УДК 517.929

УМОВИ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОСТІ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З НЕПЕРЕРВНИМ АРГУМЕНТОМ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

We obtain conditions for existence of almost periodic solutions of nonlinear almost periodic difference equations with continuous argument in a Banach space without a use of $\mathcal{H}$-classes of these equations.

Получены условия существования почти периодических решений нелинейных почти периодических разностных уравнений с непрерывным аргументом в банаховом пространстве, не использующие $\mathcal{H}$-классы этих уравнений.

1. Основні позначення та об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, E — довільний банаховий простір із нормою $\|\cdot\|_E$ і C^0 — банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою $\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E$.

Визначимо оператор зсуву $S_h : C^0 \to C^0$, $h \in \mathbb{R}$, за допомогою співвідношення

$$(S_h x)(t) = x(t + h), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Елемент $y \in C^0$ називається *майже періодичним* (за Бохнером) (див., наприклад, [1–4]), якщо замикання множини $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^0 є компактною підмножиною цього простору.

Позначимо через B^0 банаховий простір майже періодичних елементів простору C^0 з нормою $\|x\|_{B^0} = \|x\|_{C^0}$.

Нехай Ω — область простору E, тобто відкрита зв'язна множина простору E, і $\mathcal{K}$ — множина всіх непорожніх зв'язних компактних підмножин $K \subset \Omega$.

Розглянемо неперервне відображення $f : \mathbb{R} \times \Omega \to E$, що задовольняє умови:

1) $f(t, x)$ рівномірно неперервне по x на кожній множині $\mathbb{R} \times K$, де $K \in \mathcal{K}$;

2) $f(t, x)$ майже періодичне по t рівномірно по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$.

Неважко показати, що, як і в [4, с. 428, 429], для кожної множини $K \in \mathcal{K}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}, x\in K} \|f(t, x)\|_E < +\infty$$

і для довільної послідовності $(h_k)_{k\geq 1}$ дійсних чисел існує підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, для якої послідовність $(f(t + h_{k_l}, x))_{l\geq 1}$ збігається рівномірно на множині $\mathbb{R} \times K$.

Вважатимемо, що послідовність $(f(t + h_{k_l}, x))_{l\geq 1}$ збігається рівномірно на кожній множині $\mathbb{R}\times K$, $K \in \mathcal{K}$, і граничне відображення $g : \mathbb{R}\times\Omega \to E$, що визначається співвідношенням

$$g(t, x) = \lim_{l\to\infty} f(t + h_{k_l}, x), \tag{2}$$

© В. Ю. Слюсарчук, 2013

задовольняє умови 1 і 2. Наведена вимога виконується, якщо, наприклад, простір E скінченновимірний, що показано в [4, с. 429]. Зазначимо, що у статті ця вимога відіграватиме допоміжну роль і не буде використовуватися при отриманні основного результату.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

$\mathcal{H}$-класом цього рівняння називається множина всіх різницевих рівнянь

$$y(t+1) = g(t, y(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

права частина яких визначається за допомогою (2).

Метою статті є встановлення умов майже періодичності обмежених неперервних розв'язків рівняння (3) без використання елементів $\mathcal{H}$-класу цього рівняння. При дослідженні рівняння (3) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині обмежених розв'язків цього рівняння (множини значень цих розв'язків — підмножини компактних множин $K \in \mathcal{K}$). Цьому функціоналу приділимо увагу в наступному пункті.

2. Функціонал $\boldsymbol{\Delta}$. Позначимо через $\mathcal{N}(f, K)$ множину всіх обмежених розв'язків $x = x(t)$ рівняння (3), для кожного з яких замикання $\overline{R(x)}$ множини

$$R(x) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

у просторі E є підмножиною множини $K \in \mathcal{K}$ і $\overline{R(x)} \neq K$.

Зафіксуємо довільну множину $K \in \mathcal{K}$ і обмежений розв'язок $x^* \in \mathcal{N}(f, K)$ рівняння (3). Будемо вважати, що

$$\mathcal{N}(f, K) \neq \varnothing.$$

Покладемо

$$r(x^*, K, f) = \sup\left\{\|x - y\|_E : x \in \overline{R(x^*)},\ y \in K\right\}.$$

Завдяки нерівності $\overline{R(x^*)} \neq K$

$$r(x^*, K, f) > 0.$$

Також зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in [0, r(x^*, K, f)]$. Позначимо через $\Omega(x^*, K, f, \varepsilon)$ множину всіх елементів $y \in C^0$, для кожного з яких

$$x^*(t) + y(t) \in K$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$ і

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \big|\|y(t)\|_E - \varepsilon\big| = 0.$$

Розглянемо функціонал

$$\Delta(x^*, K, f, \varepsilon) = \inf_{y\in\Omega(x^*,K,f,\varepsilon)} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x^*(t+1) + y(t+1) - f(t, x^*(t) + y(t))\|_E\,. \tag{4}$$

Застосування функціонала Δ до дослідження майже періодичних нелінійного різницевого рівняння (3), аналогічних лінійних різницевих рівнянь та нелінійного диференціального рівняння наведемо в наступних трьох пунктах.

3. Основний результат. Наведемо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (3), в яких на відміну від відомої теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь (див. [4, 5]) не використовуються $\mathcal{H}$-клас рівняння (3) та відокремлення обмежених розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Теорема 1. *Нехай K належить множині $\mathcal{K}$. Якщо для розв'язку $z \in \mathcal{N}(f, K)$ рівняння (3) і деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(z, K, f, \varepsilon) > 0 \tag{5}$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Доведення. Припустимо, що розв'язок $z \in \mathcal{N}(f, K)$ рівняння (3) не є елементом простору B^0. Тоді завдяки компактності множини K існує послідовність $(z(t + h_p))_{p\geq 1}$, що збігається в точці $t = 0$, причому будь-яка її підпослідовність $(z(t + k_p))_{p\geq 1}$ не збігається рівномірно на $\mathbb{R}$. Отже,

$$\lim_{p,q\to\infty} \|z(h_p) - z(h_q)\|_E = 0 \tag{6}$$

і для деяких послідовностей $(p_r)_{r\geq 1}$, $(q_r)_{r\geq 1}$ і числа $\gamma \in (0, \delta)$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|z(t + k_{p_r}) - z(t + k_{q_r})\|_E > \gamma, \quad r \geq 1. \tag{7}$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що послідовність $(f(t + k_p, x))_{p\geq 1}$ збігається рівномірно на $\mathbb{R} \times K$. Тоді

$$\lim_{p,q\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R},\ x\in K} \|f(t + k_p, x) - f(t + k_q, x)\|_E = 0. \tag{8}$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon_0 \in (0, \gamma]$. На підставі (6) і (7) для функцій

$$y_r(t) = z(t + k_{p_r}) - z(t + k_{q_r}), \quad r \geq 1,$$

виконується співвідношення

$$y_r \in \Omega(S_{k_{q_r}} z, K, f, \varepsilon_0), \quad r \geq 1, \tag{9}$$

де S_h — оператор зсуву, визначений співвідношенням (1).

Покажемо, що

$$\Delta(z, K, f, \varepsilon_0) = 0. \tag{10}$$

Завдяки (4), (9) та тому, що

$$z(t + 1 + k_{p_r}) - f(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r})) \equiv 0, \quad r \geq 1,$$

виконуються співвідношення

$$\Delta(z,K,f,\varepsilon_0) = \inf_{y\in\Omega(z,K,f,\varepsilon_0)} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|z(t+1)+y(t+1)-f(t,z(t)+y(t))\|_E =$$

$$= \inf_{y\in\Omega(S_{k_{q_r}}z,K,f,\varepsilon_0)} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|z(t+1+k_{q_r})+y(t+1)-f(t+k_{q_r},z(t+k_{q_r})+y(t))\|_E \le$$

$$\le \sup_{t\in\mathbb{R}} \|z(t+1+k_{q_r})+y_r(t+1)-f(t+k_{q_r},z(t+k_{q_r})+y_r(t))\|_E =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \|z(t+1+k_{p_r})-f(t+k_{q_r},z(t+k_{p_r}))\|_E \le$$

$$\le \sup_{t\in\mathbb{R}} \|z(t+1+k_{p_r})-f(t+k_{p_r},z(t+k_{p_r}))\|_E +$$

$$+ \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+k_{p_r},z(t+k_{p_r}))-f(t+k_{q_r},z(t+k_{p_r}))\|_E =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+k_{p_r},z(t+k_{p_r}))-f(t+k_{q_r},z(t+k_{p_r}))\|_E,$$

з яких на підставі (8) випливає співвідношення (10), що суперечить (5).

Отже, припущення, що розв'язок $z \in \mathcal{N}(f,K)$ рівняння (3) не є майже періодичним, хибне.

Теорему 1 доведено.

4. Випадок лінійного рівняння (3). Застосуємо теорему 1 до дослідження лінійних майже періодичних різницевих рівнянь.

Розглянемо неперервні відображення $f_i : \mathbb{R}\times E \to E$, $i=\overline{1,2}$, що визначаються рівностями

$$f_1(t,x) = A(t)x + h(t),$$

$$f_2(t,x) = A(t)x,$$

де $A(t)$ — неперервна і майже періодична на $\mathbb{R}$ функція зі значеннями в $L(E,E)$ і $h \in C^0$, а також відповідні лінійні різницеві рівняння

$$x(t+1) = A(t)x(t) + h(t) \tag{11}$$

і

$$x(t+1) = A(t)x(t). \tag{12}$$

Очевидно, що рівняння (11), якщо $h \in B^0$, і (12) — окремі випадки рівняння (3).

Завдяки теоремі 1 справджується наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай K належить множині $\mathcal{K}$ і $h \in B^0$. Якщо лінійне рівняння (11) має обмежений розв'язок $z \in \mathcal{N}(f_1, K)$ і для деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(z, K, f_1, \varepsilon) > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Також справджується наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай K належить множині $\mathcal{K}$. Якщо лінійне рівняння (12) має обмежений розв'язок $z \in \mathcal{N}(f_2, K)$ і для деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(z, K, f_2, \varepsilon) > 0$$

при всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.

5. Застосування теореми 1 до звичайних диференціальних рівнянь. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = h(t, x), \tag{13}$$

де $h : \mathbb{R} \times \Omega \to E$ — неперервне відображення.

Щоб не ускладнювати подальше викладення матеріалу, вважатимемо, що $\Omega = E$.

Також вважатимемо, що для кожних числа $t_0 \in \mathbb{R}$ і вектора $x_0 \in E$ диференціальне рівняння (13) має єдиний розв'язок $x = x(t)$, що задовольняє початкову умову

$$x(t_0) = x_0. \tag{14}$$

Умови виконання цієї вимоги можна знайти, наприклад, в [6, 7].

Розв'язок задачі (13), (14) позначимо через $x = x(t, t_0, x_0)$.

Далі визначимо відображення $U : \mathbb{R} \times E \to E$ за допомогою співвідношення

$$U(t, y) = x(t + 1, t, y), \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times E. \tag{15}$$

Очевидно, що кожний визначений на $\mathbb{R}$ розв'язок $y = y(t)$ диференціального рівняння (13) задовольняє співвідношення

$$y(t + 1) = x(t + 1, t, y(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

тобто на підставі (15) є розв'язком різницевого рівняння

$$x(t + 1) = U(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

яке аналогічне різницевому рівнянню (3). Тому рівняння (16) можна використати для дослідження обмежених розв'язків диференціального рівняння (13).

Завдяки теоремі 1 справджується наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай:*

1) диференціальне рівняння (13) має обмежений розв'язок $z \in C^0$ *зі значеннями в компактній множині* $K \in \mathcal{K}$;

2) відображення $U : \mathbb{R} \times E \to E$ *задовольняє умови 1 і 2 (як і відображення* f *у різницевому рівнянні (3));*

3) для деякого числа $\delta > 0$ *виконується співвідношення*

$$\Delta(z, K, U, \varepsilon) > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$.

Тоді обмежений розв'язок z *рівняння (13) є майже періодичним.*

Зауважимо, що наведені умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (13) є новими. На відміну від згадуваної теореми Амеріо в теоремі 4 не використовуються $\mathcal{H}$-клас рівняння (3) та умова відокремлення обмежених розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння, і банаховий простір E може бути нескінченновимірним.

На завершення зазначимо, що дослідженню розв'язків майже періодичних рівнянь присвячено багато публікацій. Відмітимо лише частину з них. Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь перші теореми про майже періодичні розв'язки були доведені Фаваром у роботі [8], а для нелінійних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [5]. У цих роботах суттєво використовуються $\mathcal{H}$-класи досліджуваних рівнянь, а в [5] — вимога відокремленості обмежених розв'язків рівнянь. Результати Фавара були значно покращені Е. Мухамадієвим [9, 10]. Узагальненням теорем Мухамадієва присвячено роботи [11–13]. Важливі результати в цьому напрямку також належать Б. М. Левітану [3], Амеріо [14] та В. В. Жикову [15].

Умови існування обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь (вимога існування таких розв'язків у теоремі 4 є суттєвою) отримано в [16–19].

1. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen. I Teil. Funktionen einer Variablen // Math. Ann. — 1927. — **96**. — P. 119–147.
2. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen. II Teil. Funktionen mehrerer Variablen // Math. Ann. — 1927. — **96**. — P. 383–409.
3. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953. — 396 с.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
5. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. — 1955. — **39**. — P. 97–119.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 535 с.
7. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. — Київ: Либідь, 2003. — 600 с.
8. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. — 1927. — **51**. — P. 31–81.
9. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269–274.
10. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. — 1981. — **30**, № 3. — С. 443–460.
11. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. — 1981. — **116(158)**, № 4(12). — С. 483–501.

12. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. — 1986. — **130(172)**, № 1(5). — С. 86–104.

13. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 1987. — **42**, № 2. — С. 262–267.

14. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. mat. — 1960. — **30**. — P. 288–301.

15. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. — 1978. — **23**, № 1. — С. 121–126.

16. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 11. — С. 1541–1556.

17. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. — 2010. — **201**, № 8. — С. 103–126.

18. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних диференціальних операторів слабко регулярними операторами // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 12. — С. 1685–1698.

19. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. — 2012. — **203**, № 5. — С. 135–160.

Одержано 19.10.12