УДК 517.9

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

А. А. Покутный

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3
e-mail: lenasas@gmail.com

We prove that a periodic boundary-value problem for the Hill equation is solvable in both the classical and generalized senses. Periodic solutions are expressed in terms of generalized Green's operator.

Встановлено розв'язність періодичної крайової задачі для рівняння Хілла як у класичному, так і в узагальненому сенсі. Періодичні розв'язки подано з допомогою узагальненого оператора Гріна.

Линейный случай. Постановка задачи. Рассмотрим в вещественном гильбертовом пространстве H уравнение Хилла [1]

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = 0 \tag{1}$$

с периодическим условием

$$y(0) = y(w), \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(w). \tag{2}$$

В уравнении (1) T — строго положительный самосопряженный оператор. Пусть $T^{\frac{1}{2}} \geq \lambda I$ — положительный квадратный корень из оператора T. Поскольку оператор T замкнут, область определения $D(T^{\frac{1}{2}})$ оператора $T^{\frac{1}{2}}$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(T^{\frac{1}{2}}u, T^{\frac{1}{2}}u)$ [2, 3]. Выполнив замену переменных по аналогии с заменой типа Ван дер Поля (при $r = 0$), получим неоднородную операторную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= T^{\frac{1}{2}}x_2(t) + r\cos tT^{\frac{1}{2}}z, \\ \dot{x}_2(t) &= -T^{\frac{1}{2}}x_1(t) + r\sin tT^{\frac{1}{2}}z \end{aligned} \tag{3}$$

с краевым условием

$$x_1(0) = x_1(w), \quad x_2(0) = x_2(w) + rT^{-\frac{1}{2}}\cos wT^{\frac{1}{2}}z - rT^{-\frac{1}{2}}z. \tag{4}$$

Здесь $\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$, z — произвольный элемент H.

Эволюционным семейством операторов для уравнения (3) при $r = 0$ будет сильно непрерывная унитарная группа [3, 4]

$$U(t) := U(t,0) = \begin{pmatrix} \cos tT^{\frac{1}{2}} & \sin tT^{\frac{1}{2}} \\ -\sin tT^{\frac{1}{2}} & \cos tT^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Как известно [4, 5], она не является сжимающей. Отметим некоторые свойства этой группы:

$$U^n(t) = \begin{pmatrix} \cos ntT^{\frac{1}{2}} & \sin ntT^{\frac{1}{2}} \\ -\sin ntT^{\frac{1}{2}} & \cos ntT^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = U(nt), \quad \|U^n(t)\| = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введя в рассмотрение новое гильбертово пространство $H_{T^{\frac{1}{2}}} = D(T^{\frac{1}{2}}) \oplus D(T^{\frac{1}{2}})$ с внутренним произведением $(\langle u, v\rangle, \langle u, v\rangle)_{H_{T^{\frac{1}{2}}}} = (T^{\frac{1}{2}}u, T^{\frac{1}{2}}u) + (T^{\frac{1}{2}}v, T^{\frac{1}{2}}v)$ и вектор $\varphi = (x_1, x_2)^T$, задачу (3), (4) на спаренном пространстве $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ запишем в виде

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + f(t), \tag{5}$$

$$\varphi(0) = \varphi(w) + \alpha, \tag{6}$$

где оператор A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & T^{\frac{1}{2}} \\ -T^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

вектор-функция $f(t) = (r\cos tT^{\frac{1}{2}}z, r\sin tT^{\frac{1}{2}}z)^T$, $\alpha = (0, rT^{-\frac{1}{2}}(\cos\ wT^{\frac{1}{2}}z - z))^T$.

Основной результат. Исследуем теперь вопрос о разрешимости краевой задачи (5), (6). Решение задачи (5) будет иметь вид

$$\varphi(t) = U(t)c + \int\limits_0^t U(t)U^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau$$

для произвольного элемента $c \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$. Подставляя $f(t)$, окончательно получаем

$$\varphi(t) = U(t)c + \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}\sin tT^{\frac{1}{2}}z \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в условие (6), убеждаемся, что задача (5), (6) будет эквивалентна разрешимости операторного уравнения

$$(I - U(w))c = g, \tag{8}$$

где

$$g = \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}\sin wT^{\frac{1}{2}}z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(\cos wT^{\frac{1}{2}}z - z) \end{pmatrix}.$$

Изучим теперь операторное уравнение (8). Покажем, что уравнение (8) всегда можно сделать разрешимым в некотором смысле.

1. Классические решения. Предположим, что множество значений оператора $I-U(w)$ замкнуто, т. е. $R(I-U(w)) = \overline{R(I-U(w))}$. Операторная система (8) будет разрешима тогда и только тогда, когда [6]

$$U_0(w)g = 0,$$

где

$$U_0(w) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U^k(w)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} U(kw)}{n}$$

— ортопроектор, который проектирует пространство $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ на собственное подпространство $1 \in \sigma(U(w))$. При выполнении этого условия решения уравнения (8) будут иметь вид [6]

$$c = U_0(w)\overline{c} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mu-1)^k \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1}(U(w)-U_0(w))^l \right\}^{k+1} - U_0(w) \right) g.$$

Подставляя выражение для константы c в (7), находим все периодические решения задачи (5), (6) в виде

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + (G[f,\alpha])(t), \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}(G[f,\alpha])(t) = {} & \sum_{k=0}^{\infty} (\mu-1)^k \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1}(U(w)-U_0(w))^l \right\}^{k+1} \times \\ & \times \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}} \sin wT^{\frac{1}{2}} z \\ rT^{-\frac{1}{2}} (\cos wT^{\frac{1}{2}} z - z) \end{pmatrix} - U_0(w) \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}} \sin wT^{\frac{1}{2}} z \\ rT^{-\frac{1}{2}} (\cos wT^{\frac{1}{2}} z - z) \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}} \sin tT^{\frac{1}{2}} z \\ rT^{-\frac{1}{2}} (\cos\ wT^{\frac{1}{2}} z - z) \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{10}$$

— обобщенный оператор Грина задачи (5), (6).

2. Обобщенные решения. Рассмотрим случай, когда $R(I-U(w)) \neq \overline{R(I-U(w))}$. Пусть $g \in \overline{R(I-U(w))}$. И в этом случае условие равносильно $U_0(w)g = 0$ [6, 7].

Поскольку степени оператора монодромии являются равномерно ограниченными [7, с. 299], справедливо разложение

$$H_{T^{\frac{1}{2}}} = N(I-U(w)) \oplus \overline{R(I-U(w))},$$

и, таким образом, ядро $N(I-U(w))$ оператора $I-U(w)$ является дополняемым подпространством в $H_{T^{\frac{1}{2}}}$. Профакторизировав пространство $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ по ядру $N(I-U(w))$, получим оператор

$$(I-U(w))P_{\overline{R(I-U(w))}} : H_{T^{\frac{1}{2}}}/N(I-U(w)) \to R(I-U(w)) \subset \overline{R(I-U(w))},$$

где $P_{\overline{R(I-U(w))}}$ — проектор на подпространство $\overline{R(I-U(w))} \subset H_{T^{\frac{1}{2}}}$. Таким образом, полученный оператор будет инъективным. Далее используем процесс пополнения по норме $\|(I-U(w))P_{\overline{R(I-U(w))}}x\|_{R(I-U(w))}$ [9, 10, с. 504, 505]. Тогда полученный расширенный оператор $\widetilde{I-U(w)} : H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))} \to \overline{R(I-U(w))}$ будет осуществлять гомеоморфизм между пространствами $H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))}$ и $\overline{R(I-U(w))}$. В силу конструкции обобщенного решения [9] уравнение

$$\left(\widetilde{I-U(w)}\right) x = g$$

будет иметь единственное сильное обобщенное решение, которое обозначим через $\widetilde{c} \in \widetilde{H_{T^{\frac{1}{2}}}/N(I-U(w))}$, и пространство $H_{T^{\frac{1}{2}}}/N(I-U(w))$ будет плотно вложенным в $\widetilde{H_{T^{\frac{1}{2}}}/N(I-U(w))}$. В силу плотности вложения существует последовательность $\widetilde{c}_n \in H_{T^{\frac{1}{2}}}/N(I-U(w))$ классов эквивалентности, которая будет сходиться к $\widetilde{c}$ по норме $\widetilde{H_{T^{\frac{1}{2}}}/N(I-U(w))}$. Выбирая по представителю из каждого класса $c_n \in \widetilde{c}_n$, убеждаемся, что она сходится к обобщенному решению $\widetilde{c}$. Такая последовательность называется сильным почти решением (подробнее см. [9, с. 26, 29]). Все сильные почти решения операторного уравнения (8) будут иметь вид $\{c_n + P_{N(I-U(w))}\overline{c}, n \in \mathbb{N}\}$ для любого $\overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}$ или, что то же самое, $\{c_n + U_0(w)\overline{c}, n \in \mathbb{N}\}$. Тогда сильные периодические почти решения задачи (5), (6) можно представить в виде последовательности

$$\{\varphi_n(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + U(t)c_n, n \in \mathbb{N}\}, \tag{11}$$

которая сходится к $U(t)\widetilde{c}$ в $H_{T^{\frac{1}{2}}}/\widetilde{N(I-U(w))}$. Отметим, что если $g \in R(I-U(w))$, то сильные обобщенные решения будут классическими.

3. Псевдорешения. Рассмотрим теперь случай, когда элемент $g \notin \overline{R(I-U(w))}$ или, что то же самое, $U_0(w)g \neq 0$. В этом случае ни классических, ни сильных обобщенных решений нет, но существуют элементы из $\widetilde{H}_{T^{\frac{1}{2}}}$, минимизирующие норму невязки $\|(I-U(w))c - g\|_{\widetilde{H}_{T^{\frac{1}{2}}}}$, а именно [8]:

$$c = (I-U(w))^+ g + U_0(w)\overline{c} \quad \forall \overline{c} \in H_{T^{\frac{1}{2}}}.$$

Эти элементы и будем называть псевдорешениями (в случае незамкнутости множества значений нужно заменить соответствующий оператор на расширенный). Отметим, что из этого множества элемент $(I-U(w))^+g$ имеет наименьшую норму. Тогда множество всех периодических псевдорешений снова будет иметь вид (9).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Краевая задача (5), (6) всегда разрешима.*

1. Обобщенные решения краевой задачи (5), (6) существуют тогда и только тогда, когда

$$U_0(w)\begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}\sin wT^{\frac{1}{2}}z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(\cos wT^{\frac{1}{2}}z - z) \end{pmatrix} = 0;$$

если дополнительно вектор $(rT^{-\frac{1}{2}}\sin wT^{\frac{1}{2}}z; rT^{-\frac{1}{2}}(\cos wT^{\frac{1}{2}}z - z))^T \in R(I - U(w))$, *то решения будут классическими.*

При выполнении условия разрешимости решения краевой задачи (5), (6) имеют вид

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + \overline{(G[f,\alpha])}(t),$$

где $\overline{(G[f,\alpha])}(t)$ — *расширение оператора* $(G[f,\alpha])(t)$.

2. Псевдорешения существуют тогда и только тогда, когда

$$U_0(w)\begin{pmatrix} rT^{-\frac{1}{2}}\sin wT^{\frac{1}{2}}z \\ rT^{-\frac{1}{2}}(\cos wT^{\frac{1}{2}}z - z) \end{pmatrix} \neq 0.$$

При выполнении этого условия решения краевой задачи (5), (6) имеют вид

$$\varphi(t) = U(t)U_0(w)\overline{c} + \overline{(G[f,\alpha])}(t).$$

Примеры. Проиллюстрируем изложенное выше на примерах.

1. Рассмотрим краевую задачу для уравнения колебаний маятника:

$$\ddot{x}(t) = -\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 x(t), \tag{12}$$

$$x(0) = x(\omega). \tag{13}$$

Введя замену $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = \dfrac{2\pi}{\omega}x_2(t) + r\cos\dfrac{2\pi}{\omega}t$, запишем эту задачу в виде следующей краевой задачи для системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{2\pi}{\omega}x_2(t) + r\cos\frac{2\pi}{\omega}t, \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{2\pi}{\omega}x_1(t) + r\sin\frac{2\pi}{\omega}t, \end{aligned} \tag{14}$$

$$x_1(0) = x_1(\omega). \tag{15}$$

Фундаментальная матрица решений однородной системы для (14), нормированная в нуле, имеет вид

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{\omega}t & \sin\frac{2\pi}{\omega}t \\ -\sin\frac{2\pi}{\omega}t & \cos\frac{2\pi}{\omega}t \end{pmatrix}.$$

Введем вспомогательные векторы

$$z(t) = (x_1(t), x_2(t))^T, \quad f(t) = \left(r\cos\frac{2\pi}{\omega}t, r\sin\frac{2\pi}{\omega}t\right)^T.$$

Краевая задача (14), (15) является нерегулярной [8] в том смысле, что имеет множество периодических решений (в отличие от регулярного случая). Тогда согласно теории, построенной в [8], множество всех ω-периодических решений задачи (14), (15) будет иметь вид

$$z(t,c) = X(t)c + (G[f])(t)$$

для произвольной вектор-константы $c = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Здесь $(G[\cdot])(t)$ — обобщенный оператор Грина периодической задачи (14), (15), который можно найти, например, следующим образом:

$$(G[f])(t) = X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

В рассматриваемом случае преобразование $X(t)$ является ортогональным и сохраняющим площади [5], поэтому $X^{-1}(t) = X^T(t)$. Простым подсчетом можно убедиться, что $(G[f])(t) = \left(\dfrac{r\omega}{2\pi}\sin\dfrac{2\pi}{\omega}t, 0\right)^T$. Таким образом, множество всех ω-периодических решений краевой задачи (14), (15) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1(t,c,r) \\ x_2(t,c,r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{\omega}t & \sin\dfrac{2\pi}{\omega}t \\ -\sin\dfrac{2\pi}{\omega}t & \cos\dfrac{2\pi}{\omega}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{r\omega}{2\pi}\sin\dfrac{2\pi}{\omega}t \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

для любых $c_1, c_2, r \in \mathbb{R}$.

2. Рассмотрим краевую задачу (14), (15) с дополнительными краевыми условиями (переопределенную)

$$x_2(0) = x_2\left(\frac{\omega}{4}\right) = 0, \tag{17}$$

$$\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} x_1(t)\, dt = \alpha \neq 0. \tag{18}$$

Покажем, что эта задача имеет решение для произвольного числа $\alpha \in \mathbb{R}$. Подставляя вторую компоненту решения (16) в условия (17), получаем

$$x_2(0) = c_2 = 0, \quad x_2\left(\frac{\omega}{4}\right) = -c_1 = 0.$$

После подстановки первой компоненты получим $x_1(t,c,r) = \dfrac{r\omega}{2\pi}\sin\dfrac{2\pi}{\omega}t$. Учитывая условие (18), имеем

$$\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} x_1(t,c,r)\, dt = \frac{r\omega}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} \sin\frac{2\pi}{\omega}t\, dt = \frac{r\omega^2}{2\pi^2} = \alpha.$$

Отсюда находим $r = \dfrac{2\pi^2\alpha}{\omega^2}$. Таким образом, решение краевой задачи (14) – (18) имеет вид

$$(x_1(t), x_2(t))^T = \left(\frac{\pi\alpha}{\omega}\sin\frac{2\pi}{\omega}\,t, 0\right)^T.$$

Замечание 1. Без введения дополнительного параметра r такая задача не имела бы решения.

3. Рассмотрим теперь краевую задачу (14) – (17), на решениях которой необходимо минимизировать критерий качества

$$\int\limits_0^1 x_1(t, c, r)\,dr \to \inf_{t\in\mathbb{R}}. \tag{19}$$

Согласно примеру 1 $c_1 = c_2 = 0$. Тогда интеграл в (19) будет равен

$$\int\limits_0^1 x_1(t, c, r)\,dr = \frac{\omega}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{\omega}\,t\int\limits_0^1 r\,dr = \frac{\omega}{4\pi}\sin\frac{2\pi}{\omega}\,t.$$

Нетрудно увидеть, что задача (19) разрешима и наименьшее значение равно $-\dfrac{\omega}{4\pi}$ (достигается на точках вида $t_k = (3/4 + k)\,\omega$, $k \in \mathbb{Z}$).

Замечание 2. Аналогичным образом в уравнение колебаний маятника можно ввести любое количество дополнительных параметров.

Основная роль параметра r будет показана при изучении слабо нелинейного случая. Отметим, что линейные волновые уравнения могут быть приведены к виду (1) (см., например, [4, с. 321]).

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
3. *Функциональный* анализ. СМБ / Под ред. С. Г. Крейна. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
4. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4 т. — М.: Мир, 1978. — Т.2. Гармонический анализ. Самосопряженность. — 395 с.
5. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 240 с.
6. *Biletskyi B. A., Boichuk A. A., Pokutnyi A. A.* Periodic problems of difference equations and ergodic theory // Abstrs and Appl. Anal. — 2011. — Article ID 928587. — 12 p. /http://www.hindawi.com/journals/aaa/2011/928587
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
8. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.
9. *Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И., Семенов В. В.* Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. — М.: Диалектика, 2009. — 185 с.
10. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. — Киев: Вища шк., 1990. — 600 с.

Получено 21.05.12