УДК 517.9

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ З НЕОБМЕЖЕНИМ ОПЕРАТОРОМ У ЛІНІЙНІЙ ЧАСТИНІ

Є. В. Панасенко

Запоріз. нац. ун-т
Україна, 69600, Запоріжжя, вул. Жуковського, 66
e-mail: innovatory@rambler.ru

О. О. Покутний

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: lenasas@gmail.com

We find a criterion for existence of solutions of boundary-value problems in a Banach or a Hilbert space, where the linear part contains an unbounded operator. We also find a condition for the problem to have a normal and a generalized solutions.

Найден критерий существования решений краевых задач в банаховом и гильбертовом пространствах с неограниченным оператором в линейной части. Установлены условия нормальной и обобщенной разрешимости таких задач.

Крайовим задачам для диференціальних рівнянь як у скінченновимірних, так і нескінченновимірних просторах присвячено величезну кількість робіт. Зробити повний аналіз усіх статей неможливо. Відзначимо лише монографії [1, 2], в яких розвинено теорію диференціальних рівнянь у банаховому і гільбертовому просторах як з обмеженими, так і необмеженими операторами. Але запропоновані підходи застосовувались до так званих коректних задач Коші. Тобто встановлювались умови, за яких те чи інше диференціальне рівняння має єдиний розв'язок при довільних неоднорідностях. Дослідженню некоректних крайових задач з обмеженими операторами у правій частині як у фредгольмовому, так і нетеровому випадках присвячено монографії [3, 4], в яких можна знайти досить детальний аналіз та перелік робіт, що стосуються крайових задач. У даній роботі зроблено спробу побудувати аналогічну теорію з необмеженими операторами у банаховому і гільбертовому просторах.

1. Постановка задачі та попередній результат. Розглянемо у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{1}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $[a;b]$ у банахів простір $\mathbf{B}_1 : f(t) \in C([a;b], \mathbf{B_1}) :=$ $:= \{f(\cdot) : [a;b] \to \mathbf{B_1}, |||\mathbf{f}||| = \sup_{t\in[a;b]} \|\mathbf{f(t)}\|\}$, $C([a;b], \mathbf{B_1})$ — банахів простір неперервних на $[a;b]$ функцій зі значеннями в $\mathbf{B}_1$; оператори $A(t)$ є замкненими з щільною областю визначення $D(A(t)) = D \subset \mathbf{B}_1$, яка не залежить від t.

Разом з операторним рівнянням (1) розглянемо крайову умову

$$\ell x(\cdot) = \alpha, \tag{2}$$

в якій оператор ℓ є лінійним неперервним на $[a;b]$, що діє з простору $C([a;b], \mathbf{B_1})$ у банахів простір $\mathbf{B}_2$: $\ell : C([a;b], \mathbf{B_1}) \to \mathbf{B_2}$; α — елемент простору $\mathbf{B}_2$.

Поряд з неоднорідною крайовою задачею (1), (2) розглянемо задачу Коші [2, с. 237] у трикутнику $T_\triangle : a \le s \le t \le b$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad a \le t \le b, \tag{3}$$

$$x(s,s) = x_0 \in D, \tag{4}$$

яку слід розуміти як задачу про знаходження при кожному фіксованому $s \in [a;b)$ розв'язку $x(t,s)$ рівняння (3) на відрізку $[s;b]$, який задовольняє задану початкову умову (4).

Наведемо означення та деякі факти з теорії необмежених диференціальних операторів.

Означення 1 [2]. *Задача (3), (4) називається рівномірно коректною, якщо:*

1) при кожному $s \in [a;b]$ і довільному $x_0 \in D$ існує єдиний розв'язок $x(t,s)$ рівняння (3) на сегменті $[s;b]$, який задовольняє умову (4);

2) функція $x(t,s)$ та її похідна $x'_t(t,s)$ неперервні за сукупністю змінних у трикутнику $T_\triangle$;

3) розв'язок неперервно залежить від початкових умов у тому сенсі, що із збіжності $x_0 \in D$ до нуля випливає рівномірна по t і s в $T_\triangle$ збіжність до нуля відповідних розв'язків $x_n(t,s)$.

Якщо задача Коші рівномірно коректна, то можна ввести лінійний оператор $U(t,s)$, $a \le s \le t \le b$, який ставить у відповідність кожному елементу $x_0 \in D$ значення в точці t розв'язку задачі (3), (4) на відрізку $[s;b]$:

$$x(t,s) = U(t,s)x_0. \tag{5}$$

Означення 2 [2]. *Сім'я обмежених лінійних операторів $\{U(t,s) | t \ge s; t,s \in J\}$ у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ називається сім'єю еволюційних операторів, якщо виконуються наступні умови:*

1) $U(s,s) = I$, $s \in J$;

2) $U(t,\tau)U(\tau,s) = U(t,s)$, $t \ge \tau \ge s$ в J.

Якщо, додатково, ця сім'я задовольняє умову

3) для будь-якого $x \in \mathbf{B_1}$ відображення $(t,s) \mapsto U(t,s)x$, $t \ge s$, неперервне, то говорять, що $U(t,s)$ — сім'я сильно неперервних еволюційних операторів.

Нехай задача Коші для рівняння (3) є рівномірно коректною. Тоді сім'я лінійних операторів $\{U(t,s), t \ge s; t,s \in J\}$, яка визначена вище, є сильно неперервним оператором. На області D оператор $U(t,s)$ сильно диференційовний по t і по s, причому

$$\frac{\partial U(t,s)}{\partial t} = A(t)U(t,s) \quad \text{і} \quad \frac{\partial U(t,s)}{\partial s} = -U(t,s)A(s). \tag{6}$$

При фіксованому $t \geq s$ оператор $U(t,s)$ буде лінійним обмеженим оператором і, оскільки множина D є щільною в $\mathbf{B}_1$, його можна розширити на весь простір $\mathbf{B}_1$ за неперервністю, що в подальшому й припускається. Розширення сім'ї еволюційних операторів на весь простір будемо позначати таким же чином.

Наведемо відому теорему Крейна, яку будемо використовувати у подальшому.

Теорема 1 [2]. *Якщо задача Коші для однорідного рівняння (3) рівномірно коректна і оператор $A(t)$ сильно неперервний на $D(A)$ при $a \leq t \leq b$, то будь-який розв'язок рівняння (1) можна подати у вигляді*

$$x(t,s) = U(t,s)x(s,s) + \int\limits_s^t U(t,\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Означення 3 [4]. *Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2})$ називається узагальнено-оборотним, якщо існує оператор $X \in \mathcal{L}(\mathbf{B_2}, \mathbf{B_1})$ такий, що $LXL = L$. Оператор X називається узагальнено-оберненим до оператора L й позначається L^-.*

Зауваження 1. В залежності від вигляду оператора ℓ у крайовій умові (2) отримаємо різні крайові задачі, деякі аспекти теорії яких вивчались раніше. Для сильно неперервної функції $A(t)$ у лінійній частині диференціального рівняння (1) зі значеннями у банаховому просторі та нормою $|||A||| = \sup_{t\in[a;b]} \|A(t)\| < \infty$ цю проблему розв'язано в роботі [5], а задача про обмежені розв'язки вивчалась у [6]. У випадку $\mathbf{B}_1 = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{B}_2 = \mathbb{R}^m$ подібні задачі розглядались у роботах [3, 4], а для зліченновимірних нерезонансних крайових задач — у роботі [7]. Для лінійних і слабконелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі з необмеженим оператором $A(t)$ у лінійній частині в роботі [10] отримано необхідні й достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків у припущенні, що однорідне рівняння $\dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$ є експоненціально-дихотомічним на обох півосях $\mathbb{R}_- = (-\infty; 0]$ та $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$.

2. Основний результат. Знайдемо умови існування та структуру розв'язків неоднорідної крайової задачі (1), (2).

Для того щоб функція $x(t,s)$ була розв'язком крайової задачі (1), (2), необхідно, щоб вона задовольняла крайову умову (2). Тому, підставивши вираз (7) у крайову умову (2), отримаємо наступне рівняння відносно елемента $x(s,s) \in \mathbf{B}_1$:

$$Qx(s,s) = \alpha - \ell \int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

де $Q = \ell U(\cdot, s)$ — оператор, отриманий підстановкою в крайову умову (2) відповідного еволюційного оператора $U(t,s)$. Будемо припускати, що оператор $Q : \mathbf{B_1} \to \mathbf{B_2}$ є узагальнено-оборотним [3, с. 39]. Тоді, як показано у [8], він є нормально розв'язним і існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{B_1} \to N(Q)$ та $\mathcal{P}_Y : \mathbf{B_2} \to Y$, які індукують розбиття $\mathbf{B_1}$ і $\mathbf{B_2}$ у прямі топологічні суми замкнених підпросторів:

$$\mathbf{B_1} = N(Q) \oplus X,$$

$$\mathbf{B_2} = Y \oplus R(Q).$$

Внаслідок нормальної розв'язності оператора Q рівняння (8) є розв'язним [9] тоді і тільки тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha - \ell\int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)\,d\tau\right] = 0, \tag{9}$$

де $\mathcal{P}_{N(Q^*)}$ — проектор на ядро оператора Q^*, спряженого до оператора Q. При виконанні умови (9) і тільки при ній операторне рівняння (8) має множину розв'язків вигляду

$$x(s,s) = \mathcal{P}_{N(Q)}c + Q^-\left(\alpha - \ell\int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)\,d\tau\right). \tag{10}$$

Тут c — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$; $Q^- : \mathbf{B_2} \to \mathbf{B_1}$ — узагальнено-обернений оператор до оператора Q [3]. Підставиши $x(s,s)$ у вираз (7), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2) у вигляді

$$x(t,s,c) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c + U(t,s)Q^-\alpha + (G[f])(t,s), \tag{11}$$

де $(G[f])(t,s)$ — узагальнений оператор Гріна задачі (1), (2), який діє на оператор-функцію $f(t) \in C([a;b],\mathbf{B_1})$ таким чином:

$$(G[f])(t,s) := \int\limits_s^t U(t,\tau)f(\tau)\,d\tau - U(t,s)Q^-\ell\int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

Теорема 2. *Якщо оператор $Q = \ell U(\cdot)$, що діє з банахового простору $\mathbf{B_1}$ у банаховий простір $\mathbf{B}_2$, є узагальнено-оборотним, то неоднорідна задача (1), (2) розв'язна для тих і лише тих неоднорідностей $f(t) \in C([a;b],\mathbf{B_1})$ та $\alpha \in \mathbf{B}_2$, які задовольняють умову (9), і при цьому загальний розв'язок крайової задачі має вигляд (11).*

3. Крайові задачі у гільбертовому просторі. В даній частині буде проілюстровано результати з попереднього пункту на крайовій задачі у гільбертовому просторі. За рахунок багатшої геометрії основні результати буде уточнено. Отже, будемо розглядати рівняння (1), де неперервна вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $[a;b]$ у гільбертовий простір $H_1 : f(t) \in C([a;b],H_1) := \{f(\cdot) : [a;b] \to H_1, |||f||| = \sup_{t\in[a;b]}\|f(t)\|\}$, оператори $A(t)$ є замкненими з щільною областю визначення $D(A(t)) = D \subset H_1$, яка не залежить від t. У крайовій умові (2) будемо припускати, що оператор ℓ є лінійним та обмеженим на $[a;b]$, що діє з простору $C([a;b];H_1)$ у гільбертовий простір H_2, $\alpha \in H_2$. Розв'язок такого рівняння має також вигляд (7). Підставивши його у крайову умову (2), отримаємо операторне рівняння (8), яке запишемо у вигляді

$$Qx = g, \tag{13}$$

де $x = x(s,s)$, $g = \alpha - \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau) f(\tau)\, d\tau$. Покажемо, що у гільбертовому просторі рівняння (13) можна зробити розв'язним у певному сенсі при довільних неоднорідностях у правій частині. Оскільки оператор Q є лінійним та обмеженим, мають місце такі розклади у пряму суму:

$$H_1 = N(Q) \oplus X, \quad H_2 = \overline{R(Q)} \oplus Y.$$

Тут $X = N(Q)^{\perp}$, $Y = \overline{R(Q)}^{\perp}$. Внаслідок зображення існують оператори ортогонального проектування $\mathcal{P}_{N(Q)}$, $\mathcal{P}_X$ та $\mathcal{P}_{\overline{R(Q)}}$, $\mathcal{P}_Y$ на відповідні підпростори. Позначатимемо через H фактор-простір простору H_1 за ядром $N(Q)$ ($H = H_1/N(Q)$). Тоді, як відомо [11], існують неперервна бієкція $p : X \to H$ та проекція $j : H_1 \to H$. Трійка (H_1, H, j) є локально тривіальним розшаруванням із типовим шаром $\mathcal{P}_{N(L)} H_1$. Визначимо тепер оператор

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\overline{R(Q)}} L j^{-1} p : X \to R(Q) \subset \overline{R(Q)}.$$

Легко переконатися, що визначений таким чином оператор є лінійним, ін'єктивним та неперервним. Тепер, скориставшись процесом поповнення [12] за нормою $\|x\|_{\overline{X}} = \|\mathcal{Q}x\|_F$, де $F = \overline{R(Q)}$, отримаємо новий простір $\overline{X}$ і розширений оператор $\overline{\mathcal{Q}}$. Тоді цей оператор

$$\overline{\mathcal{Q}} : \overline{X} \to \overline{R(Q)}, \quad X \subset \overline{X},$$

буде здійснювати гомеоморфізм між $\overline{X}$ та $\overline{R(Q)}$. Розглянемо розширений оператор $\overline{Q} = \overline{\mathcal{Q}} \mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{H}_1 \to H_2$,

$$\overline{H}_1 = N(Q) \oplus \overline{X}, \quad H_2 = R(\overline{Q}) \oplus Y.$$

Зрозуміло, що $\overline{Q}x = Qx$, $x \in H_1$, та оператор $\overline{Q}$ є нормально розв'язним, а отже, має псевдообернений $\overline{Q}^+$, який будемо називати узагальненим псевдоберненим до оператора Q.

Зауваження 2. З означення безпосередньо випливає, що узагальнений псевдообернений до оператора Q є в звичайному сенсі псевдоберненим за Муром – Пенроузом до оператора $\overline{Q}$.

Використаємо побудований оператор при розв'язності рівняння (13). Будемо виділяти такі три типи розв'язків.

1. Класичні розв'язки. Якщо оператор Q є нормально розв'язним, то, як відомо [4], елемент g належить $R(Q)$ тоді й тільки тоді, коли $\mathcal{P}_{N(Q^*)} g = 0$. В цьому випадку існує псевдообернений за Муром – Пенроузом оператор Q^+ і множину розв'язків (13) можна записати у вигляді

$$x = Q^+ g + \mathcal{P}_{N(Q)} c \quad \forall c \in H_1.$$

2. Сильні узагальнені розв'язки. Розглянемо випадок, коли множина значень оператора Q не є замкненою. В цьому випадку існує розширений оператор $\overline{Q}$ й умова узагальненої розв'язності рівняння (13) має вигляд

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} g = 0,$$

а відповідним узагальненим розв'язком будемо називати довільний елемент з множини $\{\overline{Q}^+ g + \mathcal{P}_{N(Q)} c, c \in H_1\}$.

Зауваження 3. Якщо $g \in R(Q)$, то узагальнений розв'язок, визначений вище, буде класичним узагальненим.

3. Узагальнені квазірозв'язки. Розглянемо випадок, коли $g \notin \overline{R(Q)}$. Для елемента g це рівносильно виконанню умови $\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} g \neq 0$. В цьому випадку сильні узагальнені розв'язки не існують, але існують елементи з $\overline{X}$ такі, що є розв'язками варіаційної задачі $\inf \|\overline{Q} x - g\|_{H_2}$, де $\overline{Q} = \overline{Q}_{\overline{X}} \mathcal{P}_{\overline{X}}$ та інфімум береться по всіх елементах $x \in \overline{X}$. Множина цих елементів має вигляд $\{\overline{Q}^+ g + \mathcal{P}_{N(Q)} c, c \in H_1\}$. Будемо називати їх узагальненими квазірозв'язками за аналогією зі звичайними квазірозв'язками [4].

Зауваження 4. Зазначимо, що в усіх трьох випадках розв'язки мають однакове зображення, але в них вкладається різний сенс.

Підсумуємо все вищевикладене у вигляді теореми.

Теорема 3. *Крайова задача (1), (2), що визначена у гільбертових просторах, є завжди розв'язною.*

1. Існують сильні узагальнені розв'язки тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} \alpha - \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot, \tau) f(\tau)\, d\tau = 0;$$

якщо $\alpha - \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot, \tau) f(\tau)\, d\tau \in R(Q)$, *то розв'язки будуть класичними узагальненими.*

2. Існують узагальнені квазірозв'язки тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} \alpha - \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot, \tau) f(\tau)\, d\tau \neq 0.$$

3. Узагальнені розв'язки крайової задачі (1), (2) мають вигляд

$$x(t, s, c) = U(t, s) \mathcal{P}_{N(Q)} c + U(t, s) \overline{Q}^+ \alpha + (\overline{G[f]})(t, s),$$

де

$$(\overline{G[f]})(t, s) = \int_s^t U(t, \tau) f(\tau)\, d\tau - U(t, s) \overline{Q}^+ \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot, \tau) f(\tau)\, d\tau$$

— узагальнений оператор Гріна крайової задачі (1), (2).

4. Приклад. Розглянемо систему (1) у просторі нескінченних послідовностей l_2 з необмеженими операторами $A(t) = A$, вектор-функцією $f(t)$ у вигляді

$$A(t) = \operatorname{diag}\{2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots\},$$

$$f(t) = \mathrm{col}\,(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots)$$

і крайовою умовою (2) вигляду $\ell x(\cdot) = Mx(0) - Nx(1) = \alpha$, де

$$M = \mathrm{diag}\,\{3, 1, 3, 1, \ldots, 3, 1, \ldots\},$$

$$N = \mathrm{diag}\,\left\{e^{-2}, e^{-4}, e^{-8}, e^{-16}, \ldots, e^{-2^n}, \ldots\right\},$$

$$\alpha = \mathrm{col}\,\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\} \in \ell_2; \quad \alpha_i = \mathrm{const}, \quad i = \overline{1, \infty}.$$

Легко переконатися, що так визначений оператор дійсно є необмеженим. В якості області визначення оператора A розглянемо множину неперервних вектор-функцій

$$D(A) = \Bigg\{ x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots) \in l_2, \;\; t \in [0, 1] :$$

$$\sup_{t \in [0,1]} \sum_{i=1}^{+\infty} e^{4^i} x_i^2(t) < \infty \Bigg\} \subset C([0, 1]; l_2).$$

Ця множина є щільною в $C([0, 1]; l_2)$ (оскільки містить довільні вектор-функції, що мають скінченну кількість ненульових координат). Розв'язок даної задачі будемо шукати у вигляді зліченновимірного вектора-стовпчика $x(t) = \mathrm{col}\,\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \ldots\} \in C([0; 1], \ell_2)$.

Еволюційний оператор задачі має вигляд

$$U(t, 0) = \mathrm{diag}\,\left\{e^{2t}, e^{4t}, e^{8t}, e^{16t}, \ldots, e^{2^n t}, \ldots\right\}.$$

Обернений до $U(t, 0)$ оператор

$$U^{-1}(t, 0) = \mathrm{diag}\,\left\{e^{-2t}, e^{-4t}, e^{-8t}, e^{-16t}, \ldots, e^{-2^n t}, \ldots\right\},$$

$$Q = M - NU(1, 0) = \mathrm{diag}\,\{2, 0, 2, 0, \ldots, 2, 0, \ldots\},$$

$$Q^- = \frac{1}{2}\,\mathrm{diag}\,\{1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots\}.$$

Проектори відповідно дорівнюють

$$\mathcal{P}_{N(Q)} = I - Q^- Q = \mathrm{diag}\,\{0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots\},$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} = I - QQ^- = \mathrm{diag}\,\{0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots\}.$$

Умова розв'язності (9) для даної задачі набирає вигляду

$$\alpha_2 = \int_0^1 \frac{e^4 f_2(\tau)}{e^{4\tau}}\, d\tau,$$

$$\alpha_4 = \int_0^1 \frac{e^{16} f_4(\tau)}{e^{16\tau}}\, d\tau,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{2k} = \int_0^1 \frac{e^{2k} f_{2k}(\tau)}{e^{2k\tau}}\, d\tau,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

При знайдених $\alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2k}, \ldots, k \in \mathbb{N}$, і довільних $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2k-1}, \ldots, k \in \mathbb{N}$, та $f(t) \in C([0;1], \ell_2)$ задача має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків у вигляді (11):

$$x(t,0,c) = \operatorname{diag}\{0, e^{4t}, 0, e^{16t}, \ldots, 0, e^{2^{2k}t}, \ldots\}c +$$
$$+ \frac{1}{2}\operatorname{diag}\{e^{2t}, 0, e^{8t}, 0, \ldots, e^{2^{2k-1}t}, 0, \ldots\}\alpha + (G[f])(t,0) \quad \forall c \in \ell_2,$$

або

$$x(t,0,c) = \operatorname{diag}\{0, e^{4t}, 0, e^{16t}, \ldots, 0, e^{2^{2k}t}, \ldots\}\, c +$$
$$+ \frac{1}{2}\operatorname{diag}\{e^{2t}, 0, e^{8t}, 0, \ldots, e^{2^{2k-1}t}, 0, \ldots\}\alpha +$$
$$+ \operatorname{col}\left(\int_0^t \frac{e^{2t} f_1(\tau)d\tau}{e^{2\tau}}, \int_0^t \frac{e^{4t} f_2(\tau)d\tau}{e^{4\tau}}, \int_0^t \frac{e^{8t} f_1(\tau)d\tau}{e^{8\tau}}, \int_0^t \frac{e^{16t} f_2(\tau)d\tau}{e^{16\tau}}, \ldots, \int_0^t \frac{e^{2^k t} f_k(\tau)d\tau}{e^{2^k\tau}}, \ldots\right) +$$
$$+ \operatorname{col}\left(\int_0^1 \frac{e^{2t} f_1(\tau)d\tau}{2e^{2\tau}}, 0, \int_0^1 \frac{e^{8t} f_1(\tau)d\tau}{2e^{8\tau}}, 0, \ldots, \int_0^1 \frac{e^{2^{2k-1}t} f_k(\tau)d\tau}{2e^{2^{2k-1}\tau}}, 0, \ldots\right),$$

де $k \in \mathbb{N}$.

1. *Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

3. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.

4. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 317 p.

5. *Бойчук О. А., Панасенко Є. В.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 1. — С. 16 – 19.

6. *Бойчук А. А., Покутний А. А.* Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 1. — Р. 3 – 14.

7. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. — 308 с.

8. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.

9. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

10. *Pokutnyi A. A.* Bounded solutions of linear and weakly nonline differential equations in a Banach space with an unbounded operator in the linear part // Different. Equat. — 2012. — **48**, № 6. — P. 803 – 813.

11. *Антоневич А. Б.* Расслоенные пространства и K-теория: первые шаги // Спектральные и эволюционные задачи. — 2010. — **20**. — С. 14 – 51.

12. *Klyushin D. A., Lyashko S. I., Nomirovskii D. A., Petunin Yu. I., Semenov V. V.* Generalized solutions of operator equations and extreme elements. — Springer, 2012. — 202 p.

Одержано 17.04.13