УДК 531.36

ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕТОЧНЫХ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

А. С. Хорошун

Ин-т механики НАН Украины,
Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3
e-mail:center@inmech.kiev.ua

We study an imprecise large-scale singularly perturbed differential system. Using matrix-valued Lyapunov functions for subsystems we construct a scalar-valued Lyapunov function thus proving absolute parametric stability of the initial system, and find an estimate for the set of parameter values for which the system has the above property.

Розглянуто неточну великомасштабну сингулярно збурену систему диференціальних рівнянь. Із використанням матричнозначних функцій Ляпунова для підсистем побудовано скалярну функцію Ляпунова, яка дозволяє встановити абсолютну параметричну стійкість вихідної системи. Оцінено множину значень параметрів, для яких вказана властивість системи зберігається.

1. Постановка задачи. Рассмотрим неточную сингулярно возмущенную крупномасштабную систему дифференциальных уравнений вида

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \bar{F}(x, y, p), \\
\mu_i \dot{Y}_i &= \bar{G}_i(x, y, p), \quad i = \overline{1, r},
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ — переменные, определяющие состояние системы в момент времени $t \in \mathbb{R}_+$, $y = (Y_1^T, \ldots, Y_r^T)^T$, $Y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $m_1 + \ldots + m_r = m$. Векторные функции $\bar{F}(x, y, p) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{G}_i(x, y, p) \in \mathbb{R}^{m_i}$ непрерывно дифференцируемы по переменным x и y и непрерывно зависимы от векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$, $\mu_i \in (0, 1]$ — малые параметры.

Поскольку малые параметры взаимно не связаны, система (1) имеет r существенно независимых временных шкал, т. е. градуирование временной шкалы неравномерно.

Отметим, что состояние равновесия данной системы является подвижным. Подвижность состояния равновесия, т. е. изменение его координат x и y, вызвано изменением значений параметра p. Это означает, что если для некоторого фиксированного значения параметра p найдено соответствующее состояние равновесия исследуемой системы, то при другом фиксированном значении параметра будем иметь, возможно, другое состояние равновесия, т. е. состояние равновесия поменяет свое местоположение.

Приведем определение абсолютной параметрической устойчивости неточной системы.

Определение 1. *Неточная система дифференциальных уравнений (1) называется абсолютно параметрически устойчивой относительно области $P \subseteq \mathbb{R}^l$, если для всех $p \in P$ выполняются следующие условия:*

1) существует единственное состояние равновесия $x^e(p)$ рассматриваемой системы;

2) $x^e(p)$ глобально асимптотически устойчиво.

Представим систему (1) как совокупность r взаимосвязанных сингулярно возмущенных подсистем

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= F_i(X_i, Y_i, p) + f_i(x, y, p), \\ \mu_i \dot{Y}_i &= G_i(X_i, Y_i, p) + g_i(x, y, p), \end{aligned} \tag{2}$$

где $x = (X_1^T, \ldots, X_r^T)^T$, $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $n_1 + \ldots + n_r = n$, $\bar{F} = (\bar{F}_1^T, \ldots, \bar{F}_r^T)^T$, $\bar{F}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, функции

$$F_i(X_i, Y_i, p) = \bar{F}_i(0, \ldots, X_i, \ldots, 0, \ldots, Y_i, \ldots, 0, p),$$

$$G_i(X_i, Y_i, p) = \bar{G}_i(0, \ldots, X_i, \ldots, 0, \ldots, Y_i, \ldots, 0, p)$$

описывают динамику подсистем, $f_i(x, y, p) = \bar{F}_i(x, y, p) - F_i(X_i, Y_i, p)$, $g_i(x, y, p) = \bar{G}_i(x, y, p) - G_i(X_i, Y_i, p)$ — функции взаимодействия.

Пусть для некоторого p^* система (1) имеет состояние равновесия $\Big((x^*)^T, (y^*)^T\Big)^T$, $(x^*)^T = \Big((X_1^*)^T, \ldots, (X_r^*)^T\Big)$, $(y^*)^T = \Big((Y_1^*)^T, \ldots, (Y_r^*)^T\Big)$, так что

$$\begin{aligned} 0 &= F_i(X_i^*, Y_i^*, p^*) + f_i(x^*, y^*, p^*), \\ 0 &= G_i(X_i^*, Y_i^*, p^*) + g_i(x^*, y^*, p^*), \quad i = \overline{1, r}. \end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что из (3) не следует, что

$$0 = F_i(X_i^*, Y_i^*, p^*),$$

$$0 = G_i(X_i^*, Y_i^*, p^*), \quad i = \overline{1, r},$$

т. е. $\Big((X_i^*)^T, (Y_i^*)^T\Big)$ не обязательно является состоянием равновесия i-й независимой сингулярно возмущенной подсистемы. Определим функции

$$\tilde{F}_i(X_i, Y_i, p) = F_i(X_i, Y_i, p) - F_i(X_i^e(p), Y_i^e(p), p),$$

$$\tilde{f}_i(x, y, p) = f_i(x, y, p) - f_i(x^e(p), y^e(p), p),$$

$$\tilde{G}_i(X_i, Y_i, p) = G_i(X_i, Y_i, p) - G_i(X_i^e(p), Y_i^e(p), p),$$

$$\tilde{g}_i(x, y, p) = g_i(x, y, p) - g_i(x^e(p), y^e(p), p), \quad i = \overline{1, r},$$

где $x^e(p) = \Big((X_1^e(p))^T, \ldots, (X_r^e(p))^T\Big)^T$, $y^e(p) = \Big((Y_1^e(p))^T, \ldots, (Y_r^e(p))^T\Big)^T$ — состояние равновесия системы (2), соответствующее значению параметра p. Рассмотрим совокупность подсистем

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= \tilde{F}_i(X_i, Y_i, p) + \tilde{f}_i(x, y, p), \\ \mu_i \dot{Y}_i &= \tilde{G}_i(X_i, Y_i, p) + \tilde{g}_i(x, y, p), \quad i = \overline{1, r}, \end{aligned} \tag{4}$$

для которой $\tilde{F}_i(X_i^e(p), Y_i^e(p), p) = 0$, $\tilde{f}_i(x^e(p), y^e(p), p) = 0$, $\tilde{G}_i(X_i^e(p), Y_i^e(p), p) = 0$, $\tilde{g}_i(x^e(p), y^e(p), p) = 0$ при всех $i = \overline{1, r}$ и которая, очевидно, имеет одинаковые решения с системой (2) при одинаковых начальных условиях.

Таким образом, вместе с системой (2) будем исследовать систему (4), которая состоит из r взаимосвязанных сингулярно возмущенных подсистем

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= \tilde{F}_i(X_i, Y_i, p), \\ \mu_i \dot{Y}_i &= \tilde{G}_i(X_i, Y_i, p), \quad i = \overline{1, r}. \end{aligned} \tag{5}$$

Относительно системы (2) сделаем следующее предположение.

Предположение 1. *Система уравнений (2) такова, что:*

1) существует значение параметра $p = p^*$ такое, что при этом значении параметра существует состояние равновесия $x = x^*$, $y = y^*$ рассматриваемой системы;

2) существуют такие положительные числа $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij} < +\infty$, что справедливы оценки

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial X_i}\bigg|_{(X_i, Y_i, p)} - \frac{\partial F_i}{\partial X_i}\bigg|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} \right\| \le \alpha_i, \quad \left\| \frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(X_i, Y_i, p)} - \frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} \right\| \le \beta_i,$$

$$\left\| \frac{\partial G_i}{\partial X_i}\bigg|_{(X_i, Y_i, p)} - \frac{\partial G_i}{\partial X_i}\bigg|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} \right\| \le \gamma_i, \quad \left\| \frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(X_i, Y_i, p)} - \frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} \right\| \le \delta_i, \quad i = \overline{1, r},$$

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\bigg|_{(x, y, p)} - \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\bigg|_{(x^*, y^*, p^*)} \right\| \le \alpha_{ij}, \quad \left\| \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x, y, p)} - \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x^*, y^*, p^*)} \right\| \le \beta_{ij},$$

$$\left\| \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\bigg|_{(x, y, p)} - \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\bigg|_{(x^*, y^*, p^*)} \right\| \le \gamma_{ij}, \quad \left\| \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x, y, p)} - \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x^*, y^*, p^*)} \right\| \le \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, r},$$

для всех $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $Y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$;

3) матрица

$$A(x^*, y^*, p^*) = \begin{pmatrix} M(x^*, y^*, p^*) & N(x^*, y^*, p^*) \\ L(x^*, y^*, p^*) & Q(x^*, y^*, p^*) \end{pmatrix},$$

где

$$M_{ii}(x, y, p) = \frac{\partial F_i(X_i, Y_i, p)}{\partial X_i} + \frac{\partial f_i(x, y, p)}{\partial X_i}, \quad M_{ij}(x, y, p) = \frac{\partial f_i(x, y, p)}{\partial X_j},$$

$$N_{ii} = \frac{\partial F_i(X_i, Y_i, p)}{\partial Y_i} + \frac{\partial f_i(x, y, p)}{\partial Y_i}, \quad N_{ij}(x, y, p) = \frac{\partial f_i(x, y, p)}{\partial Y_j},$$

$$L_{ii}(x, y, p) = \frac{\partial G_i(X_i, Y_i, p)}{\partial X_i} + \frac{\partial g_i(x, y, p)}{\partial X_i}, \quad L_{ij}(x, y, p) = \frac{\partial g_i(x, y, p)}{\partial X_j},$$

$$Q_{ii}(x,y,p) = \frac{\partial G_i(X_i,Y_i,p)}{\partial Y_i} + \frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial Y_i}, \quad Q_{ij}(x,y,p) = \frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial Y_j}, \quad i,j = \overline{1,r}, \;\; i \neq j,$$

невырождена.

Замечание 1. В данной работе, если это специально не оговорено, используется спектральная норма для матриц и евклидова норма для векторов.

В работе [1] исследована абсолютная параметрическая устойчивость сингулярно возмущенной системы без предположения о ее крупномасштабности. Для этого использовалась матричнозначная функция Ляпунова, что позволило отказаться от требования устойчивости линейного приближения медленной подсистемы. В данной работе на основании результатов роботы [1] для каждой подсистемы системы (2) будет построена функция Ляпунова, сумма которых будет использована в качестве таковой для исходной крупномасштабной системы. С помощью полученной функции будут определены достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости системы (1), а также область в пространстве параметров $\mathbb{R}^l$ и множество значений параметров μ_i, $i = \overline{1,r}$, при которых указанное свойство системы (1) сохраняется.

2. Условия существования состояния равновесия исследуемой системы. Состояние равновесия системы (1), если оно существует, является решением системы уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{F}(x,y,p), \\ 0 &= \bar{G}_i(x,y,p), \quad i = \overline{1,r}, \end{aligned}$$

или, что аналогично, решением совокупности подсистем

$$\begin{aligned} 0 &= F_i(X_i,Y_i,p) + f_i(x,y,p), \\ 0 &= G_i(X_i,Y_i,p) + g_i(x,y,p), \quad i = \overline{1,r}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для уравнений i-й подсистемы с помощью формулы конечных приращений Лагранжа получено представление

$$0 = \left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(\tilde{X}_i,\tilde{Y}_i,p)} X_i + \left.\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\right|_{(\tilde{X}_i,\tilde{Y}_i,p)} Y_i + \tilde{c}_{1i}(p) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(\hat{x},\hat{y},p)} X_i + \left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\right|_{(\hat{x},\hat{y},p)} Y_i +$$
$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(\hat{x},\hat{y},p)} X_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right|_{(\hat{x},\hat{y},p)} Y_j + \hat{c}_{1i}(p),$$

$$0 = \left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(\tilde{\tilde{X}}_i,\tilde{\tilde{Y}}_i,p)} X_i + \left.\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\right|_{(\tilde{\tilde{X}}_i,\tilde{\tilde{Y}}_i,p)} Y_i + \tilde{\tilde{c}}_{2i}(p) + \left.\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right|_{(\hat{\hat{x}},\hat{\hat{y}},p)} X_i + \left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\right|_{(\hat{\hat{x}},\hat{\hat{y}},p)} Y_i +$$
$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(\hat{\hat{x}},\hat{\hat{y}},p)} X_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\right|_{(\hat{\hat{x}},\hat{\hat{y}},p)} Y_j + \hat{c}_{2i}(p), \quad i = \overline{1,r},$$

где $\tilde{c}_{1i}(p) = F_i(0,0,p)$, $\hat{c}_{1i}(p) = f_i(0,0,p)$, $\tilde{\tilde{c}}_{2i}(p) = G_i(0,0,p)$, $\hat{\hat{c}}_{2i}(p) = g_i(0,0,p)$ или, что то же,

$$0 = \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(\tilde{X}_i,\tilde{Y}_i,p)} + \frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(\hat{x},\hat{y},p)} \right) X_i + \left(\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(\tilde{X}_i,\tilde{Y}_i,p)} + \frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(\hat{x},\hat{y},p)} \right) Y_i +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(\hat{x},\hat{y},p)} X_j + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(\hat{x},\hat{y},p)} Y_j + c_{1i}(p),$$

$$0 = \left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(\tilde{\tilde{X}}_i,\tilde{\tilde{Y}}_i,p)} + \frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(\hat{\hat{x}},\hat{\hat{y}},p)} \right) X_i + \left(\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(\tilde{\tilde{X}}_i,\tilde{\tilde{Y}}_i,p)} + \frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(\hat{\hat{x}},\hat{\hat{y}},p)} \right) Y_i +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(\hat{\hat{x}},\hat{\hat{y}},p)} X_j + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(\hat{\hat{x}},\hat{\hat{y}},p)} Y_j + c_{2i}(p), \quad i = \overline{1,r},$$

где $c_{1i}(p) = \tilde{c}_{1i}(p) + \hat{c}_{1i}(p)$, $c_{21}(p) = \tilde{\tilde{c}}_{2i}(p) + \hat{\hat{c}}_{2i}(p)$.

Использовав полученные представления, запишем совокупность подсистем (6) в виде матричного уравнения $A(x,y,p)z = C(p)$, где $z^T = (x^T, y^T) = (X_1^T, \ldots, X_r^T, Y_1^T, \ldots, Y_r^T)$,

$$A(x,y,p) = \begin{pmatrix} M(x,y,p) & N(x,y,p) \\ \\ L(x,y,p) & Q(x,y,p) \end{pmatrix},$$

$$M_{ii}(x,y,p) = \frac{\partial F_i(X_i,Y_i,p)}{\partial X_i} + \frac{\partial f_i(x,y,p)}{\partial X_i}, \quad M_{ij}(x,y,p) = \frac{\partial f_i(x,y,p)}{\partial X_j},$$

$$N_{ii}(x,y,p) = \frac{\partial F_i(X_i,Y_i,p)}{\partial Y_i} + \frac{\partial f_i(x,y,p)}{\partial Y_i}, \quad N_{ij}(x,y,p) = \frac{\partial f_i(x,y,p)}{\partial Y_j},$$

$$L_{ii}(x,y,p) = \frac{\partial G_i(X_i,Y_i,p)}{\partial X_i} + \frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial X_i}, \quad L_{ij}(x,y,p) = \frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial X_j},$$

$$Q_{ii}(x,y,p) = \frac{\partial G_i(X_i,Y_i,p)}{\partial Y_i} + \frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial Y_i}, \quad Q_{ij}(x,y,p) = \frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial Y_j},$$

$$i,j = \overline{1,r}, \quad i \neq j, \quad C(p)^T = \left(c_{11}(p)^T, \ldots, c_{1r}^T(p), c_{21}^T(p), \ldots, c_{2r}^T(p)\right).$$

Таким образом, если для некоторых $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ определена матрица $A^{-1}(x,y,p)$, то существует единственное состояние равновесия исходной системы. Определим область P и ограничения на элементы исходной системы, при которых матрица $A(x,y,p)$ невырождена.

Поскольку матрица $A(x^*,y^*,p^*)$ невырождена, представим матрицу $A(x,y,p)$ в виде

$$\begin{aligned}A(x,y,p) &= A(x^*,y^*,p^*) + (A(x,y,p) - A(x^*,y^*,p^*)) = \\ &= A(x^*,y^*,p^*)\left(I^{2r\times 2r} + A^{-1}(x^*,y^*,p^*)\,(A(x,y,p) - A(x^*,y^*,p^*))\right),\end{aligned}$$

где $I^{2r\times 2r}$ — единичная матрица размерности $2r\times 2r$. Из полученного соотношения следует, что невырожденность исходной матрицы эквивалентна невырожденности матрицы

$$I^{2r\times 2r} + A^{-1}(x^*,y^*,p^*)\,(A(x,y,p) - A(x^*,y^*,p^*)),$$

что будет иметь место, если выполняется соотношение

$$\left\|A^{-1}(x^*,y^*,p^*)\,(A(x,y,p) - A(x^*,y^*,p^*))\right\| \le \|A^{-1}(x^*,y^*,p^*)\|\|A(x,y,p) - A(x^*,y^*,p^*)\| < 1.$$

Рассмотрим норму разности матриц $\|A(x,y,p) - A(x^*,y^*,p^*)\|$. Для блочной матрицы, например, размера 2×2 с блоками размерностей $n\times n$, $n\times m$, $m\times n$, $m\times m$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}\left\|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\right\|_2 &\le \left\|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\right\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^{m} d_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\operatorname{Sp} A^TA + \operatorname{Sp} B^TB + \operatorname{Sp} C^TC + \operatorname{Sp} D^TD\right)^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le \left(n\|A\|_2^2 + n\|B\|_2^2 + m\|C\|_2^2 + m\|D\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_2$ — спектральная, а $\|\cdot\|_E$ — евклидова норма соответствующей матрицы, $\operatorname{Sp}(\cdot)$ — ее след. Очевидно, что указанная оценка будет иметь место и для большего количества блоков. Таким образом, для блочной матрицы $A(x,y,p) - A(x^*,y^*,p^*)$ справедлива следующая оценка ее нормы:

$$\begin{aligned}&\|A(x,y,p) - A(x^*,y^*,p^*)\|_2 \le \\ &\le \left(\sum_{i=1}^{r} n_i \left\| \left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)} - \left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right\|_2^2 + \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r} n_i \left\| \left.\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)} - \left.\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + \left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right\|_2^2 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{r} \left\| \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right\|_2^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{r} \left\| \left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right\|_2^2 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{r} m_i \left\| \left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)} - \left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + \left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right\|_2^2 +\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{r} m_i \left\| \frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i,Y_i,p)} - \frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + \frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\|_2^2 +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{r} m_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \left\| \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\|_2^2 + \sum_{i=1}^{r} m_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \left\| \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x,y,p)} - \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*,y^*,p^*)} \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{r} n_i(\alpha_i + \alpha_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \alpha_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i(\beta_i + \beta_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \beta_{ij}^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{r} m_i(\gamma_i + \gamma_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{r} m_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \gamma_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{r} m_i(\delta_i + \delta_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{r} n_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \delta_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \Delta.$$

Значит, используя соотношение

$$\|A^{-1}(x^*, y^*, p^*)\|\Delta < 1, \tag{7}$$

можем определить область $P \subseteq \mathbb{R}^l$ и ограничения на элементы исходной системы, при выполнении которых совокупность подсистем (6) имеет единственное решение или, что аналогично, исходная система имеет единственное состояние равновесия.

Отметим, что $\Delta = 0$ при нулевых значениях α_i, β_i, γ_i, δ_i, α_{ij}, β_{ij} γ_{ij}, δ_{ij}, $i, j = \overline{1, r}$, и неравенство (7) выполняется. Поэтому всегда можно выбрать ненулевые значения указанных констант так, чтобы (7) выполнялось, т. е. возможно определить область $P \subseteq \mathbb{R}^l$ и оценки на элементы исходной системы, чтобы для всех $p \in P$ существовало единственное состояние равновесия исходной системы.

3. Достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости неточных крупномасштабных сингулярно возмущенных систем. Пусть для совокупности подсистем (2) выполняются условия предположения 1 и найдена область $P \subseteq \mathbb{R}^l$, для всех значений параметра из которой существует состояние равновесия $((x^e(p))^T, (y^e(p))^T)^T$ исходной системы, причем $x^e(p) = \left((X_1^e(p))^T, \ldots, (X_r^e(p))^T\right)^T$, $y^e(p) = \left((Y_1^e(p))^T, \ldots, (Y_r^e(p))^T\right)^T$, где $\left((X_i^e(p))^T, (Y_i^e(p))^T\right)$ — состояние равновесия i-й подсистемы (5).

Рассмотрим матричнозначную функцию вида (см. [2–4])

$$V_i(X_i, Y_i, \mu_i) = \begin{pmatrix} v_{11}(X_i) & v_{12}(X_i, Y_i, \mu_i) \\ \\ v_{21}(X_i, Y_i, \mu_i) & v_{22}(Y_i, \mu_i) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $v_{11}(X_i) = (X_i - X_i^e)^T P_{i1}(X_i - X_i^e)$, $v_{22}(Y_i, \mu_i) = \mu_i(Y_i - Y_i^e)^T P_{i3}(Y_i - Y_i^e)$, $v_{21}(X_i, Y_i, \mu_i) = v_{12}(X_i, Y_i, \mu_i) = \mu_i(X_i - X_i^e)^T P_{i2}(Y_i - Y_i^e)$, $P_{i1} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $P_{i3} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ — симметрические положительно определенные матрицы, $P_{i2} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$ — постоянная матрица. Выбрав вектор $\eta^T = (1, 1)$, следуя [2], образуем скалярную функцию

$$v_i(X_i, Y_i, \mu_i) = \eta^T V_i(X_i, Y_i, \mu_i)\eta. \tag{9}$$

Поскольку для элементов матричнозначной функции (8) имеют место оценки

$$v_{11}(X_i) \geq \lambda_{\min}(P_{i1})\|X_i - X_i^e\|^2 \quad \text{для всех} \quad X_i \in \mathbb{R}^{n_i},$$

$$v_{22}(Y_i, \mu_i) \geq \mu_i \lambda_{\min}(P_{i3})\|Y_i - Y_i^e\|^2 \quad \text{для всех} \quad Y_i \in \mathbb{R}^{m_i}, \quad \mu_i \in (0, 1],$$

$$v_{12}(X_i, Y_i, \mu_i) \geq -\mu_i(\lambda_{\max}(P_{i2}P_{i2}^T))^{1/2}\|X_i - X_i^e\|\|Y_i - Y_i^e\|$$

$$\text{для всех} \quad X_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad Y_i \in \mathbb{R}^{m_i}, \quad \mu_i \in (0, 1],$$

где $\lambda_{\min}(\cdot)$ и $\lambda_{\max}(\cdot)$ — минимальное и максимальное собственные значения соответствующей матрицы, для скалярной функции (9) справедлива оценка $v(X_i, Y_i, \mu_i) \geq u^T A_i(\mu_i) u$ для всех $(X_i, Y_i, \mu_i) \in \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{m_i} \times (0, 1]$, где $u^T = (\|X_i - X_i^e\|, \|Y_i - Y_i^e\|)$,

$$A_i(\mu_i) = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(P_{i1}) & -\mu_i(\lambda_{\max}(P_{i2}P_{i2}^T))^{1/2} \\ -\mu_i(\lambda_{\max}(P_{i2}P_{i2}^T))^{1/2} & \mu_i \lambda_{\min}(P_{i3}) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Найдем производную функции (9) по времени в силу i-й подсистемы (4):

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(X_i, Y_i, \mu_i)|_{(4)} = {} & \left(\tilde{F}_i(X_i, Y_i, p) - \tilde{F}_i(X_i^e, Y_i^e, p)\right)^T P_{i1}(X_i - X_i^e) + \\ & + \left(\tilde{f}_i(x, y, p) - \tilde{f}_i(x^e, y^e, p)\right)^T P_{i1}(X_i - X_i^e) + \\ & + (X_i - X_i^e)^T P_{i1}\left(\tilde{F}_i(X_i, Y_i, p) - \tilde{F}_i(X_i^e, Y_i^e, p)\right) + \\ & + (X_i - X_i^e)^T P_{i1}\left(\tilde{f}_i(x, y, p) - \tilde{f}_i(x^e, y^e, p)\right) + \\ & + \left(\tilde{G}_i(X_i, Y_i, p) - \tilde{G}_i(X_i^e, Y_i^e, p)\right)^T P_{i3}(Y_i - Y_i^e) + \\ & + (\tilde{g}_i(x, y, p) - \tilde{g}_i(x^e, y^e, p))^T P_{i3}(Y_i - Y_i^e) + \\ & + (Y_i - Y_i^e)^T P_{i3}\left(\tilde{G}_i(X_i, Y_i, p) - \tilde{G}_i(X_i^e, Y_i^e, p)\right) + \\ & + (Y_i - Y_i^e)^T P_{i3}\left(\tilde{g}_i(x, y, p) - \tilde{g}_i(x^e, y^e, p)\right) + \\ & + 2\mu_i\left(\tilde{F}_i(X_i, Y_i, p) - \tilde{F}_i(X_i^e, Y_i^e, p)\right)^T P_{i2}(Y_i - Y_i^e) + \end{aligned}$$

$$+ 2\mu_i \left(\tilde{f}_i(x,y,p) - \tilde{f}_i(x^e,y^e,p)\right)^T P_{i2}(Y_i - Y_i^e) +$$

$$+ 2(X_i - X_i^e)^T P_{i2} \left(\tilde{G}_i(X_i,Y_i,p) - \tilde{G}_i(X_i^e,Y_i^e,p)\right) +$$

$$+ 2(X_i - X_i^e)^T P_{i2} \left(\tilde{g}_i(x,y,p) - \tilde{g}_i(x^e,y^e,p)\right), \qquad (11)$$

где учтено, что $\tilde{F}_i(X_i^e,Y_i^e,p) + \tilde{f}_i(x^e,y^e,p) = 0$ и $\tilde{G}_i(X_i^e,Y_i^e,p) + \tilde{g}_i(x^e,y^e,p) = 0$.

Используя формулу конечных приращений Лагранжа для соответствующих разностей, из (11) получаем

$$\dot{v}_i(X_i,Y_i,\mu_i)|_{(4)} = (X_i - X_i^e)^T \Bigg[\left(\left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i1} + P_{i1} \left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} +$$

$$+ \left(\left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2}^T + P_{i2} \left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} +$$

$$+ \left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i1} + P_{i1} \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)} +$$

$$+ \left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}^T + P_{i2} \left.\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)} +$$

$$+ 2P_{i1} \left(\left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)} - \left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right) +$$

$$+ 2P_{i1} \left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right) +$$

$$+ 2P_{i2} \left(\left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)} - \left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right) +$$

$$+ 2P_{i2} \left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\Bigg] (X_i - X_i^e) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} (X_i - X_i^e)^T \Bigg[P_{i1} \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)} + P_{i1}\left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right) +$$

$$+ P_{i2} \left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)} + P_{i2}\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\Bigg] (X_j - X_j^e) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(X_j-X_j^e)^T\left[\left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i1}+\left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x,y,p)}-\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i1}+\right.$$

$$\left.+\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}^T+\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(x,y,p)}-\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}^T\right](X_i-X_i^e)+$$

$$+(X_i-X_i^e)^T\left[P_{i1}\left.\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}+P_{i1}\left(\left.\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)}-\left.\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)+\right.$$

$$+P_{i1}\left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}+P_{i1}\left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\right|_{(x,y,p)}-\left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)+$$

$$+\left(\left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\left(\left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)}-\left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+$$

$$+\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right|_{(x,y,p)}-\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+$$

$$+\mu_i\left(\left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\mu_i\left(\left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)}-\left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+$$

$$+\mu_i\left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\mu_i\left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(x,y,p)}-\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+$$

$$+P_{i2}\left.\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}+P_{i2}\left(\left.\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)}-\left.\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)+$$

$$\left.+P_{i2}\left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}+P_{i2}\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\right|_{(x,y,p)}-\left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\right](Y_i-Y_i^e)+$$

$$+(Y_i-Y_i^e)^T\left[P_{i1}\left.\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}+P_{i1}\left(\left.\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)}-\left.\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)+\right.$$

$$+P_{i1}\left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}+P_{i1}\left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\right|_{(x,y,p)}-\left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)+$$

$$+\left(\left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\left(\left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)}-\left.\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+$$

$$+\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right|_{(x,y,p)}-\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+$$

$$+\mu_i \left(\left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2} + \mu_i \left(\left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)} - \left.\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2} +$$

$$+\mu_i \left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2} + \mu_i \left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2} +$$

$$+ P_{i2} \left.\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + P_{i2}\left(\left.\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i,Y_i,p)} - \left.\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right) +$$

$$+ P_{i2} \left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)} + P_{i2}\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\Bigg]^T (X_i - X_i^e) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} (Y_j - Y_j^e)^T \left[\left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i1} + \left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i1} + \right.$$

$$\left. + \left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}^T + \left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}^T\right] (X_i - X_i^e) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} (X_i - X_i^e)^T \left[P_{i1} \left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)} + P_{i1}\left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right) + \right.$$

$$\left. + P_{i2} \left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)} + P_{i2}\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\right] (Y_j - Y_j^e) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} (X_j - X_j^e)^T \left[\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3} + \left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3} + \right.$$

$$\left. + \mu_i \left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2} + \mu_i \left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}\right] (Y_i - Y_i^e) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} (Y_i - Y_i^e)^T \left[P_{i3} \left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)} + P_{i3}\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right) + \right.$$

$$\left. + \mu_i P_{i2}^T \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)} + \mu_i P_{i2}^T\left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x,y,p)} - \left.\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\right] (X_j - X_j^e) +$$

$$+ (Y_i - Y_i^e)^T \left[\left(\left.\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i3} + P_{i3} \left.\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\right|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)} + \right.$$

$$+\mu_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\mu_i P_{i2}^T\,\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}+$$

$$+\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+P_{i3}\,\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}+$$

$$+\mu_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\mu_i P_{i2}^T\,\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}+$$

$$+2P_{i3}\left(\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)+2P_{i3}\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)+$$

$$+2\mu_i\left(\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(X_i,Y_i,p)}-\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(X_i^*,Y_i^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+$$

$$+2\mu_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}\Bigg](Y_i-Y_i^e)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(Y_j-Y_j^e)^T\left[\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i3}+\right.$$

$$\left.+\mu_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}+\mu_i\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)^T P_{i2}\right](Y_i-Y_i^e)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(Y_i-Y_i^e)^T\left[P_{i3}\,\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}+P_{i3}\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x,y,p)}-\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)+\right.$$

$$\left.+\mu_i P_{i2}^T\,\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}+\mu_i P_{i2}^T\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x,y,p)}-\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\bigg|_{(x^*,y^*,p^*)}\right)\right](Y_j-Y_j^e). \tag{12}$$

В качестве функции Ляпунова, разрешающей вопрос об абсолютной параметрической устойчивости исходной системы, используем функцию вида

$$V(x,y,\mu)=\sum_{i=1}^{r}v_i(X_i,Y_i,\mu_i),\quad \mu=(\mu_1,\ldots,\mu_r)^T. \tag{13}$$

Для производной функции $V(x,y,\mu)$ в силу совокупности подсистем (4), суть в силу исходной системы, учитывая (12) и условия предположения 1, получаем оценку

$$\dot V(x,y,\mu)\Big|_{(4)}\le \zeta^T N(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i,\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_{ij}\delta_{ij},\mu)\zeta, \tag{14}$$

где

$$\zeta^T = (\|X_1 - X_1^e\|, \ldots, \|X_r - X_r^e\|, \|Y_1 - Y_1^e\|, \ldots, \|Y_r - Y_r^e\|),$$

$$N(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}\delta_{ij}, \mu) = \begin{pmatrix} K & L \\ L^T & M \end{pmatrix}, \quad K, L, M \in \mathbb{R}^{r\times r}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} K_{ii} = \lambda_{\max} \Bigg[& \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} \right)^T P_{i1} + P_{i1} \frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} + \\ & + \left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} \right)^T P_{i2}^T + P_{i2} \frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} + \\ & + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} \right)^T P_{i1} + P_{i1} \frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} + \\ & + \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} \right)^T P_{i2}^T + P_{i2} \frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} \Bigg] + \\ & + 2\alpha_i\|P_{i1}\| + 2\alpha_{ii}\|P_{i1}\| + 2\gamma_i\|P_{i2}\| + 2\gamma_{ii}\|P_{i2}\|, \end{aligned}$$

$$K_{ij} = K_{ji} = \left\| P_{i1} \frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} + P_{i2} \frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} \right\| + \alpha_{ij}\|P_{i1}\| + \gamma_{ij}\|P_{i2}\|,$$

$$\begin{aligned} M_{ii} = \lambda_{\max} \Bigg[& \left(\frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} \right)^T P_{i3} + P_{i3} \frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} + \mu_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} \right)^T P_{i2} + \\ & + \mu_i P_{i2}^T \frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} + \left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} \right)^T P_{i3} + P_{i3} \frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} + \\ & + \mu_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} \right)^T P_{i2} + \mu_i P_{i2}^T \frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} \Bigg] + \\ & + 2\delta_i\|P_{i3}\| + 2\delta_{ii}\|P_{i3}\| + 2\mu_i\beta_i\|P_{i2}\| + 2\mu_i\beta_{ii}\|P_{i2}\|, \end{aligned}$$

$$M_{ij} = M_{ji} = \left\| P_{i3} \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} + \mu_i P_{i2}^T \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} \right\| + \delta_{ij}\|P_{i3}\| + \mu_i\beta_{ij}\|P_{i2}\|,$$

$$L_{ii} = \Bigg\| P_{i1}\, \frac{\partial F_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} + P_{i1}\, \frac{\partial f_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} + \left(\frac{\partial G_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} \right)^T P_{i3} +$$

$$+ \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} \right)^T P_{i3} + P_{i2}\, \frac{\partial G_i}{\partial Y_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} + P_{i2}\, \frac{\partial g_i}{\partial Y_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} +$$

$$+ \mu_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} + \frac{\partial F_i}{\partial X_i}\Big|_{(X_i^*, Y_i^*, p^*)} \right)^T P_{i2} \Bigg\| + \mu_i \alpha_i \|P_{i2}\| + \mu_i \alpha_{ii} \|P_{i2}\| +$$

$$+ \beta_i \|P_{i1}\| + \beta_{ii} \|P_{i1}\| + \gamma_i \|P_{i3}\| + \gamma_{ii} \|P_{i3}\| + \delta_i \|P_{i2}\| + \delta_{ii} \|P_{i2}\|,$$

$$L_{ij} = \Bigg\| P_{i1}\, \frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} + P_{i2}\, \frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} \Bigg\| + \beta_{ij} \|P_{i1}\| + \delta_{ij} \|P_{i2}\| +$$

$$+ \Bigg\| P_{j3}\, \frac{\partial g_j}{\partial X_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} + \mu_j P_{j2}^T\, \frac{\partial f_j}{\partial X_i}\Big|_{(x^*, y^*, p^*)} \Bigg\| + \gamma_{ji} \|P_{j3}\| + \mu_j \alpha_{ji} \|P_{j2}\|, \; i, j = \overline{1, r}, \; i \neq j.$$

Использовав полученные оценки, сформулируем и докажем теорему, которая определяет достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости неточной сингулярно возмущенной системы относительно некоторой области в пространстве параметров.

Теорема 1. *Пусть для совокупности подсистем (2) неточной сингулярно возмущенной системы (1) выполняются условия предположения 1, построена матричнозначная функция (8), для матриц* P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, *величин* α_i, β_i, γ_i, δ_i, α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, δ_{ij}, *всех* $0 < \mu_i \leq \leq \mu_i^* < \dfrac{\lambda_{\min}(P_{i1})\lambda_{\min}(P_{i3})}{\lambda_{\max}^{1/2}(P_{i2}P_{i2}^T)}$, $i, j = \overline{1, r}$, *справедливо соотношение (7) и матрица (15) отрицательно определена. Тогда система (1) абсолютно параметрически устойчива относительно области* P *для всех* $\mu_i \in (0, \mu_i^*]$, $i = \overline{1, r}$.

Доказательство. Поскольку для совокупности подсистем (2) исходной системы дифференциальных уравнений (1) справедливо предположение 1 и для величин α_i, β_i, γ_i, δ_i, α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij}, δ_{ij}, $i, j = \overline{1, r}$, имеет место соотношение (7), согласно п. 2, для всех $p \in P \subseteq \mathbb{R}^l$ существует единственное состояние равновесия системы (1). Пусть p — некоторое значение параметра из области P и $\left((x^e(p))^T, (y^e(p))^T\right)^T$ — соответствующее ему состояние равновесия. Рассмотрим скалярную функцию (13), образованную из функций (9), которые, в свою очередь, построены с помощью матричнозначных функций (8). При всех $\mu_i \in (0, \mu_i^*]$, $\overline{i = 1, r}$, матрицы (10) положительно определены, т. е. скалярная функция (13) положительна для всех $(x, y, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \prod_{i=1}^r (0, \mu_i^*]$. Для производной функции (13) по времени в силу совокупности подсистем (2) исходной системы имеет место оценка (14). Согласно условиям теоремы 1, матрица (15) отрицательно определена, т. е. рассматриваемая производная отрицательна для всех $(x, y, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \prod_{i=1}^r (0, \mu_i^*]$. Значит, функция (13) является функцией Ляпунова, позволяющей в силу теоремы 12.1 (см. [5]) установить глобальную асимптотическую устойчивость состояния равновесия

$\left((x^e(p))^T,(y^e(p))^T\right)^T$. Так как p — произвольная точка множества P, система (1) абсолютно параметрически устойчива относительно этой области.

Теорема доказана.

4. Пример. Рассмотрим неточную сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений 8-го порядка вида (1) и исследуем поведение ее решений. В рассматриваемом примере $r = 2$, $x \in \mathbb{R}^4$, $y = (Y_1^T, Y_2^T)^T$, $Y_1 \in \mathbb{R}^2$, $Y_2 \in \mathbb{R}^2$, p — скалярный параметр, $\mu_1 \in (0,1]$, $\mu_2 \in (0,1]$ — малые параметры. Разбив вектор x на субвекторы X_1 и X_2 следующим образом: $x = (X_1^T, X_2^T)^T$, $X_1 \in \mathbb{R}^2$, $X_2 \in \mathbb{R}^2$, представим исходную систему в виде (2). Здесь

$$F_1(X_1,Y_1,p) = \begin{pmatrix} 0,5x_1 + 0,2x_2 - 90y_1 + 0,2y_2 - 0,15\cos(p(x_1+y_1)) + 0,15 \\ 0,1x_1 + 0,35x_2 + 0,1y_1 - 90,15y_2 + \arctan(0,15(x_2+y_2)) + 20p^3 \end{pmatrix},$$

$$f_1(x,y,p) = $$

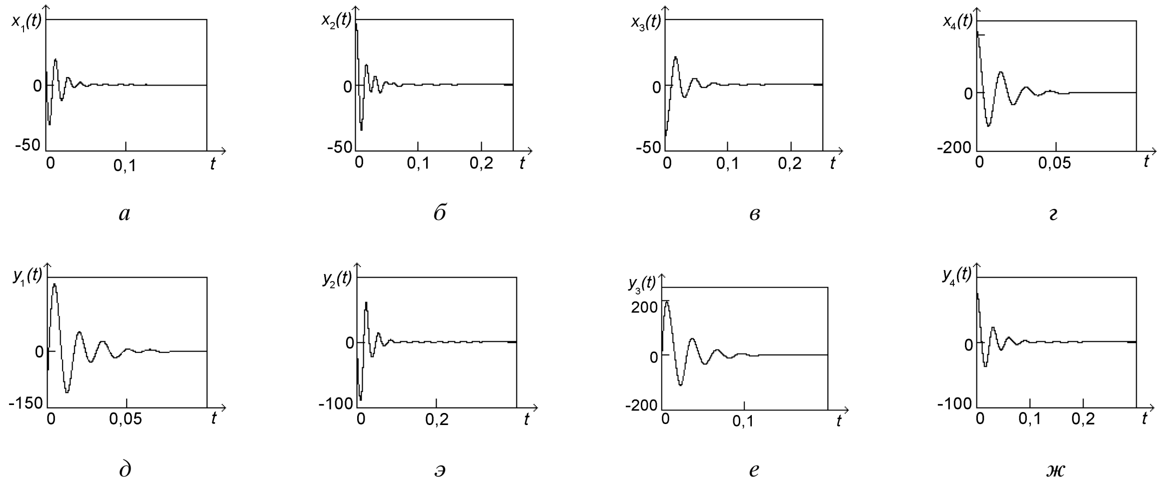
$$= \begin{pmatrix} 0,1x_3 - 0,3x_4 - 1,2y_3 + 0,6y_4 + 0,15p^2\ln(x_3+\sqrt{x_3^2+1})(y_3+\sqrt{y_3^2+1}) \\ 0,4x_3 + 0,5x_4 + 0,4y_3 - 0,25y_4 - 0,15\cos(px_4) + \arctan(0,15y_4) + 0,15\cos(p) \end{pmatrix},$$

$$G_1(X_1,Y_1,p) = $$

$$= \begin{pmatrix} 29,85x_1 - x_2 - 2y_1 + 0,2y_2 + \arctan(0,15(x_1+p)) \\ x_1 + 30x_2 - 0,3y_1 - 2y_2 - 0,15\cos(x_2) + 0,15(1-e^{-p^2})\ln(y_2+\sqrt{x_2^2+1}) + 0,15 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x,y,p) = \begin{pmatrix} 2x_3 + 0,3x_4 + 0,6y_3 + 0,1y_4 - 0,15\cos(x_3+y_3) + 0,15e^p \\ 0,1x_3 - x_4 + y_4 - 0,15p\cos(x_4+y_4) \end{pmatrix},$$

$$F_2(X_2,Y_2,p) = \begin{pmatrix} x_3 + 0,5x_4 - 60y_3 + 0,15\sin^2(p)\ln\dfrac{x_3+\sqrt{x_3^2+1}}{y_3+\sqrt{y_3^2+1}} \\ 0,85x_4 + 0,2y_3 - 60,15y_4 + \arctan(0,15(x_4+y_4)) + \ln(p^2+1) \end{pmatrix},$$



$$f_2(x,y,p) = \begin{pmatrix} x_1 + 0,5x_2 + 0,85y_1 - 0,1y_2 + 0,15p^4 \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2+1}) + \arctan(0,15y_1) \\ -0,8x_1 - 0,65x_2 - 0,4y_1 + 0,85y_2 + \arctan(0,15(x_2+y_2)) + 5p^2 \end{pmatrix},$$

$$G_2(X_2,Y_2,p) = \begin{pmatrix} 20x_3 + 0,2x_4 - 2,15y_3 + 0,1y_4 + \arctan(0,15y_3 + 1 - \pi^p)) \\ 0,3x_3 + 20x_4 + 0,1y_3 - 2y_4 - 0,15\sin(p)\cos(x_4) \end{pmatrix},$$

$$g_2(x,y,p) = \begin{pmatrix} 0,3x_1 + 0,2x_2 + y_1 + y_2 + 0,15\dfrac{p^2}{1+p^2}\ln(x_1 + \sqrt{x_1^2+1})(y_1 + \sqrt{y_1^2+1}) \\ -x_1 - 0,7x_2 + y_1 - y^2 - 0,15\cos(x_2+y_2) + 0,15(p^{15}+1) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система имеет при $p^* = 0$ состояние равновесия $x^* = 0$, $y^* = 0$, для производных функций, входящих в ее состав, выполняются пп. 2, 3 предположения 1, где $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = \delta_i = 0,15$, $\alpha_{ii} = \beta_{ii} = \gamma_{ii} = \delta_{ii} = 0$, $i = 1,2$, $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \gamma_{ij} = \delta_{ij} = 0,15$, $i,j = 1,2$, $i \neq j$, $P = [-1,1]$ и матрица $A(x^*,y^*,p^*)$ невырождена. То есть все условия предположения 1 справедливы. Построим матричнозначные функции вида (8) для подсистем, где $P_{11} = P_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{12} = P_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P_{13} = P_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и определим верхние оценки для величин малых параметров: $\mu_1 = \mu_2 = 3$, т. е. можно рассматривать $\mu_1 \in (0,1]$ и $\mu_2 \in (0,1]$. Для исследуемой системы выполняется соотношение (7) и матрица (15) устойчива для всех $\mu_1 \in (0,0,02]$, $\mu_2 \in (0,0,03]$. Значит, согласно теореме 1, исследуемая система абсолютно параметрически устойчива относительно области $P = [-1,1]$. На рисунке представлены графики, которые иллюстрируют поведение решений системы при $p = 0,9$, $\mu_1 = 0,015$, $\mu_2 = 0,025$ и начальных значениях переменных $x_0^T = (10,\ 45,\ -39,\ 75)$, $y_0^T = (210,\ -50,\ -25,\ 15)$.

5. Заключительные замечания. В работе рассмотрена неточная крупномасштабная сингулярно возмущенная система дифференциальных уравнений общего вида. Исходная система интерпретируется в виде взаимосвязи подсистем, для каждой из которых на основании результатов работы [1] построена функция Ляпунова. С помощью скалярной функции Ляпунова, образованой суммированием таковых для каждой независимой подсистемы, получены достаточные условия абсолютной параметрической устойчивости исходной системы дифференциальных уравнений. Применение предложенного подхода проиллюстрировано на примере неточной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений восьмого порядка со скалярным параметром.

Отметим, что в иллюстративном примере линейное приближение „медленных” подсистем для каждой подсистемы исходной системы неустойчиво и применить для исследования устойчивости всей системы векторную функцию не удается. Однако использование матричнозначной функции и предложенного в работе подхода позволяет сделать вывод о глобальной асимптотической устойчивости системы и определить множество значений параметров p и μ_i, $i = \overline{1, r}$, при которых такая устойчивость сохраняется.

1. *Хорошун А. С.* Об абсолютной параметрической устойчивости сингулярно возмущенных систем // Докл. НАН Украины. — 2013. — № 4. — С. 53 – 58.
2. *Martynyuk A. A.* Stability by Lyapunov's matrix function method with applications. — New York: Marcel Dekker, 1998. — 276 p.
3. *Martynyuk A. A.* Uniform asymptotic stability of a singularly perturbed system via the Lyapunov matrix-function // Nonlinear Anal. — 1987. — № 11. — P. 1 – 4.
4. *Martynyuk A. A., Miladzhanov V. G.* Stability investigation of autonomous singularly perturbed systems on the basis of matrix Lyapunov function // Дифференц. уравнения. — 1988. — № 24. — P. 416 – 424.
5. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 223 с.

Получено 11.01.13,
после доработки — 01.11.13