УДК 519.633.2

АЛГОРИТМІЧНІ АСПЕКТИ ПРОГРАМНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ FD-МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КЛЯЙНА – ГОРДОНА

В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: semberdmitry@gmail.com

In the paper we propose explicit and implicit schemes of the functional-discrete method (FD-method) for solving a nonlinear Klein – Gordon equation. The algorithm for the proposed FD-method is described and investigated from the complexity point of view. Explicit and implicit schemes of the FD-method are compared by numerical example.

Представлены явная и неявная схемы функционально-дискретного метода (FD-метода) решения нелинейного уравнения Кляйна – Гордона. Описан алгоритм предлагаемого FD-метода, который исследован с точки зрения его сложности. Явная и неявная схемы FD-метода сравниваются с помощью численного примера.

1. Вступ. Дана робота є логічним продовженням статті [1], в якій запропоновано та обґрунтовано явну схему функціонально-дискретного методу (FD-методу) розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Кляйна – Гордона

$$\frac{\partial^2 v(\xi,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(\xi,t)}{\partial \xi^2} + \mathbb{N}(v(\xi,t)) = \Phi(\xi,t). \tag{1}$$

Відомо, що нелінійне рівняння Кляйна – Гордона (1) широко застосовується в сучасній фізиці та інженерії. Зокрема, воно виникає при вивченні скалярного масивного поля у просторах де Сіттера та анти-де Сіттера [20, 21], при вивченні розповсюдження інтенсивних ультракоротких оптичних імпульсів з низькою щільністю діелектриків [7], піонних атомів [15] і т. д. Крім того, частинний випадок рівняння Кляйна – Гордона — рівняння синус-Гордона (the Sine-Gordon equation) — також має численні застосування у фізиці. Воно зустрічається при вивченні поширення магнітного потоку у переходах Джозефсона [4], динаміки доменної стінки в магнітних кристалах [2] і т. д. Крім того, в теорії сильних взаємодій рівняння синус-Гордона фігурує як спрощення класичної моделі [16, 18]. У геометрії задачі Гурса та Коші для рівняння синус-Гордона пов'язані з існуванням спеціальних сіток на поверхнях у просторі E^3, які називаються чебишовськими сітками [17].

Функціонально-дискретний метод — це симбіоз скінченно-різницевого методу та методу гомотопій (методу продовження за параметром), завдяки чому він має основні властивості як аналітичних, так і дискретних методів одночасно. FD-метод, запропонований в [1], базується на загальній схемі FD-методу розв'язування операторних рівнянь, що наведена в [5, 12], і походить з функціонально-дискретного методу розв'язування задачі Штурма – Ліувілля (див. [13, 14]).

У даній роботі разом з явною схемою FD-методу (див. [1]) ми розглянемо також неявну схему FD-методу та порівняємо дві схеми з точки зору складності програмної реалізації та швидкості збіжності.

2. Короткий опис FD-методу (явна і неявна форма). Розглядається наступна задача Гурса для рівняння Кляйна – Гордона (1), яке наведено в дещо модифікованому вигляді, більш зручному для застосування до нього запропонованого методу:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \mathbb{N}(u(x,y)) = f(x,y), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \psi(x), \quad u(0,y) = \phi(y), \quad \psi(0) = \phi(0), \tag{3}$$

де $u(x,y) = v(x-y, x+y)$, $f(x,y) = \Phi(x-y, x+y)$.

Припускається, що нелінійну функцію $\mathbb{N}(u)$ можна зобразити у вигляді

$$\mathbb{N}(u) = N(u)u, \quad N(u) = \sum_{s=0}^{\infty} \nu_s u^s \ \ \forall u \in \mathbf{R}, \quad \nu_s \in \mathbf{R},$$

а також виконуються наступні умови:

$$\psi(x) \in C^{(1)}(D_1) \cap C(\bar{D}_1), \quad \phi(y) \in C^{(1)}(D_2) \cap C(\bar{D}_2), \quad f(x,y) \in C(\bar{D}),$$

$$D = \{(x,y) : 0 < x < X, 0 < y < Y\}, \quad D_1 = (0; X), \quad D_2 = (0; Y).$$

Із зроблених припущень випливає, що розв'язок $u(x,y) \in C^{1,1}(D) \cap C(\bar{D})$ задачі Гурса (2), (3) існує і є єдиним у D (див. [10]).

Згідно із загальною схемою FD-методу, ми наближаємо точний розв'язок $u(x,y)$ задачі (2), (3) функцією $\overset{m}{u}(x,y)$, яка визначається таким чином:

$$\overset{m}{u}(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \overset{(k)}{u}(x,y), \quad m \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Для визначення функцій $\overset{(k)}{u}(x,y)$ введемо до розгляду наступну сітку:

$$x_i = h_1 i, \quad y_j = h_2 j, \quad h_1 = \frac{X}{N_1}, \quad h_2 = \frac{Y}{N_2}, \quad i \in \overline{0, N_1}, \quad j \in \overline{0, N_2}, \quad N_1, N_2 \geq 1. \tag{5}$$

Використовуючи ідею, викладену в [5, 6], розглянемо наступне узагальнення задачі (2), (3):

$$\frac{\partial^2 u(x,y,\tau)}{\partial x \partial y} + N(u_{\alpha,\perp}(x,y,\tau))u(x,y,\tau) - \\ - \tau \left[N(u_{\alpha,\perp}(x,y,\tau)) - N(u(x,y,\tau))\right] u(x,y,\tau) = f(x,y), \tag{6}$$

$$u(x,0,\tau) = \psi(x), \quad u(0,y,\tau) = \phi(y), \quad \psi(0) = \phi(0), \quad \tau \in [0;1], \tag{7}$$

де

$$u_{\alpha,\perp}(x,y,\tau) = u(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})$$
$$\forall (x,y) \in [x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j) \quad \forall \alpha \in [0;1] \quad \forall i \in \overline{1,N_1} \quad \forall j \in \overline{1,N_2}.$$

Припускаючи, що розв'язок $u(x,y,\tau)$ задачі (6), (7) існує для будь-якого $\tau \in [0;1]$, неважко зробити висновок, що $u(x,y) = u(x,y,1)$. Крім того, припускаючи, що розв'язок $u(x,y,\tau)$ може бути знайдений у вигляді ряду

$$u(x,y,\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \overset{(i)}{u}(x,y)\tau^i, \tag{8}$$

де $\overset{(i)}{u}(x,y)$ — функції, що не залежать від τ, приходимо до висновку, що розв'язок $u(x,y)$ задачі (2), (3) може бути з довільною точністю наближений за допомогою функції $\overset{(m)}{u}(x,y)$ (4). Підставляючи ряд (8) у задачу (6), (7) та прирівнюючи функціональні коефіцієнти при однакових степенях τ, переконуємось, що невідому функцію $\overset{(0)}{u}(x,y) \in C(\bar{D})$ можна знайти як розв'язок нелінійної задачі Гурса з кусково-сталим коефіцієнтом, яка називається *базовою задачею:*

$$\frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + N(\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))\, \overset{(0)}{u}(x,y) = f(x,y) \ \forall (x,y) \in \bar{P}_{i,j}, \tag{9}$$

$$\overset{(0)}{u}(x,0) = \psi(x), \quad \overset{(0)}{u}(0,y) = \phi(y) \quad \forall (x,y), \in \bar{D}, \quad \psi(0) = \phi(0), \tag{10}$$

де

$$P_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), \quad i \in \overline{1,N_1}, \quad j \in \overline{1,N_2}. \tag{11}$$

Функції $\overset{(k)}{u}(x,y) \in C(\bar{D})$, $k \in \overline{1,m}$, шукаються як розв'язки наступної послідовності лінійних задач Гурса:

$$\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + N(\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))\, \overset{(k)}{u}(x,y) =$$
$$= -N'(\overset{(0)}{u}(x,y))\, \overset{(0)}{u}(x,y)\, \overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}) -$$
$$- \sum_{s=1}^{k-1} A_{k-s}(N; \overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}), \ldots, \overset{(k-s)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))\, \overset{(s)}{u}(x,y) -$$
$$- A_k(N; \overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}), \ldots, \overset{(k-1)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}), 0)\, \overset{(0)}{u}(x,y) +$$

$$+\sum_{s=0}^{k-1}\left[A_{k-1-s}(N;\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha}),\ldots,\overset{(k-1-s)}{u}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha}))-\right.$$

$$\left.-\ A_{k-1-s}(N;\overset{(0)}{u}(x,y),\ldots,\overset{(k-1-s)}{u}(x,y))\right]\overset{(s)}{u}(x,y)=\overset{(k)}{F}(x,y), \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\overset{(k)}{u}(x_{i-1}+0,y)=\overset{(k)}{u}(x_{i-1}-0,y),\quad \overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}+0)=\overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}-0)\\ \forall(x,y)\in\bar{P}_{i,j}\quad i\in\overline{1,N_1}\quad j\in\overline{1,N_2},\end{gathered} \tag{13}$$

$$\overset{(k)}{u}(0,y)=\overset{(k)}{u}(x,0)=0\quad \forall x\in[0,X]\quad \forall y\in[0,Y]. \tag{14}$$

Через $A_n(N;v_0,v_1,\ldots,v_n)$ позначено поліноми Адомяна n-го порядку для функції $N(\cdot)$ (див., наприклад, [8, 11, 19]), які можуть бути обчислені за формулою

$$A_n(N;v_0,v_1,\ldots,v_n)=\frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{d\tau^n}\,N\left(\sum_{s=0}^{\infty}v_s\tau^s\right)\bigg|_{\tau=0}=$$

$$=\sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=n\\ \alpha_1\geq\ldots\geq\alpha_{n+1}=0\\ \alpha_i\in\mathbf{N}\cup\{0\}}}N^{(\alpha_1)}(v_0)\frac{v_1^{\alpha_1-\alpha_2}}{(\alpha_1-\alpha_2)!}\cdots\frac{v_n^{\alpha_n-\alpha_{n+1}}}{(\alpha_n-\alpha_{n+1})!}. \tag{15}$$

Відомо (див., наприклад, [3]), що розв'язки задач (9) – (12) можна записати в явному вигляді за допомогою розв'язуючого оператора, роль якого відіграє функція Рімана:

$$\begin{aligned}\overset{(k)}{u}(x,y)=\ & R(x,y_{j-1},x,y)\ \overset{(k)}{u}(x,y_{j-1})+R(x_{i-1},y,x,y)\ \overset{(k)}{u}(x_{i-1},y)-\\ & -R(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha},x,y)\ \overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha})-\\ & -\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi,y_{j-1},x,y)\right]\overset{(k)}{u}(\xi,y_{j-1})\,d\xi-\\ & -\int\limits_{y_{j-1}}^{y}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}R(x_{i-1},\eta,x,y)\right]\overset{(k)}{u}(x_{i-1},\eta)\,d\eta+\\ & +\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\int\limits_{y_{j-1}}^{y}R(\xi,\eta,x,y)g_k(\xi,\eta)d\xi d\eta\quad \forall(x,y)\in\bar{P}_{i,j},\end{aligned} \tag{16}$$

де

$$g_k(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & k=0; \\ -N'l(\overset{(0)}{u}(x,y))\ \overset{(0)}{u}(x,y)\ \overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}) - \overset{(k)}{F}(x,y), & k>0, \end{cases}$$

$$R(x,y;\xi,\eta) = J_0\left(\sqrt{4N_{i,j}(x-\xi)(y-\eta)}\right) = {}_0F_1(1; -(x-\xi)(y-\eta)N_{i,j}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} R(x,y;\xi,\eta) = {}_0F_1(2; -(x-\xi)(y-\eta)N_{i,j})N_{i,j}(\eta-y), \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} R(x,y;\xi,\eta) = {}_0F_1(2; -(x-\xi)(y-\eta)N_{i,j})N_{i,j}(\xi-x),$$

$$N_{i,j} = \left| N(\overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})) \right| \quad \forall (x,y),(\xi,\eta) \in \bar{P}_{i,j}, \quad i \in \overline{1,N_1}, \quad j \in \overline{1,N_2},$$

а через J_0, ${}_0F_1$ позначено функцію Бесселя першого роду нульового порядку та вироджену гіпергеометричну функцію відповідно (див. [9]).

При $\alpha = 0$ описаний вище алгоритм — це *явна схема* FD-методу, при $\alpha > 0$ — *неявна схема* FD-методу. Взагалі кажучи, α може набувати довільних значень $0 \le \alpha \le 1$, але в даній роботі під *неявною схемою* FD-методу ми розумітимемо таку схему, в якій $\alpha = 1$.

В роботі [1] було знайдено достатні умови збіжності явної схеми FD-методу та одержано оцінки швидкості такої збіжності. Крім того, було досліджено апроксимаційні властивості розв'язку базової задачі (9), (10) по відношенню до розв'язку вихідної задачі (2), (3). Нижче основні результати з [1] наведено у вигляді теорем.

Теорема 1. *Припустимо, що $u(x,y)$ — розв'язок задачі (2), (3), а $\overset{(0)}{u}(x,y)$ — розв'язок задачі (9), (10) при $\alpha = 0$. Тоді для довільних достатньо малих значень h_1 та h_2 існує не залежна від h_1 та h_2 стала κ така, що має місце наступна оцінка:*

$$\left\| u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y) \right\|_{\bar{D}} \le h\kappa, \quad h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}, \tag{18}$$

де $\|u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y)\|_{\bar{D}} = \max_{(x,y)\in\overline{D}} |u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y)|$.

Теорема 2. *Припустимо, що для задачі Гурса (2), (3) виконуються наступні умови:*

1) $\mathbb{N}(u) = u\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k u^k \ \forall u \in \mathbf{R}, \nu_k \in \mathbf{R}$;

2) $\psi(x) \in C^{(1)}(D_1) \cap C(\bar{D}_1), \phi(y) \in C^{(1)}(D_2) \cap C(\bar{D}_2), f(x,y) \in C(\bar{D})$.

Тоді явна схема FD-методу для задачі Гурса (2), (3) збігається до точного розв'язку задачі. Крім того, мають місце наступні оцінки абсолютної похибки методу:

$$\|u(x,y) - \overset{(m)}{u}(x,y)\|_{1,\bar{D}} \le \frac{cR}{(m+1)^{1+\varepsilon}(R-h)} \left(\frac{h}{R}\right)^{m+1}, \quad m \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \tag{19}$$

де $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, $h < R$[1] , а додатні дійсні сталі залежать лише від вхідних даних задачі (2), (3).

[1] Детальніше про походження сталої R див. [1].

3. Алгоритм програмної реалізації FD-методу та його обчислювальна складність. У даному пункті ми розглянемо питання алгоритмічної реалізації FD-методу (4) – (10) та оцінимо складність запропонованого алгоритму з точки зору кількості необхідних *основних операцій* (додавання, множення, ділення).

Очевидно, що інтеграли у формулі (16) не можуть бути виражені через елементарні функції. Тому для обчислення функцій $\overset{(k)}{u}(x,y)$, $k = 0,1,2,\ldots$, необхідно використовувати чисельні методи інтегрування. Однак безпосереднє застосування квадратурних формул таких, наприклад, як формули Ньютона – Котеса чи Sink-квадратурні формули, не є виправданим з точки зору обчислювальної складності. Причиною цього є той факт, що функція Рімана $R(x,y;\xi,\eta)$ (17) не може бути розщеплена на мультиплікативні частини (множники), кожна з яких залежить або лише від (x,y), або лише від (ξ,η). Іншими словами, застосовуючи квадратурні формули до інтеграла

$$\int\limits_{x_i}^{x}\int\limits_{y_j}^{y} R(\xi,\eta,x,y)g_k(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{20}$$

ми не можемо використати адитивну властивість інтеграла. Так, використовуючи, наприклад, квадратурну формулу Сімпсона, нам потрібно (як буде показано нижче) виконати порядку $O(n^4)$ основних операцій, де через n позначено дискретизацію прямокутника $[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$. На противагу цьому метод послідовних наближень є значно більш ефективним при обчисленні функцій $\overset{(k)}{u}(x,y)$, $k = 0,1,2,\ldots.$ Для того щоб проілюструвати цей факт, розглянемо прямокутник $P_{i,j} = (x_{i-1},x_i)\times(y_{j-1},y_j)$, $i \in \overline{1,N_1}$, $j \in \overline{1,N_2}$. Для обчислення наближеного значення інтеграла (20) розіб'ємо прямокутник $P_{i,j}$ деякою сіткою з рівномірними кроками по обох координатних осях $(x_i - x_{i-1})/p$ та $(y_j - y_{j-1})/p$ відповідно. Позначимо вузли цієї квадратурної сітки (ξ_k,η_l), $k,l \in \overline{1,p}$. Якби подвійний інтеграл (20) мав адитивну властивість, то для його обчислення за допомогою деякої квадратурної формули Ньютона – Котеса на сітці (ξ_k,η_l), $k,l \in \overline{1,p}$, нам потрібно було б виконати порядку p^2 основних операцій. Справді, двічі застосувавши до подвійного інтеграла, що має адитивну властивість, деяку квадратурну формулу Ньютона – Котеса з рівномірним розбиттям області інтегрування по обох координатах, одержимо

$$\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{0}^{y} f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \approx \int\limits_{0}^{x}\sum_{j=0}^{p}A_j f(\xi,y_j)d\xi = \sum_{j=0}^{p}A_j\int\limits_{0}^{x} f(\xi,y_j)d\xi \approx$$

$$\approx \sum_{j=0}^{p}A_j\sum_{i=0}^{p}B_i f(x_i,y_j) = \sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{p}A_jB_i f(x_i,y_j), \tag{21}$$

де A_j та B_i — деякі сталі, які залежать від коефіцієнтів застосованих квадратурних формул.

Підрахуємо скільки операцій додавання потрібно виконати, щоб обчислити інтеграл (20) у точках (ξ_k,η_l), $k,l \in \overline{1,p}$, за допомогою частинного випадку формули (21) — формули прямокутників. Позначимо через $r_{k,l}$ кількість операцій додавання[2], необхідних для

[2] У формулі прямокутників операцій додавання значно більше, ніж множення, тому останніми в даному випадку можна знехтувати.

обчислення інтеграла в точці (ξ_k, η_l). Тоді очевидно, що

$$r_{1,1} = 1, r_{1,2} = 2, r_{1,3} = 3, r_{1,4} = 4, \ldots, r_{1,p} = p,$$

а

$$\sum_{s=1}^{p} r_{1,s} = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2};$$

$$r_{2,1} = 2, r_{2,2} = 4, r_{2,3} = 6, r_{2,4} = 8, \ldots, r_{2,p} = 2p,$$

а

$$\sum_{s=1}^{p} r_{2,s} = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2p = \frac{2p(p+1)}{2};$$

$$r_{3,1} = 3, r_{3,2} = 6, r_{3,3} = 9, r_{3,4} = 12, \ldots, r_{3,p} = 3p,$$

а

$$\sum_{s=1}^{p} r_{3,s} = 3 + 6 + 9 + 12 + \ldots + 3p = \frac{3p(p+1)}{2}.$$

І в загальному

$$\sum_{s=1}^{p} r_{p,s} = p + 2p + 3p + 4p + \ldots + p^2 = p\frac{p(p+1)}{2}.$$

Тепер ми можемо підрахувати кількість S додавань, необхідних для наближеного обчислення згадуваного інтеграла в усіх вузлах сітки (ξ_k, η_l), $k, l \in \overline{1,p}$:

$$S = \frac{p(p+1)}{2} + \frac{2p(p+1)}{2} + \frac{3p(p+1)}{2} + \ldots + p\frac{p(p+1)}{2} =$$
$$= \frac{p(p+1)}{2}(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + p) = \frac{p(p+1)}{2}\,\frac{p(p+1)}{2} = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 = O(p^4). \quad (22)$$

Підрахуємо тепер кількість основних операцій, необхідних для безпосереднього знаходження функцій $\overset{(k)}{u}(x,y)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$, з рівнянь (9), (11), використавши метод послідовних наближень:

$$\overset{(r)}{u}_n(\xi_k, \eta_l) = -\int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_k}\int\limits_{y_{j-1}}^{\eta_l}\left[N\left(\overset{(r)}{u}_{n-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\right)\overset{(r)}{u}_{n-1}(x,y) -\right.$$
$$\left. - g_r\left(x, y, \overset{(r)}{u}_{n-1}(x,y)\right)\right]dy\,dx + \overset{(r)}{u}_n(x_{i-1}, \eta_l) +$$
$$+ \overset{(r)}{u}_n(\xi_k, y_{j-1}) - \overset{(r)}{u}_n(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}), \quad (23)$$

де

$$g_r(x, y, \overset{(r)}{u}_{n-1}(x, y)) =$$

$$= \begin{cases} f(x, y), & r = 0, \\ -N'\left(\overset{(0)}{u}(x, y)\right) \overset{(0)}{u}(x, y) \overset{(r)}{u}_{n-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}) - \overset{(r)}{F}(x, y), & r > 0, \end{cases}$$

$\overset{(r)}{u}_0(x, y) \equiv 0 \ \forall (x, y) \in P_{i,j}, \ r = 0, 1, 2, \ldots, \ k, l \in \overline{1, p}, \ i \in \overline{1, N_1}, \ j \in \overline{1, N_2}, \ n = 1, 2, \ldots.$

Отже, як було показано вище, в цьому випадку (див. формулу (21)) у кожному прямокутнику $P_{i,j}$ потрібно виконати порядку p^2 основних операцій. Оскільки таких клітин-прямокутників сітки ω є $N_1 \times N_2$, то на кожному кроці методу матимемо порядку $p^2 N_1 N_2$ основних операцій. А для m задач FD-методу (9)–(14) будемо мати порядку $mp^2 N_1 N_2$ основних операцій. Для знаходження наближення (4) потрібно ще виконати $(m+1)p^2 N_1 N_2$ операцію додавання. Отже, всього потрібно виконати порядку $mp^2 N_1 N_2 + (m+1)p^2 N_1 N_2 = (2m+1)p^2 N_1 N_2$ основних операцій.

Тепер аналогічним чином підрахуємо кількість основних операцій, які необхідно виконати для обчислення функцій $\overset{(k)}{u}(x, y)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, за формулами (16), (17). Оскільки в кожному прямокутнику $P_{i,j}$ розв'язок $\overset{(k)}{u}(x, y)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, зображується за допомогою формули (16), то, врахувавши (22), матимемо порядку $\left(\dfrac{p(p+1)}{2}\right)^2$ основних операцій у кожному з таких прямокутників. Оскільки таких клітин-прямокутників сітки ω є $N_1 \times N_2$, то на кожному кроці методу матимемо порядку $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 N_1 N_2$ основних операцій. А для m задач FD-методу будемо мати порядку $\left(\dfrac{p(p+1)}{2}\right)^2 m N_1 N_2$ основних операцій. Для знаходження наближення (4) потрібно ще виконати $\left(\dfrac{p(p+1)}{2}\right)^2 (m+1) N_1 N_2$ операцію додавання. Отже, всього потрібно виконати порядку $(2m+1)\left(\dfrac{p(p+1)}{2}\right)^2 N_1 N_2$ основних операцій.

Отже, як випливає з наведених міркувань, безпосереднє знаходження функцій $\overset{(k)}{u}(x, y)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$, з рівнянь (9), (11) з допомогою методу послідовних наближень є ефективнішим з точки зору кількості виконання основних операцій, ніж їх обчислення за формулами (16), (17).

Розглянемо детально алгоритм FD-методу. Нижче наведено дві алгоритмічні схеми, перша з яких — це алгоритм розв'язування базової задачі (9)–(11), а друга — алгоритм явної схеми FD-методу розв'язування послідовності задач (12)–(14). Тут $\overset{(0)}{u}_{p,k}(x, y)$ — розв'язок базової задачі методом послідовних наближень на k-му кроці цього методу у p-му прямокутнику сітки FD-методу ($p = \overline{1, N_1 \times N_2}$), ε — машинний епсілон (наприклад, для типу double $\varepsilon \approx 1 \cdot 10^{-16}$).

Алгоритм 1. Алгоритм FD-методу розв'язування базової задачі.

input: дійсні сталі $N_1, N_2 \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0$, функції $\psi(x) \in C^{(1)}(D_1) \cap C\left(\bar{D}_1\right)$
$\phi(y) \in C^{(1)}(D_2) \cap C\left(\bar{D}_2\right),\ f(x,y) \in C(\bar{D}),\ N(u) \in C^{\infty}(\mathbf{R})$
output: функції $\overset{(0)}{u}_{p,k}(x,y)$ такі, що $\left\|\overset{(0)}{u}_{p,k}(x,y) - \overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x,y)\right\|_{P_{i,j}} \le \varepsilon$
begin
  $\Phi(y) := \varphi(y); \Psi(x) := \psi(x)$
  $p := 1; \overset{(0)}{u}_{p,0}(x,y) := 0; \overset{(0)}{u}_{p,1}(x,y) := 1$
  for *j = 1 to* N_2 **do**
    for *i=1 to* N_1 **do**
      if *(i<>1) and (j<>1)* **then**
        $\Phi(y) := \overset{(0)}{u}_{p-1,k-1}(x_{i-1}, y)$
        $\Psi(x) := \overset{(0)}{u}_{p-N_1,k-1}(x, y_{j-1})$
      else
        if *(i=1) and (j>=2)* **then**
          $\Phi(y) := \varphi(y)$
          $\Psi(x) := \overset{(0)}{u}_{p-N_1,k-1}(x, y_{j-1})$
        else
          //Виконується, коли (j=1) and (i>=2)
          $\Psi(x) := \psi(x)$
          $\Phi(y) := \overset{(0)}{u}_{p-1,k-1}(x_{i-1}, y)$
        end
      end
      $k := 1; \overset{(0)}{u}_{p,0}(x,y) := 0; \overset{(0)}{u}_{p,1}(x,y) := 1$
      while $\left\|\overset{(0)}{u}_{p,k}(x,y) - \overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x,y)\right\|_{P_{i,j}} > \varepsilon$ **do**
        $\overset{(0)}{u}_{p,k}(x,y) := -\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\int\limits_{y_{j-1}}^{y}\Big(N\big(\overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\big)\ \overset{(0)}{u}_{p,k-1}(\xi,\eta) +$
        $+ f(\xi,\eta)\Big)d\xi d\eta + +\Phi(y) + \Psi(x) - \Phi(0)$
        k:=k+1
      end
      $p := p + 1$
    end
  end
end

Алгоритм 2. Алгоритм FD-методу розв'язування задач вищих рангів.

input: дійсні сталі $N_1, N_2 \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0,\ m$ — ранг FD-методу функції
$\psi(x) \in C^{(1)}(D_1) \cap C(\bar{D}_1),\ \phi(y) \in C^{(1)}(D_2) \cap C(\bar{D}_2),\ f(x,y) \in C(\bar{D}),\ N(u) \in C^{\infty}(\mathbf{R})$
output: функції $\overset{(r)}{u}_{p,k}(x,y)$, такі, що $\big\|\overset{(r)}{u}_{p,k}(x,y) - \overset{(r)}{u}_{p,k-1}(x,y)\big\|_{P_{i,j}} \le \varepsilon$
begin
  $\Phi(y) := \varphi(y); \Psi(x) := \psi(x), p := 1; r := 1; \overset{(r)}{u}_{p,0}(x,y) := 0; \overset{(r)}{u}_{p,1}(x,y) := 1$
  while *r>m* **do**
    for *j = 1 to N_2* **do**
      for *i=1 to N_1* **do**
        if *(i<>1) and (j<>1)* **then**
          $\Phi(y) := \overset{(r)}{u}_{p-1,k-1}(x_{i-1}, y);\ \ \Psi(x) := \overset{(r)}{u}_{p-N_1,k-1}(x, y_{j-1})$
        else
          if *(i=1) and (j>=2)* **then**
            $\Phi(y) := \varphi(y);\ \ \Psi(x) := \overset{(r)}{u}_{p-N_1,k-1}(x, y_{j-1})$
          else
            //Виконується, коли (j=1) and (i>=2)
            $\Psi(x) := \psi(x);\ \ \Phi(y) := \overset{(r)}{u}_{p-1,k-1}(x_{i-1}, y)$
          end
        end
        $k := 1; \overset{(r)}{u}_{p,0}(x,y) := 0; \overset{(r)}{u}_{p,1}(x,y) := 1$
        while $\big\|\overset{(r)}{u}_{p,k}(x,y) - \overset{(r)}{u}_{p,k-1}(x,y)\big\|_{P_{i,j}} > \varepsilon$ **do**
          $\overset{(r)}{F}(x,y) = -N'\big(\overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x,y)\big)\ \overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x,y)\ \overset{(r)}{u}_{p,k-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}) -$
          $-\sum\limits_{s=1}^{r-1} A_{r-s}\big(N; \overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}), \ldots, \overset{(r-s)}{u}_{p,k-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\big) \times$
          $\times\ \overset{(s)}{u}_{p,k-1}(x,y) -$
          $-A_r\big(N; \overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}), \ldots, \overset{(r-1)}{u}_{p,k-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}), 0\big) \times$
          $\times\ \overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x,y) +$
          $+\sum\limits_{s=0}^{r-1} \Big[A_{r-1-s}\big(N; \overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}), \ldots, \overset{(r-1-s)}{u}_{p,k-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\big) -$
          $-A_{r-1-s}\big(N; \overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x,y), \ldots, \overset{(r-1-s)}{u}_{p,k-1}(x,y)\big)\Big]\ \overset{(s)}{u}_{p,k-1}(x,y)$
          $\overset{(r)}{u}_{p,k}(x,y) := -\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\int\limits_{y_{j-1}}^{y} \big(N(\overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))\ \overset{(k)}{u}_{p,k-1}(x,y) -$
          $-\ \overset{(r)}{F}(\xi,\eta)\big) d\xi d\eta + \Phi(y) + \Psi(x) - \Phi(0)$
          k:=k+1
        end
        $p := p + 1$
      end
    end
    $r := r + 1$
  end
end

Поліноми Адомяна, які фігурують у виразі функції $\overset{(k)}{F}(x,y)$, $k = 0,1,2\ldots$ (13), можна обчислити за допомогою формули (15), зокрема у випадку нелінійної функції $N(u) \in \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ вони мають вигляд

$$A_0(N;u_0) = N(u_0),$$

$$A_1(N;u_0,u_1) = u_1 N'(u_0),$$

$$A_2(N;u_0,u_1,u_2) = u_2 N'(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} N''(u_0),$$

$$A_3(N;u_0,u_1,u_2,u_3) = u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} N'''(u_0),$$

$$A_4(N;u_0,u_1,u_2,u_3,u_4) = u_4 N'(u_0) + \left(u_1 u_3 + \frac{u_2^2}{2!}\right) N''(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} u_2 N'''(u_0) + \frac{u_1^4}{4!} N^{(IV)}(u_0),$$

$$A_5(N;u_0,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) = u_5 N'(u_0) + (u_1 u_4 + u_2 u_3) N''(u_0) + \\ + \frac{1}{2!}(u_1^2 u_3 + u_1 u_2^2) N'''(u_0) + \frac{u_1^3}{2!} u_2 N^{(IV)}(u_0) + \frac{u_1^5}{5!} N^{(V)}(u_0),$$

. . . .

Запропонований алгоритм FD-методу було реалізовано у відкритому програмному продукті, який є доступним за посиланням *http://sourceforge.net/projects/imathsoft*.

4. Порівняння явної та неявної схем FD-методу. Проведемо порівняння явної та неявної схем FD-методу за допомогою чисельного експерименту. Розглянемо наступну задачу Ґурса:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = e^{2u(x,y)}, \quad (x,y) \in D, \\ u(x,0) = \frac{x}{2} - \ln(1+e^x), \quad u(0,y) = \frac{y}{2} - \ln(1+e^y), \tag{24}$$

де $D = \{(x,y) \mid 0 < x < X, 0 < y < Y\}$. Легко бачити, що точним розв'язком даної задачі є функція

$$u^*(x,y) = \frac{x+y}{2} - \ln(e^x + e^y).$$

Застосовуючи до цієї задачі явну та неявну схеми FD-методу, описані вище, апроксимуємо точний розв'язок задачі (24) частинною сумою ряду (4), доданки якого $\overset{(k)}{u}(x,y)$ задовольняють наступну систему лінійних задач Ґурса:

$$\frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{1 - \exp(2\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))}{\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})} \overset{(0)}{u}(x,y) = 1,$$

$$\overset{(0)}{u}(x_{i-1}+0,y) = \overset{(0)}{u}(x_{i-1}-0,y), \quad \overset{(0)}{u}(x,y_{j-1}+0) = \overset{(0)}{u}(x,y_{j-1}-0),$$

$$\overset{(0)}{u}(x,0) = \frac{x}{2} - \ln(1+e^x), \quad \overset{(0)}{u}(0,y) = \frac{y}{2} - \ln(1+e^y),$$

$$\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{1 - \exp(2 \overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))}{\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})} \overset{(k)}{u}(x,y) =$$

$$= \left(\frac{1 - \exp(2 \overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))}{\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\right)^2} + \frac{2\exp(2 \overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))}{\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})} \right) \times$$

$$\times \overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha},\ y_{j-1+\alpha}) \overset{(0)}{u}(x,y) + \overset{(k)}{F}(x,y), \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \quad y \in (y_{j-1}, y_j),$$

$$\overset{(k)}{u}(x_{i-1}+0, y) = \overset{(k)}{u}(x_{i-1}-0, y), \overset{(k)}{u}(x, y_{j-1}+0) = \overset{(k)}{u}(x, y_{j-1}-0),$$

$$i \in \overline{1, N_1}, \quad j \in \overline{1, N_2},$$

$$\overset{(k)}{u}(x,0) = 0, \quad \overset{(k)}{u}(0,y) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де функція $\overset{(k)}{F}(x,y)$ визначається згідно з (13), а значенням $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ відповідають явна та неявна схеми FD-методу відповідно.

Для оцінки похибки методу використовуватимемо наступні функції:

$$\delta_{ex}(h_1, h_2, h_1', h_2', m) = \left\| \overset{(m)}{u}(x, y, h_1, h_2, h_1', h_2') - u^*(x,y) \right\|_{\overline{D}}, \tag{25}$$

$$\delta_{im}(h_1, h_2, h_1', h_2', m) = \left\| \overset{(m)}{u}(x, y, h_1, h_2, h_1', h_2') - u^*(x,y) \right\|_{\overline{D}}, \tag{26}$$

де h_1, h_2 — кроки сітки FD-методу, h_1', h_2' — кроки сітки квадратурної формули[3], (25) — оцінка похибки явної схеми FD-методу, (26) — оцінка похибки неявної схеми FD-методу.

В табл. 1 наведено результати застосування FD-методу до задачі Гурса (24) в області $D = \{(x,y) | 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$ з кроками сіток FD-методу та квадратурної формули $h_1 = h_2 = 0,1$ та $h_1' = h_2' = 0,01$ відповідно. Результати, наведені в табл. 2, стосуються задачі Гурса (24) на прямокутнику $D = \{(x,y) | 0 < x < 6, 0 < y < 6\}$ з $h_1 = h_2 = 0,1$ та $h_1' = h_2' = 0,01$. В табл. 3 наведені результати відповідають задачі Гурса (24) в області $D = \{(x,y) | 0 < x < 8, 0 < y < 8\}$ з тими ж значеннями кроків h_1, h_2, h_1', h_2'.

[3] У даному прикладі для наближеного обчислення інтегралів використовувалась формула Сімпсона.

Таблиця 1. Похибка FD-методу як функція від рангу (m) і кроків сіток (h_1, h_2, h'_1, h'_2) (при $X = Y = 2$)

m	$\delta_{ex}(0.1,\ 0.1;\ 0.01,\ 0.01, m)$	$\delta_{im}(0.1,\ 0.1;\ 0.01,\ 0.01, m)$
$m = 0$	0,000446192099739173	0,000367283284495978
$m = 1$	0,000167706954512625	0,000233426857747632
$m = 2$	4,48894722493431e-6	8,51788157041344e-6
$m = 3$	8,36689053596018e-8	2,57477632104042e-7
$m = 4$	1,14462328504317e-9	6,9642438482731e-9
$m = 5$	7,21311899098964e-12	1,69383174153381e-10
$m = 6$	1,73194791841524e-13	3,71214170513667e-12
$m = 7$	7,66053886991358e-15	8,43769498715119e-14

Таблиця 2. Похибка FD-методу як функція від рангу (m) і кроків сіток (h_1, h_2, h'_1, h'_2) (при $X = Y = 6$)

m	$\delta_{ex}(0.1,\ 0.1;\ 0.01,\ 0.01, m)$	$\delta_{im}(0.1,\ 0.1;\ 0.01,\ 0.01, m)$
$m = 0$	0,00990099704793557	0,0166759460699123
$m = 1$	0,0427223772725684	0,0364800008223901
$m = 2$	0,00768326756163651	0,00556788648104944
$m = 3$	0,00154917762333551	0,00108472082240441
$m = 4$	0,000298257776059851	0,000175408476288719
$m = 5$	6,10327818401091e-5	3,38212358182988e-5
$m = 6$	1,23116236430132e-5	6,03698889534154e-6
$m = 7$	2,47648720252958e-6	1,17306679114915e-7

Таблиця 3. Похибка FD-методу як функція від рангу (m) і кроків сіток (h_1, h_2, h'_1, h'_2) (при $X = Y = 8$)

m	$\delta_{ex}(0.1, 0.1; 0.01, 0.01, m)$	$\delta_{im}(0.1, 0.1; 0.01, 0.01, m)$
$m = 0$	0,0923974325023775	0,125326818244121
$m = 1$	0,411139985428395	0,27863153682922
$m = 2$	0,207256544743765	0,0181579710170172
$m = 3$	0,155366246421829	0,044569551541476
$m = 4$	0,111449896596149	0,00673670254222669
$m = 5$	0,0868443598360921	0,0104639209451075
$m = 6$	0,0681606731257846	0,00354428978981047
$m = 7$	0,0545617406466004	0,00317997251866142

Значення похибок $\delta_{ex}(h_1, h_2, h_1', h_2', m)$ та $\delta_{im}(h_1, h_2, h_1', h_2', m)$, наведених у табл. 1 – 3, показують, що неявна схема FD-методу при збільшенні розмірів області, в якій шукається розв'язок розглядуваної задачі Гурса, та при збереженні кроків сітки методу збігається краще, ніж явна схема FD-методу. Разом з тим результати, наведені в табл. 1, свідчать про те, що явна схема FD-методу збігається швидше за неявну схему у випадку малих областей D.

5. Висновки. В даній роботі описано та досліджено алгоритми FD-методу розв'язування задачі Ґурса для нелінійного рівняння Кляйна – Ґордона (1). Встановлено, що безпосереднє використання формул (16), (17) є значно менш ефективним (з точки зору обчислювальної складності), ніж використання методу послідовних наближень (23).

Крім того, на основі наведених у роботі результатів чисельного експерименту можна зробити висновок, що з точки зору чисельної стійкості неявна схема FD-методу має перевагу над явною. Цей факт обґрунтовує перспективність подальшого дослідження та обґрунтування неявної схеми FD-методу для розв'язування задачі Ґурса (2), (3).

1. *Makarov V. L., Dragunov D. V., Sember D. A.* FD-method for solving the nonlinear Klein – Gordon equation // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, № 10. — С. 1394 – 1415.
2. *Barone A., Esposito F., Magee C., Scott A.* Theory and applications of the sine-Gordon equation // Riv. Nuovo cim. — 1971. — **1**. — P. 227 – 267.
3. *Bitsadze A. V.* Equations of mathematical physics. — Moscow: Mir, 1980.
4. *Frenkel J., Kontorova T.* On the theory of plastic deformation and twinning // Acad. Sci. USSR. J. Phys. — 1939. — **1**. — P. 137 – 149,
5. *Gavrilyuk I. P., Lazurchak I. I., Makarov V. L., Sytnyk D.* A method with a controlleble exponential convergence rate for nonlinear differential operator equations // Comput. Meth. Appl. Math. — 2009. — **9**, № 1. — P. 63 – 78.
6. *Василик В. Б., Драгунов Д. В., Ситник Д. О.* Функціонально-дискретний метод розв'язування операторних рівнянь та його застосування. — Київ: Наук. думка, 2011. — 176 с.
7. *Gibbon J. D., Caudrey P. J., Bullough R. K., Eilbeck J. C.* N-soliton solutions on some non-linear dispersive wave equations of physical significance // Lect. Notes Math. Ordinary and Partial Different. Equat. (Proc. Conf., Univ. Dundee, Dundee, 1974). — 1974. — **415**. — P. 357 – 362.
8. *Abbaoui K., Cherruault Y., Seng V.* Pratical formulae for calculus of multivariable Adomian polynomials // Math. Comput. Modelling. — 1995. — **22**, № 1. — P. 89 – 93.
9. *Gernard Cristensson.* Second ordre differentional equations. — New York: Springer, 2010.
10. *Kungurtsev A. A.* A hyperbolic equation in three-dimensional space // Izv. Vyssh. Uchebn. Zav. Mat. — 2006. — **3**. — P. 76 – 80.
11. *Makarov V. L., Dragunov D. V.* A superexponentially convergent functional-dicrete method for solving the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations // arXiv:1101.0096v1, 2010.
12. *Makarov V. L., Dragunov D. V.* A numerical-analytic method for solving the Cauchy problem for ordinary differential equations // Comput. Meth. Appl. Math. — 2011. — **11**, № 4. — P. 491 – 509.
13. *Makarov V. L.* About functional-discrete method of arbitrary accuracy order for solving sturm-liuville problem with piecewise smooth coeficients // Dokl. Akad. Nauk. SSSR. — 1991. — **320**, № 1. — P. 34 – 39.
14. *Makarov V. L., Rossokhata N. O.* A rewiev of functional-discrete technique for eigenvalue problems // J. Numer. Appl. Math. — 2009. — **97**. — P. 97 – 102.
15. *Mohammadi S.* Solvihg pionic atom with klein-Gordon equation // Res. J. Phys. — 2010. — **4**. — P. 160 – 164.
16. *Perring J. K., Skyrme T. H. R.* A model unified field equation // Nucl. Phys. — 1962. — **31**. — P. 550 – 555.
17. *Popov A. G., Maevskii E. V.* Analitical approaches to the investigation of the sine-Gordon equation and pseudospherical surfaces // Sovrem. Mat. Pril. Geom. — 2005. —**31**. — P. 13 – 52.
18. *Skyrme T. H. R.* Particle states of a quantized meson field // Proc. Roy. Soc. Ser. A. — 1961. — **262**. — P. 237 – 245.

19. *Seng V., Abbaoui K., Cherruault Y.* Adomian's polinomials for nonlinear operators // Math. Comput. Modelling. — 1996. — **24**, № 1. — P. 59 – 65.

20. *Yagdjian K., Galstian A.* The Klein – Gordon equation in anti-de Sitter spacetime // Rend. Semin. mat. Univ. e politecn. Torino. — 2009. — **67**, № 2. — P. 271 – 292.

21. *Yagdjian K., Galstian A.* Fundamental solutions for the Klein – Gordon equation in de Sitter spacetime // Communs Math. Phys. — 2009. — **285**, № 1. — P. 293 – 344.

Одержано 14.12.12