УДК 517.928.7, 517.911.5

УСРЕДНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

А. В. Плотников

Одес. гос. акад. стр-ва и архитектуры
Украина, 65029, Одесса, ул. Дидрихсона, 4
e-mail: a-plotnikov@ukr.net

We consider a possibility to apply an averaging scheme to control problems with terminal quality criterion in the case where the behavior of the system is described by a controlled fuzzy differential inclusion containing a small parameter.

Розглянуто можливість застосування схеми усереднення для задач керування з термінальним критерієм якості, коли поведінка системи описується керованим нечітким диференціальним включенням, що містить малий параметр.

Исследование реальных управляемых процессов приводит обычно к дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнениям с малым параметром. Для их исследования широко используются различные асимптотические методы. Начиная с работы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1] широкое распространение в нелинейной механике и особенно в теории колебаний получил метод усреднения. Большую роль в разработке и обосновании возможности применения метода усреднения для все более широкого класса систем сыграли работы Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, Н. Н. Моисеева, В. М. Волосова, Е. А. Гребеникова, В. А. Плотникова и др. (см. [2 – 12]).

Данная работа продолжает исследования, начатые в [13 – 15]. В ней рассмотрена возможность применения схемы усреднения [16 – 18] для задач с нечетким критерием качества, когда поведение объекта описывается нечетким управляемым дифференциальным включением [19 – 23].

Пусть $\operatorname{conv}(R^n)$ — пространство непустых выпуклых компактных подмножеств R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(F,G) = \max\left\{\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}\|f-g\|, \sup_{g\in G}\inf_{f\in F}\|f-g\|\right\},$$

где под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма в пространстве R^n.

Введем в рассмотрение пространство E^n отображений $x : R^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) x полунепрерывно сверху, т. е. для любых $y' \in R^n$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y',\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\|y-y'\| < \delta$ выполняется условие $x(y) < x(y') + \varepsilon$;

2) x нормально, т. е. существует $y_0 \in R^n$ такой, что $x(y_0) = 1$;

3) x нечетко выпукло, т. е. для любых $y', y'' \in R^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство $x(\lambda y' + (1-\lambda)y'') \geq \min\{x(y'), x(y'')\}$;

4) замыкание множества $\{y \in R^n : x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве E^n является отображение $\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in R^n \backslash 0. \end{cases}$

Определение 1. *α-Срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in E^n$ при $0 < \alpha \le 1$ назовем множество $\{y \in R^n : x(y) \ge \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in E^n$ назовем замыкание множества $\{y \in R^n : x(y) > 0\}$.*

Теорема 1 [24]. *Если $x \in E^n$, то:*

1) $[x]^\alpha \in \operatorname{conv}(R^n)$ для всех $0 \le \alpha \le 1$;

2) $[x]^{\alpha_2} \subset [x]^{\alpha_1}$ для всех $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$;

3) если $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ — неубывающая последовательность, сходящаяся к $\alpha > 0$, то $[x]^\alpha = \bigcap\limits_{k \ge 1} [x]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если $\{A^\alpha : 0 \le \alpha \le 1\}$ — семейство подмножеств R^n, удовлетворяющих условиям 1–3, то существует отображение $x \in E^n$ такое, что $[x]^\alpha = A^\alpha$ для $0 < \alpha \le 1$ и $[x]^0 = \overline{\bigcup\limits_{0<\alpha\le 1} A^\alpha}$.

Определим в пространстве E^n метрику $D : E^n \times E^n \to [0, +\infty)$, положив

$$D(x,z) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} h([x]^\alpha, [z]^\alpha).$$

Из [25] следует, что:

1) (E^n, D) является полулинейным полным метрическим пространством;

2) $D(u+w, v+w) = D(u,v)$, $D(ku, kv) = kD(u,v)$ для всех $u, v, w \in E^n$ и $k \ge 0$.

Пусть движение объекта управления описывается нечеткой системой дифференциальных включений вида

$$\dot{x} \in \varepsilon[f(t,x) + g(t,u)], \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $t \in I = [0, L\varepsilon^{-1}]$, $L > 0$ — время; $x \in R^n$ — фазовый вектор; $u(t) \in U \in \operatorname{conv}(R^k)$ — вектор управления; $f : I \times R^n \to E^n$, $g : I \times R^k \to E^n$ — нечеткие отображения.

Определение 2. *Суммируемую на отрезке I функцию $u(\cdot)$ такую, что $u(t) \in U$ для всех $t \in I$, будем называть допустимым управлением.*

Множество всех допустимых управлений обозначим через $\Theta(I)$.

Рассмотрим задачу оптимального управления с нечетким критерием качества (нечеткую задачу Майера)

$$J(u) = \Phi(X(T,u)), \tag{2}$$

где $\Phi : E^n \to E^1$, $T \le L\varepsilon^{-1}$, $X(\cdot, u)$ — нечеткое R-решение нечеткого дифференциального включения (1) [26], соответствующее допустимому управлению $u(\cdot) \in \Theta(I)$. Например, $\Phi(X)$ такая, что $[\Phi(X)]^\alpha = [\varphi^\alpha_{\min}, \varphi^\alpha_{\max}]$ для всех $\alpha \in [0,1]$, где $\varphi^\alpha_{\min} = \min_{\varsigma \in [\Phi]^\alpha} (\varsigma, \psi)$, $\varphi^\alpha_{\max} = \max_{\varsigma \in [\Phi]^\alpha} (\varsigma, \psi)$, $\psi \in R^n$ — постоянная, $(\varsigma, \psi) = \varsigma_1\psi_1 + \ldots + \varsigma_n\psi_n$.

Определение 3. *Управление $u_* \in \Theta(I)$ назовем 0-максиминным (0-максимаксным) для задачи (1), (4), если для любого управления $u \in \Theta(I)$ выполняется неравенство*

$$m[J(u)]^0 \leq m[J(u_*)]^0 \quad (M[J(u)]^0 \leq M[J(u^*)]^0), \tag{3}$$

где $mA = \min\{a : a \in A, A \in \operatorname{conv}(R)\}$, $MA = \max\{a : a \in A, A \in \operatorname{conv}(R)\}$.

Системе (1) поставим в соответствие усредненную систему

$$\frac{d\overline{x}}{dt} \in \varepsilon[\overline{f}(\overline{x}) + w], \quad \overline{x}(0) = x_0, \tag{4}$$

где

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t,x)\,dt, \quad w \in W = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(t,U)\,dt. \tag{5}$$

Таким образом, неавтономной нечеткой системе уравнений движения объекта управления (1) приведенная выше схема усреднения ставит в соответствие автономную нечеткую систему уравнений движения (4) с некоторым новым нечетким управлением w.

Задаче (1), (2) поставим в соответствие усредненную задачу

$$\overline{J}(w) = \Phi(\overline{X}(T,w)) \tag{6}$$

на нечетких R-решениях системы (4).

Теорема 2. *Предположим, что правая часть системы (1) в области*

$$Q\{t \in I, x \in G(x_0) \subset R^n, u(t) \in U\}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) нечеткое отображение $f(\cdot,\cdot)$ 2π-периодично и измеримо по t при фиксированном x, равномерно ограничено и удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ по x при фиксированном t;

2) нечеткое отображение $g(\cdot,\cdot)$ 2π-периодично и измеримо по t при фиксированном u, равномерно ограничено и удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ по u при фиксированном t.

Также пусть отображение $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица по X с постоянной μ.

Тогда для любого $L > 0$ можно указать такие $C(L) > 0$ и $\varepsilon_0(L,T) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ будут выполняться неравенства

$$m[J(u_*)]^0 - m[J(u^1)]^0 \leq C\varepsilon, \quad |m[J(u_*)]^0 - m[\overline{J}(w_*)]^0| \leq C\varepsilon,$$

где $u_*(\cdot)$ — 0-максиминное управление для задачи (1), (2); $w_*(\cdot)$ — 0-максиминное управление для задачи (4), (6);

$$u^1(t) = \left\{ u_i(t) : \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} g(t, u_i(t))\,dt = \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} w_*(t)\,dt, \;\; t \in [2\pi i, 2\pi(i+1)), \;\; i = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Доказательство. Обозначим через $w^1(\cdot)$ нечеткое управление

$$w^1(t) = \left\{ w_i : w_i = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} g(t, u_*(t))\, dt, \quad t \in [2\pi i, 2\pi(i+1)), \;\; i = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Пусть $X(\cdot, u_*), \overline{X}(\cdot, w_*), X(\cdot, u^1), \overline{X}(\cdot, w^1)$ являются нечеткими R-решениями соответствующих нечетких дифференциальных включений

$$\dot{x} \in \varepsilon[f(t, x) + g(t, u_*(t))], \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{x} \in \varepsilon[\overline{f}(x) + w_*(t)], \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{x} \in \varepsilon[f(t, x) + g(t, u^1(t))], \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{x} \in \varepsilon[\overline{f}(x) + w^1(t)], \quad x(0) = x_0.$$

Тогда по теореме об усреднении нечетких дифференциальных включений [16, 17] для $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы оценки

$$D(X(t, u_*), \overline{X}(t, w^1)) \le C_1\varepsilon, \quad D(X(t, u^1), \overline{X}(t, w_*)) \le C_1\varepsilon,$$

из которых в силу липшицевости отображения $\Phi(\cdot)$ следует, что

$$D(J(u_*), \overline{J}(w^1)) \le \mu C_1\varepsilon, \quad D(J(u^1), \overline{J}(w_*)) \le \mu C_1\varepsilon. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$m[J(u_*)]^0 \ge m[J(u^1)]^0, \quad m[\overline{J}(w_*)]^0 \ge m[\overline{J}(w^1)]^0. \tag{8}$$

Для $J(u_*)$ и $\overline{J}(w_*)$ справедливо одно из следующих неравенств:

$$m[J(u_*)]^0 > m[\overline{J}(w_*)]^0, \tag{9}$$

$$m[J(u_*)]^0 \le m[\overline{J}(w_*)]^0. \tag{10}$$

В первом случае из (7) – (9) следует

$$m[\overline{J}(w^1)]^0 + \mu C_1\varepsilon \ge m[J(u_*)]^0 > m[\overline{J}(w_*)]^0 \ge m[\overline{J}(w^1)]^0,$$

т. е.

$$|m[J(u_*)]^0 - m[\overline{J}(w_*)]^0| \le \mu C_1\varepsilon. \tag{11}$$

Во втором случае из (7), (8), (10) имеем

$$m[J(u^1)]^0 + \mu C_1\varepsilon \ge m[\overline{J}(w_*)]^0 \ge m[J(u_*)]^0 \ge m[J(u^1)]^0,$$

т. е. справедливо неравенство (11). Полагая $C = \mu C_1$, из (11) получаем второе неравенство из утверждения теоремы. Аналогично можно доказать и первое неравенство.

Теорема доказана.

Замечание 1. Теорему, аналогичную предыдущей, можно доказать и для 0-максимаксных управлений.

Замечание 2. Если 0-максиминные управления являются также и 0-максимаксными и наоборот, то утверждение теоремы 2 можно записать в виде

$$h([J(u^1)]^0, [J(u_*)]^0) \leq C\varepsilon, \quad h([J(u_*)]^0, [\overline{J}(w_*)]^0) \leq C\varepsilon.$$

Замечание 3. Если 0-максиминные (0-максимаксные) управления заменить на 1-максиминные (1-максимаксные), т. е. условия (3) заменить на

$$m[J(u)]^1 \leq m[J(u_*)]^1, \quad (M[J(u)]^1 \leq M[J(u^*)]^1),$$

то теорема 2 и замечания 1, 2 останутся справедливыми.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937. — 363 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.
3. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебаний. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. — 508 с.
4. *Гребеников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. — М.: Наука, 1986. — 256 с.
5. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1971. — 440 с.
6. *Митропольский Ю. А., Хома Г. Н.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. — Киев: Наук. думка, 1983. — 216 с.
7. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
8. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.
9. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. — Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.
10. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: АстроПринт, 1999. — 354 с.
11. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.
12. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. — Київ: Наук. думка, 2004. — 475 с.
13. *Плотников А. В.* Усреднение уравнений управляемого движения с многозначными траекториями // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 5. — С. 657–659.
14. *Плотников А. В.* Асимптотическое исследование уравнений управляемого движения с многозначными траекториями // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 10. — С. 1409–1412.
15. *Плотников А. В.* Усреднение уравнений управляемого движения с многозначным критерием качества // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 4. — С. 505–510.
16. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Plotnikova L. I.* The partial averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side // J. Adv. Res. Dynam. and Contr. Syst. — 2010. — **2**, № 2. — P. 26–34.

17. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Plotnikova L. I.* On the averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average of the right-hand side is absent // Iran. J. Optim. — 2010. — **2**, № 3. — P. 506 – 517.

18. *Plotnikov A. V.* Averaging of fuzzy integrodifferential inclusions // Int. J. Contr. Sci. and Eng. — 2011. — **1**, № 1. — P. 8 – 14.

19. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* Linear problems of optimal control of fuzzy maps // Intelligent Information Management (Sci. Res. Publ., Inc., USA). — 2009. — **1**, № 3. — P. 139 – 144.

20. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Molchanyuk I. V.* Linear control problems of the fuzzy maps // J. Software Eng. & Appl. (Sci. Res. Publ., Inc., USA). — 2010. — **3**, № 3. — P. 191 – 197.

21. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Molchanyuk I. V.* Linear control differential inclusions with fuzzy right-hand side and some optimal problems // J. Adv. Res. Dynam. and Contr. Syst. (Inst. Adv. Sci. Res., USA). — 2011. — **3**, № 2. — P. 34 – 46.

22. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Molchanyuk I. V.* The time-optimal problems for controlled fuzzy R-solutions // Intelligent Control and Automation (Sci. Res. Publ., Inc., USA). — 2011. — **2**, № 2. — P. 152 – 159.

23. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* The averaging of control linear fuzzy 2π-periodic differential equations // Dynam. Contin., Discrete and Impulsive Syst., Ser. B. Applications & Algorithms. — 2011. — **18**, № 6. — P. 833 – 847.

24. *Negoita C. V., Ralescu D. A.* Application of fuzzy sets to systems analysis. — New York: Wiley, 1975.

25. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Fuzzy random variables // J. Math. Anal. and Appl. — 1986. — **114.** — P. 409 – 422.

26. *Hüllermeier E.* An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system // Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl.-Based Syst. — 1997. — **7**. — P. 117 – 137.

Получено 02.10.12