

ГІДРОДИНАМІКА ШКІДЛИВИХ ВИКИДІВ В АТМОСФЕРУ



А. А. Долінський, докт. техн. наук,
Б. Х. Драганов, докт. техн. наук,
М. А. Сироватка

Актуальність проблеми. Широкий клас технологічних процесів, під час здійснення яких мають місце хімічні реакції і фізичні перетворення, супроводжуються великою кількістю шкідливих викидів. Значна частина отруйних інгредієнтів виникають і потрапляють в атмосферу в результаті горіння. Крім того, шкідливі речовини утворюються не лише антропогенним шляхом, але також у результаті природних явищ: виверження вулканів, лісові пожежі, порушення в роботі атомних станцій тощо.

Україна має розвинуту мережу гірничовидобувних, металургійних, хімічних, енергогенеруючих і інших підприємств, які постійно забруднюють навколишнє середовище. У цілому рівень технічного забруднення території України вище, ніж у 12 країнах Європейського Союзу разом узятих.

Мета дослідження – оцінювання шкідливих викидів в атмосферу, засноване на теоретичних методах аналізу. Це сприятиме визначенню конкретних шляхів вирішення екологічної проблеми.

Метод дослідження ґрунтується на формулюванні математичної моделі аналізованих явищ і визначенні методів їхнього рішення. При цьому розглядаються можливі варіанти гідродинаміки потоків (ламінальний потік, турбулентна дифузія, випадок нелінійних диференціальних рівнянь).

Результат дослідження. Надано розрахунок ступеня забруднення атмосфери.

Будемо вважати, що порушення рівноваги в середовищі пов'язане зі зміною концентрації від точки до точки і з наявністю в ній макроскопічного конвективного руху. Припустимо, що температура суміші є постійною, а градієнт тиску досить малий.

Таким чином, перенесення речовини в рухому середовищі буде обумовлене лише двома різними механізмами: зважені газоаерозольні частинки захоплюються середовищем і переносяться разом із ним; за наявності різниці концентрацій у

середовищі виникає молекулярна і турбулентна дифузія. Сукупність обох процесів називають конвективною дифузією речовини в повітряному або рідкому середовищі. Візьмемо диференціальне рівняння, яке описує дифузне перенесення в рухомому нестискуваному середовищі. Припустимо, що процес відбувається в стаціонарному і ламінарному режимі [1; 2].

У даному просторі можна провести деякі уявні поверхні, в кожній точці яких у певний проміжок часу t концентрація постійна. Такі поверхні називають ізоплетами. Основна гіпотеза математичної теорії дифузії полягає в тому, що дифузійний потік речовини через одиницю площі ізоплети в одиницю часу зсередини назовні, дорівнює:

$$\vec{J}_d = -D \frac{\partial C}{\partial n} = -D \text{grad} C = -D \frac{\partial C}{\partial x_k}, \quad (1)$$

де D – коефіцієнт молекулярної дифузії, що залежить у загальному випадку від концентрації C і температури T ;

n – зовнішня нормаль до поверхні. Знак мінус вказує, що потік речовини спрямований у бік зменшення концентрації речовини.

Якщо зважена речовина знаходиться в рухому зі швидкістю \vec{V} середовищі, то остання захоплює його у своєму русі. Поряд із дифузійним при цьому виникає конвективний потік (маса речовини, що переноситься середовищем через одиницю площі в одиницю часу): $\vec{J}_k = C\vec{V}$. Повний потік речовини являє собою суму конвективного і дифузійного потоків:

$$\vec{J} = \vec{J}_k + \vec{J}_d = \vec{V}C - D \text{grad} C \quad (2)$$

Виділимо в розглянутому суцільному середовищі довільний об'єм W , обмежений поверхнею S . Нехай в розглянутому об'ємі знаходиться джерело речовини, потужність якого дорівнює Q (мг/с).

На основі закону збереження впливає, що

зміна маси речовини в об'ємі W в одиницю часу дорівнює сумі маси речовини, яка проходить через поверхню, що обмежує даний об'єм, і притоку речовини від джерела. Беручи до уваги це положення та використовуючи перетворення поверхневого інтеграла за формулою Остроградського-Гаусса [3] отримуємо:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div} \vec{V}C = \text{div}(D \text{grad}C) + G \quad (3)$$

У прямокутній декартовій системі координат рівняння конвективної дифузії в ламінарно рухомому середовищі запишеться так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} + \frac{\partial wC}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + G, \end{aligned} \quad (4)$$

де u, v, w – відповідні компоненти швидкості рухомого суцільного середовища, які в загальному випадку є функціями координат і повинні бути визначені з гідродинамічної задачі; D_x, D_y, D_z – коефіцієнт молекулярної дифузії у відповідних напрямках.

Можна конвертувати:

$$\text{div}(\vec{V}C) = \vec{V} \text{grad}C + C \text{div} \vec{V}. \quad (5)$$

Унаслідок нестисненості середовища $\text{div} \vec{V} = 0$. Тоді рівняння для концентрації набирає вигляду:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \text{grad}C = \text{div}(D \text{grad}C) + G \quad (6)$$

або:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + G. \end{aligned} \quad (7)$$

Узагальнимо тепер рівняння для випадку турбулентно рухомого середовища. Уявімо концентрацію речовини і швидкість вітру у вигляді суми середнього значення і малих пульсаційних складових:

$$C = \bar{C} + C', \quad u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad (8)$$

причому

$$\bar{C} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} C dt, \quad \bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u dt, \quad (9)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} v dt, \quad \bar{w} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} w dt,$$

$$\bar{C}' = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} C' dt = 0, \quad \bar{u}' = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u' dt = 0, \quad (10)$$

$$\bar{v}' = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} v' dt = 0, \quad \bar{w}' = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} w' dt = 0.$$

У більшості випадків молекулярним переносом можливо знехтувати. У цьому разі будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{ty} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) + \bar{G}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отже, конвективна дифузія описується рівнянням у часткових похідних другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Для його вирішення необхідно знати розподіл речовини в даній області в початковий момент (початкова умова), геометрію розглянутої області (безмежне, напівобмежене або обмежене середовище) і закон взаємодії досліджуваної домішки з граничною поверхнею (гранична умова). Початкова умова записується в такому вигляді:

$$C(x, y, z, t)|_{t=0} = f(x, y, z), \quad (12)$$

де $f(x, y, z)$ – відома функція координат.

Як гранична умова на нескінченності задають, що концентрація в разі віддалення від джерела прямує до фонових значенням C_0 або до нуля:

$$C = C_0, \quad \text{при } l \rightarrow \infty,$$

де l – відстань до джерела.

На граничній поверхні умови мають більш складний вигляд. При завданні концентрації ре-

човини на граничній поверхні S у будь-який проміжок часу маємо граничну умову першого роду:

$$C(x, y, z, t)|_S = f_S(x^S, y^S, z^S, t). \quad (13)$$

В окремому випадку концентрація протягом усього процесу підтримується постійною ($\bar{N}|_S = const$) або дорівнює нулю ($\bar{N}|_S = 0$).

Гранична умова другого роду полягає в заданні густини потоку речовини на граничну поверхню як функції часу:

$$-D_n \frac{\partial C}{\partial n}|_S = \mu_S(x^S, y^S, z^S, t). \quad (14)$$

Найпростіший випадок однорідної граничної умови другого роду полягає в постійності потоку речовини на поверхню

$$-D_n \frac{\partial C}{\partial n}|_S = \mu = const. \quad (15)$$

Досліджуючи розповсюдження газоаерозольних домішок в атмосфері, припускають, що на поверхні землі виконується умова відображення (потік речовини на поверхні дорівнює нулю):

$$-D_n \frac{\partial C}{\partial n}|_S = 0. \quad (16)$$

Розглянемо нелінійну задачу дифузії, під час вирішення якої необхідно враховувати концентраційні залежності коефіцієнта дифузії D , коефіцієнта масовіддачі β , щільності внутрішніх джерел маси.

Рівняння нелінійної, нестационарної дифузії записується так:

$$\partial \tilde{N} / \partial \tau = \text{div}[D(C) \text{grad} C(P, \tau)] + J(P, \tau), \quad (17)$$

$$P \in G, \tau \in O,$$

$$C(P, \tau)|_{\tau=0} = f(P), P \in G, \quad (18)$$

$$D(C) \partial C(P, \tau) / \partial n = \varphi(P, \tau), P \in F, \tau \in O. \quad (19)$$

Задача (17) – (19) описує дифузію розподіленої речовини в довільній області G за умови нерівномірного початкового розподілення $f(P)$, граничної умови другого роду (19) і загального вигляду залежності коефіцієнта дифузії від концентрації розподіленої речовини $D(C)$.

Для нелінійних диференціальних рівнянь дифузії не існує загальних методів інтегрування,

а також формул що дають змогу отримувати рішення в замкнутому вигляді. Тому обмежуються в основному наближеними рішеннями.

Проаналізуємо найбільш використовувані методи рішення.

Перетворення Кірхгофа. У даному випадку описується дифузія розподіленої речовини в довільній області при нерівномірному початковому розподілі $f(P)$, граничній умові другого роду.

Використовується перетворення Кірхгофа [4]

$$\theta(P, \tau) = \int_0^C (1/D_0) D(C') dC', \quad (20)$$

де $D_0 = D(C)|_{C=0}$ – коефіцієнт дифузії при $C=0$.

У випадку граничної умови другого роду перетворення Кірхгофа зводить вихідне рівняння до лінійної умови.

Для нестационарної задачі вважають $D(C) = const$. Це дає змогу отримати аналітичне рішення задачі.

Перетворення Больцмана виходить з опису дифузії розподіленої речовини в напівобмеженому середовищі за рівномірного розподілу початкової концентрації $C_0 = const$ [5].

Один із підходів до вирішення вихідного рівняння, отриманого в результаті перетворення Больцмана, – розкладання функції в ряд по параметру, що фігурує в рівнянні.

Аналогічний підхід має місце в методі послідовних наближень (метод ітерації). Ідея методу полягає в розкладанні шуканого рішення в ряд за певним параметром таким чином, щоб отримати рекурентну формулу, що пов'язує послідовні наближення за умови знаходження нульового наближення як рішення лінійної задачі.

Перетворення Лапласа спільно з методом Бубнова-Галеркіна. Цей метод відзначається особливою ефективністю в разі вирішення нелінійних нестационарних задач теорії теплопровідності і дифузії. Вихідне рівняння дифузії в просторі зображень за допомогою перетворення Лапласа з тимчасової змінної зводять до рівняння еліптичного типу, для якого за методом Бубнова-Галеркіна можна отримати рішення через так звані координатні функції. При цьому точність рішення багато в чому залежить від раціонального підбору цих функцій. Отримане в просторі зображень наближене рішення переводять в область оригіналів зворотним перетворенням по Лапласу. Метод Бубнова-Галеркіна надає можливість зна-

йти точний закон зміни концентрації розподілення речовини в часі. Треба визнати не для спочатку шуканої функції, а для дещо зміненої $C_{Tl}(P,t)$, в якій розподіл концентрації за просторовими змінними відомо наближено [6; 7].

Метод розподілення змінних (метод Фур'є) – модифікація класичного методу розкладання шуканого рішення в ряд Фур'є, використовуваний для вирішення нелінійних дифузних завдань. При цьому в кожному конкретному випадку завдання $D=D(C)$ пропонують окремий підхід до такого вирішення [8].

Метод Фур'є виявляється занадто громіздким у разі вирішення складних завдань. Для малих проміжків часу t у спільному вирішенні доводиться враховувати велику кількість членів [9].

Метод кінцевих інтегральних перетворень. Методу інтегральних перетворень притаманні ті ж обмеження, що і для методу розділення змінних: він застосовний до лінійних диференціальних рівнянь з лінійними граничними умовами, що розглядаються в нескладних областях зміни незалежних змінних. У деяких роботах [8; 10] наведені інтегральні співвідношення дають змогу знаходити наближені рішення нелінійних задач типу нестационарних теплопровідностей і дифузії. Особливий інтерес являє собою метод інтегральних перетворень у кінцевих і нескінченних межах [3; 9; 10]. Метод кінцевих інтегральних перетворень, будучи узагальненим методом розділення змінних, не вимагає відомості граничних умов щодо однорідних, з одного боку, і не призводить до труднощів, пов'язаних із зворотним переходом до неоднорідних початкових умов у разі застосування перетворення Лапласа – з іншого.

Висновки

Описаний метод розрахунку дає можливість визначити не тільки ступінь поширення викидів у навколишнє середовище, але й динаміку їх зміни в часі або залежно від прийнятих заходів щодо їхнього обмеження.

Слід зазначити, що безперервне наростання темпів забруднення середовища пояснюється тим, що промисловість країни орієнтована на ресурсо- і енерговитратне виробництво. Використання ж альтернативних джерел енергії вкрай незначне. Крім того, значна частина продукту виробляється на старому обладнанні з низьким рівнем технологічного процесу. Слід також зазначити, що велика частка викидів виникає внаслідок діяльності комунального господарства.

Отже, тільки суспільство, що відзначається високим рівнем суспільної свідомості, може встановити розумні обмеження щодо обсягу споживання природних ресурсів, у першу чергу, техногенних джерел.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Абрамовский Е. Р.* Приближенный метод расчета метеорологических показателей и поля концентраций загрязняющей примеси в пограничном слое атмосферы / Е. Р. Абрамовский, Е. В. Егоров, А. В. Хаминич // Вісник Дніпропетровського університету, сер.: Механіка. – Д.: Вид-во ДНУ, 2003. – Вип. 7. – Т. 1. – С. 73–83.
2. *Бабенко Д. И.* Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. – Л.: Химия, 1986, 144 с.
3. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука. – 1966. – 724 с.
4. *Crank I.* The Mathematics of Diffusion. Oxford: Clarendon Press / 1975. – 414 p.
5. *Лыков А. В.* Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Изв. АН СССР. Сер.: Энергетика и транспорт. – 1970. – № 5. – С. 109–150.
6. *Келдыш М. В.* О методе В.Г. Галеркина для решения краевых задач // Изв. АН СССР. Сер.: Математика, 1942. – № 6. – С. 309–330.
7. Диффузия в химико-технологических процессах / *Рудибашта С. П., Карташев Э. М.* – М.: Химия, 1993. – 208 с.
8. *Сурков Г. А.* К вопросу решения нелинейных уравнений теплопроводности. Тепломассообмен. – Минск, 1965. – 355 с.
9. *Мучник Г. Ф.* Методы теории теплообмена. Ч 1. Теплопроводность / Г. Ф. Мучник, И. Р. Рубатов. – М.: Высшая школа. – 1970. – 288 с.
10. *Лыков А. В.* Некоторые аналитические методы решения задачи нестационарной теплопроводности // Изв. АН СССР. – 1969. – № 2. – С. 3–27.