxford : Basil Blackwell.

Frege, G. (1960a). What is a Function? In: Geach, P. & Black, M. (Eds). *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* (pp. 107-116). Oxford : Basil Blackwell.

Kokhan, Y. (2012). Semantic presuppositions in logical syntax. *Journal of Applied Non-Classical Logic, 1*, 41-56.

Kuratowski, K. & Mostowski, A. (1968). *Set Theory*. Translated from Polish. Warszawa : PWN, Amsterdam: North-Holland.

Peano, G. (1911). Sulla defnizione di funzione, *Atti della Reale Accademia dei Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, 20*, 3-5. [In Italian].

Popper, K. (2013). *The Open Society and Its Enemies*. New One-Volume ed. Princeton and Oxford : Princeton University Press.

Tarski, A. (1994). *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences* (4th ed.). New York, Oxford : Oxford University press.

Tarski, A. (1956). *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*. Oxford : Clarendon Press.

Yaroslav Kokhan
Candidate of Philosophical Sciences, Junior Researcher at the Department of Logic and Sciense Methodology of the H. Skovoroda Institute of Philosophy of the NAS of Ukraine; Kyiv, Ukraine; e-mail: yarkaen@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8958-772X

Why Relations are not Identical to their Graphs

Abstract

In mathematics, the identification of relations with their graphs, proposed by Giuseppe Peano, is generally accepted. However, this identification is refuted by the extreme example of 0-ary relations. The paper contains the proof under question. Therefore, we develop an alternative theory of relations, which is built within the logic of functions (functional logic, or function logic). On the basis of the primary, undefined logical notions of a particular (atomic object), representation (the ambiguous specifying), and a sequence, we define the notions of a(n ambiguous) function and a set, after which we define relations as those laws that uniquely define (determine, specify) individual functions. So a relation is in general case the representation (of an object) by some function, which we call forming one for this relation. The degenerate case of a relation is the case of the representation by a paricular (without a function). The general case of a function is an umbiguous function, i.e., a partial multimap rather than a map. Representation is the ulimate generalization of equality, so we define equality and uniformity (sameness) via representation as its partial cases. In functional logic, we use the notion of a finite sequence as the simplest case of the general notion of a sequence. Each function has two different defining relations: the obverse one and the reverse one. Every more than 0-ary function has two graphs: the obverse one (the graph of its obverse relation) and the inverse one (the graph of its reverse relation). The relations between relations themselves and their graphs are determined by postulate V of Frege's formal arithmetic (Grundgesetze System), which (postulate) is a theorem in the logic of functions. In the paper, this theorem is proved in its most general formulation.

***Keywords**: relation, relation graph, function graph, functional logic, Grundgesetze.*