УДК 517.929

СЛАБКОНЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. А. Бойчук, І. А. Головацька

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We find a necessary and sufficient condition for existence of a solution of a weakly linear system of integro-differential equations. We give a converging iteration procedure for finding solutions of the system, and establish a connection between necessary and sufficient conditions.

Получены необходимое и достаточное условия существования решения слабонелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений. Предложена сходящаяся итерационная процедура нахождения решений и установлена связь между необходимым и достаточным условиями.

1. Постановка задачі та допоміжні результати. За допомогою теорії псевдообернених за Муром – Пенроузом матриць [1 – 3] досліджено умови розв'язності та запропоновано ітераційні алгоритми побудови розв'язків слабконелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь з малим параметром ε:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]\, ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K(t,s) Z(x(s,\varepsilon), s, \varepsilon)\, ds. \tag{1}$$

Будемо шукати умови існування розв'язку $x = x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b]$, $\dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b]$, $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, системи (1), який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків $x(t,0) = x_0(t,c_r)$ породжуючої системи

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b [A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)]\, ds = f(t). \tag{2}$$

Далі цей розв'язок будемо називати *породжуючим розв'язком* нелінійної системи (1). Тут $A(t), B(t)$ — $(m\times n)$-, $\Phi(t)$ — $(n\times m)$-, $f(t)$ — $(n\times 1)$-, $K(t,s)$ — $(n\times n)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; стовпчики матриці $\Phi(t)$ є лінійно незалежними на $[a,b]$; $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ — нелінійна по першій компоненті n-вимірна вектор-функція така, що

$$Z(\cdot,t,\varepsilon) \in C^1[\|x - x_0\| \le q], \quad Z(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad Z(x(t,\cdot),t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0].$$

Наведемо спочатку відомий критерій розв'язності породжуючої лінійної системи (2) інтегро-диференціальних рівнянь [1].

Теорема 1. *Система (2) є розв'язною у просторі $D_2[a,b]$ абсолютно неперервних вектор-функцій на $[a,b]$, похідна яких належить простору $L_2[a,b]$, тоді і тільки тоді, коли* *неоднорідність* $f(t) \in L_2[a,b]$ *задовольняє умову*

$$P_{D_d^*}\tilde{b} = 0, \quad d = m - \operatorname{rank} D. \tag{3}$$

Тоді система (2) має r*-параметричну сім'ю розв'язків*

$$x(t, c_r) = X_r(t)c_r + F(t) \quad \forall c_r \in \mathbb{R}^r, \qquad r = m + n - \operatorname{rank} D. \tag{4}$$

Тут $X_r(t) = \Psi_0(t)P_{D_r}$ — $(n \times r)$-вимірна фундаментальна матриця однорідної системи (2), $\Psi_0(t) = \Big[\Psi(t), I_n\Big]$, $\Psi(t) = \int_a^t \Phi(s)\,ds$, $\Psi_0(t)$, $\Psi(t)$ — $(n \times (m+n))$-, $(n \times m)$-вимірні матриці; $D = \left[I_m - \int_a^b [A(s)\Psi(s) + B(s)\Phi(s)]\,ds, -\int_a^b A(s)\,ds\right]$ — $(m \times (m+n))$-вимірна відома матриця, D^+ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) до D матриця [3]; $F(t) = \tilde{f} + \Psi_0(t)D^+\tilde{b}$, $\tilde{b} = \int_a^b [A(s)\tilde{f}(s) + B(s)f(s)]ds$, $\tilde{f}(s) = \int_a^s f(\tau)\,d\tau$. I_n, I_m — одиничні матриці відповідних розмірностей; $P_D(P_{D^*})$ — ортопроектор на ядро та коядро матриці $D(D^*)$; P_{D_r} — $((m+n) \times r)$-вимірна матриця, яка складається з повної системи r лінійно незалежних стовпчиків матриці-проектора P_D, $P_{D_d^*}$ — $(d \times m)$-вимірна матриця, яка складається з повної системи d лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{D^*}.

2. Основний результат. Спочатку знайдемо *необхідну умову* існування розв'язку $x(t,\varepsilon)$ системи (1), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із породжуючих розв'язків (4) $x_0(\cdot,c_r) \in D_2[a,b]$, $\dot{x}_0(\cdot,c_r) \in L_2[a,b]$, системи (2). Критерій розв'язності для системи (1) має вигляд

$$P_{D_{d_1}^*}\int\limits_a^b \left[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\,ds\,d\tau + B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)Z(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\,d\tau\right]ds = 0. \tag{5}$$

Використавши умови, накладені на нелінійну вектор-функцію $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$ у рівності (5) та отримаємо умову на вектор констант c_r^0 у породжуючому розв'язку системи (1):

$$F_1(c_r^0) = 0, \tag{6}$$

де

$$F_1(c_r) := P_{D_d^*}\int\limits_a^b \left[A(s)\int\limits_a^s\int\limits_a^b K(\tau,s)Z(x_0(s,c_r),s,0)dsd\tau + B(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)Z(x_0(\tau,c_r),\tau,0)d\tau\right]ds.$$

Отже, якщо рівняння (6) має корінь $c_r = c_r^0 \in R^r$, то вектор c_r^0 визначає той породжуючий розв'язок $x_0(t,c_r^0)$, якому може відповідати розв'язок $x(t,\varepsilon)$ вихідної нелінійної системи (1). Якщо ж рівняння (6) не має розв'язків, то і система (1) не має шуканого розв'язку. Мова йде про дійсні розв'язки рівняння (6). Аналогічно до крайових задач [1, 3, 5, 6] для систем звичайних диференціальних рівнянь рівність (6) будемо називати *рівнянням для породжуючих констант c_r^0 нелінійної системи* (1).

Таким чином, справджується наступне твердження.

Теорема 2 *(необхідна умова). Нехай слабконелінійна система інтегро-диференціальних рівнянь (1) має розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$:*

$$x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b], \quad \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок (4) з константою $c_r = c_r^0 \in \in \mathbb{R}^r$. Тоді вектор констант c_r^0 обов'язково повинен бути дійсним коренем рівняння (6) для породжуючих констант.

Для отримання *достатньої умови* існування розв'язку виконаємо заміну змінних у системі (1):

$$x = x(t,\varepsilon) := x_0(t,c_r^0) + y(t,\varepsilon), \tag{7}$$

де $x_0(t,c_r^0)$ — породжуючий розв'язок (4), $c_r^0 \in \mathbb{R}^r$ — дійсний корінь рівняння (6).

Будемо шукати умови існування розв'язку $y = y(t,\varepsilon)$:

$$y(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a;b], \quad \dot{y}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a;b], \quad y(t,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0], \quad y(t,0) = 0,$$

наступної системи:

$$\dot{y}(t) - \Phi(t)\int_a^b [A(s)y(s) + B(s)\dot{y}(s)]\,ds = \varepsilon\int_a^b K(t,s)Z(x_0(s,c_r^0) + y(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\,ds, \tag{8}$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у нульовий розв'язок.

Використавши неперервну диференційовність вектор-функції $Z(x,t,\varepsilon)$ по x в околі породжуючого розв'язку, виділимо лінійну частину по y і члени нульового порядку по ε вектор-функції $Z(x_0 + y,t,\varepsilon)$:

$$Z(x_0 + y,t,\varepsilon) = Z(x_0(t,c_r^0),t,0) + A_1(t)y + R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{9}$$

де

$$Z(x_0(t,c_r^0),t,0) \in C[a,b], \quad A_1(t) = A_1(t,c_r^0) = \left.\frac{\partial Z(x,t,0)}{\partial x}\right|_{x=x_0(t,c_r^0)} \in C[a,b].$$

Нелінійна вектор-функція $R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ належить до класу $C^1(\|y\| \le q)$, $L_2[a,b]$, $C[0,\varepsilon_0]$. При цьому маємо

$$R(0,t,0) = 0, \quad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial y} = 0.$$

Таким чином, система (8) буде мати розв'язок

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + \bar{y}(t,\varepsilon) \quad \forall c \in \mathbb{R}^r,$$

$$\bar{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon \left(\int_a^t \int_a^b K(\tau,s) Z(x_0+y,s,\varepsilon)\, ds\, d\tau + \right.$$

$$+ \Psi_0(t) D^+ \int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(t,\tau) Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)\, d\tau\, dt + \right.$$

$$\left. \left. + \; B(s) \int_a^b K(s,\tau) Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)\, d\tau \right] ds \right).$$

Критерій розв'язності для системи (8) має вигляд

$$P_{D^*_{d_1}} \left(\int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(t,\tau) Z(x_0+y,\tau,\varepsilon)\, d\tau\, dt + B(s) \int_a^b K(s,\tau) Z(x_0+y,\tau,\varepsilon) d\tau \right] ds \right) = 0. \tag{10}$$

Враховуючи (6) та (9), у лінійну частину (10) замість $y(t,\varepsilon)$ підставимо вираз $X_r(t)c+\bar{y}(t,\varepsilon)$ та отримаємо алгебраїчну систему відносно невідомого вектора констант $c \in R^r$:

$$B_0 c = -P_{D^*_d} \int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(t,\tau)(A_1(\tau)\bar{y}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon))\, d\tau\, dt + \right.$$

$$\left. + \; B(s) \int_a^b K(s,\tau)(A_1(\tau)\bar{y}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)) d\tau \right] ds, \tag{11}$$

де $(d \times r)$-вимірна матриця B_0 має вигляд

$$B_0 := P_{D^*_d} \int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(t,\tau) A_1(\tau) X_r(\tau)\, d\tau\, dt + B(s) \int_a^b K(s,\tau) A_1(\tau) X_r(\tau)\, d\tau \right] ds.$$

Алгебраїчна система (11) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B^*_0} P_{D^*_d} = 0, \tag{12}$$

де $P_{B^*_0}$ — $(d \times d)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^d на нуль-простір $N(B^*_0)$.

Якщо

$$P_{B_0^*} = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rank} B_0 = d, \tag{13}$$

то рівність (12) завжди виконується. Отже, для знаходження розв'язку системи (8) приходимо до операторної системи

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + \bar{y}(t,\varepsilon),$$

$$c = -B_0^+ P_{D_d^*} \int\limits_a^b \left[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b K(t,\tau)(A_1(\tau)\bar{y}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon))\, d\tau\, dt + \right.$$

$$\left. + \; B(s) \int\limits_a^b K(s,\tau)(A_1(\tau)\bar{y}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon))\, d\tau \right] ds, \tag{14}$$

$$\bar{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon \left(\int\limits_a^t \int\limits_a^b K(\tau,s) Z(x_0 + y, s, \varepsilon)\, ds\, d\tau + \right.$$

$$+ \Psi_0(t) D^+ \int\limits_a^b \left[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b K(t,\tau) Z(x_0 + y, \tau, \varepsilon)\, d\tau\, dt + \right.$$

$$\left. \left. + \; B(s) \int\limits_a^b K(s,\tau) Z(x_0 + y, \tau, \varepsilon)\, d\tau \right] ds \right).$$

Ввівши нову змінну $u = \operatorname{col}(y(t,\varepsilon), c(\varepsilon), \bar{y}(t,\varepsilon))$, отримаємо систему

$$u = L^{(1)} u + \bar{F} u, \tag{15}$$

де

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & X_r(t) & I_n \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_1 \varphi := B_0^+ P_{D_d^*} \int\limits_a^b \left[A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b K(t,\tau) A_1(\tau) \varphi(\tau,\varepsilon)\, d\tau\, dt + B(s) \int\limits_a^b K(s,\tau) A_1(\tau) \varphi(\tau,\varepsilon)\, d\tau \right] ds,$$

$$\bar{F} u := \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0^+ P_{D_d^*} \int\limits_a^b [A(s)\tilde{W}(s,\varepsilon) + B(s) W(s,\varepsilon)] ds \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix},$$

$$W(t,\varepsilon) = \int_a^b K(t,\tau)R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau, \quad \tilde{W}(s,\varepsilon) = \int_a^s W(t,\varepsilon)\,dt.$$

Оскільки блочно-діагональний матричний оператор $(I_g - L^{(1)})$ завжди має обернений, то із системи (15) маємо операторне рівняння

$$u = Su, \tag{16}$$

де $S := (I_g - L^{(1)})^{-1}\bar{F}$, $g = 2n + r$. За рахунок вибору ε та як завгодно малого околу породжуючого розв'язку, враховуючи структуру оператора $\bar{F}$, аналогічно [1, 2, 5] можна показати, що оператор S є оператором стиску [11], який діє з простору $C^1([a,b];R^n) \times \times C([0,\varepsilon_0];R)$ в себе з відповідною нормою.

Отже, система (16) буде мати єдиний розв'язок, який можна знайти таким чином:

$$u = \lim_{v\to\infty} u_v, \quad u_v = Su_{v-1}, \quad u_0 = \mathrm{col}\,(y_0, c_0, \bar{y}_0) = 0.$$

З операторної системи (14) для знаходження розв'язку $y(t,\varepsilon)$, $y(t,0) = 0$ системи (8) отримаємо наступну *ітераційну процедуру*:

$$\begin{gathered} y_{i+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_i + \bar{y}_{i+1}(t,\varepsilon), \quad i = 0,1,2,\ldots, \\ y_0(t,\varepsilon) = \bar{y}_0(t,\varepsilon) = 0, \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} c_i = -B_0^+ P_{D_d^*} \int_a^b \Bigg[& A(s) \int_a^s \int_a^b K(t,\tau)(Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0) + A_1(\tau)\bar{y}_i(\tau,\varepsilon) + \\ & + R(y_i(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon))d\tau dt + B(s)\int_a^b K(s,\tau)(Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0) + \\ & + A_1(\tau)\bar{y}_i(\tau,\varepsilon) + R(y_i(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon))d\tau \Bigg] ds, \end{aligned}$$

$$\bar{y}_{i+1}(t,\varepsilon) = \tilde{f}_{i+1}(t,\varepsilon) + \Psi_0(t)D^+ \int_a^b [A(s)\tilde{f}_{i+1}(s,\varepsilon) + B(s)f_{i+1}(s,\varepsilon)]ds.$$

Тут

$$f_{i+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon \int_a^b K(t,s)\left(Z(x_0(s,c_r^0),s,0) + A_1(s)(X_r(s)c_i + \bar{y}_i(s,\varepsilon)) + R(y_i(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\right)ds,$$

$$\tilde{f}_{i+1}(t,\varepsilon) = \int_a^t f_{i+1}(s,\varepsilon)\,ds.$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 3 *(достатня умова). Нехай породжуюча система інтегро-диференціальних рівнянь (2) при умові (3) має r-параметричну ($r = m + n - n_1$) сім'ю лінійно незалежних розв'язків (4). Тоді для кожного дійсного кореня $c_r = c_r^0 \in R^r$ рівняння (6) для породжуючих констант при умові (13) система (1) має хоча б один розв'язок $x(t,\varepsilon)$:*

$$x(\cdot,\varepsilon) \in D_2[a,b], \quad \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у породжуючий розв'язок (4) з константою $c_r = c_r^0 \in$ $\in R^r$.

Цей розв'язок можна визначити за допомогою збіжного ітераційного процесу (17) і формули $x_i(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + y_i(t,\varepsilon)$, $i = 0,1,2,\ldots$.

4. Зв'язок між необхідною та достатньою умовами. Розглянемо випадок, коли B_0 є квадратною матрицею. Якщо $c_r = c_r^0$ — простий корінь рівняння (6), то має місце розклад

$$F_1(c_r) = (c_r - c_r^0)F_2(c_r), \quad \det F_2(c_r^0) \neq 0.$$

Враховуючи, що

$$\left(\frac{\partial Z(x,t,\varepsilon)}{\partial c_r}\right)_{c_r=c_r^0} = \left.\frac{\partial Z(x,t,\varepsilon)}{\partial x}\right|_{x=x_0(t,c_r^0),\ \varepsilon=0} \cdot \left.\frac{\partial x_0(t,c_r)}{\partial c_r}\right|_{c_r=c_r^0} = A_1(t,c_r^0)X_r(t),$$

здиференціюємо рівняння (6) у точці $c_r = c_r^0$ та отримаємо

$$\left.\frac{\partial F_1(c_r)}{\partial c_r}\right|_{c_r=c_r^0} = \frac{\partial}{\partial c_r}\left(P_{D_d^*}\int_a^b\left[A(s)\int_a^s\int_a^b K(t,\tau)Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0)d\tau dt\, +\right.\right.$$

$$\left.\left. +\ B(s)\int_a^b K(s,\tau)Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0)d\tau\right] ds\right) =$$

$$= P_{D_d^*}\int_a^b\left[A(s)\int_a^s\int_a^b K(t,\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau dt\, +\right.$$

$$\left. +\ B(s)\int_a^b K(s,\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau\right] ds = B_0.$$

Отже, якщо $\det B_0 \neq 0$, то корінь $c_r = c_r^0$ рівняння (6) є простим. Аналогічно можна показати, що якщо $\operatorname{rank} B_0 = d$, то $c_r = c_r^0$ є простим коренем рівняння для породжуючих констант.

Теорема 4. *Для того щоб нелінійна система інтегро-диференціальних рівнянь (1) мала розв'язок, який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок (4) з константою* $c_r = c_r^0 \in R^r$, *необхідно, щоб* c_r^0 *був дійсним коренем рівняння для породжуючих констант (6), та достатньо, щоб цей розв'язок був простим коренем даного рівняння.*

1. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Boundary-value problem for linear systems of integro-differential equations with degenerate kernel // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1576 – 1579.
2. *Boichuk A. A., Zhuravlev V. F., Samoilenko A. M.,* Generalized inverse operators and noether boundary-value problems. — Kiev: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 1995 (in Russian).
3. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
5. *Malkin I. G.* Some problems in the theory of nonlinear oscillations. — Moscow: Gostekhizdat, 1956 (in Russian).
6. *Grebenikov E. A., Ryabov Yu. A.* Constructive methods for analysis of nonlinear systems. — Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
7. *Boichuk A., Diblik J., Khusainov D., Ruzickova M.* Boundary-value problems for weakly nonlinear delay differential systems // Abstr. Appl. Anal. — 2011. — Article ID 631412. — 19 p.
8. *Бойчук А. А., Покутний А. А.* Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 1. — С. 3 – 14.
9. *Головацька І. А.* Слабкозбурені системи лінійних інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 2. — С. 151 – 164.
10. *Люстерник Л. Ю., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа: Уч. пос. — М.: Высш. шк., 1982. — 271 с.
11. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1968. — 455 с.

Одержано 15.04.13