

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА, СТАВКИ ПРОЦЕНТА И УРОВНЯ ЦЕН

Г. С. Осипенко

Севастоп. ин-т банк. дела
Украина, 99057, Севастополь, ул. Парковая, 6
e-mail: george.osipenko@mail.ru

We study the dynamics of a macroscopic system consisting of the interacting national income, the interest rate, and the price level. Such a dynamics can be described by a discrete system in a three-dimensional space. In the paper, we study this system and show that there is a curve consisting of fixed points that give equilibriums on the market of money, commodities, and services. We prove that there exists a foliation transversal to the curve such that each leaf is an integral manifold for the system. Transversely to the leaves, the dynamics changes from an equilibrium state to chaos. The paper contains theoretical results and numerical experiments. We also consider perturbation of the system with small random uncontrolled perturbations that naturally model the environmental influence on the system.

Досліджується динаміка макроекономічної системи, в якій взаємодіють національний дохід, ставка відсотка і рівень цін. Така динаміка може описуватися дискретною системою в тривимірному просторі. Наведено результати дослідження даної системи. Показано, що система має криву, заповнену нерухомими точками, які описують рівноваги на ринку грошей, товарів та послуг. Доведено існування шарування, трансверсального до даної кривої, кожен шар якого є інваріантним для системи. Від шару до шару відбувається біфуркація динаміки системи від стійкого стану рівноваги до хаосу. Наведено теоретичні результати і чисельні експерименти. Розглянуто збурення системи малими випадковими неконтрольованими збуреннями, які природно моделюють вплив зовнішнього середовища на систему.

1. Введение. Рассмотрим динамику макроэкономической системы „национальный доход — ставка процента — уровень цен”. Такая динамика описывается „IS-LM”-моделью, которая является базовой для описания современной рыночной экономики [2, 5, 8]. Для моделирования макроэкономической динамики мы будем использовать дискретную динамическую систему

$$u_{n+1} = F(u_n), \quad (1)$$

в которой u_n описывает состояние экономики во время $t = n$, $n \in \mathbb{Z}$. В монографии [1, с. 283] представлена дискретная динамическая система вида (1), которая моделирует взаимодействие описанных выше параметров экономической системы. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp(a(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)), \\ y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)), \end{aligned} \quad (2)$$

где $x = P/P_e$, P — уровень цен, P_e — равновесное значение уровня цен, $y = (r_e/r)^s$, r — ставка процента, r_e — равновесное значение ставки процента, $z = Y/Y_e$, Y — национальный доход, Y_e — равновесное значение национального дохода. Все переменные являются безразмерными положительными величинами, а их изменение отражает отклонение от равновесного состояния. Параметры a, b, c, m, s , $0 < s < 1$, являются положительными. Можно сказать, что переменная x пропорциональна уровню цен, переменная z — национальному доходу и переменная y обратно пропорциональна s -й степени ставки процента. В монографии [1, с. 285] представлены численные эксперименты и показано наличие периодических орбит.

Целью настоящей работы является детальное исследование данной дискретной системы и описание качественной картины глобальной динамики. Представленное исследование имеет сугубо математический характер. Получены общие теоретические результаты и проведены численные расчеты для конкретных параметров системы. Сначала мы исследуем простой случай $m = 0$. Равенство $m = 0$ означает, что спрос не зависит от ставки процента. Показано, что система имеет кривую K , заполненную неподвижными точками. Трансверсально кривой K лежит слоение с инвариантными слоями. Это слоение задается как поверхности уровня функции $U = \frac{x^b}{y^a}$, т. е. поверхность имеет вид

$$W = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^b}{y^a} = \text{const} \right\}.$$

От слоя к слою происходит бифуркация топологической структуры орбит системы. При этом имеются слои с устойчивым состоянием равновесия, но есть слои, где почти любая орбита, начинающаяся вблизи неподвижной точки, стремится к хаотическому режиму. В пункте 4 показано, что подобная топологическая структура существует при любом $m > 0$. Более того, доказано, что система (2) для произвольного $m \geq 0$ топологически эквивалентна системе с $m = 0$ и измененным параметром a .

Воздействие внешней среды. Внешняя среда, в которой развивается макроэкономика, влияет на систему. Внешнее воздействие можно рассматривать как неконтролируемое возмущение. Для моделирования внешних воздействий будем предполагать, что возмущение случайно зависит от времени n , является малым и добавляется к отображению в целом. Таким образом, получаем уравнения вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp(a(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) + \varepsilon q_1(n), \\ y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) + \varepsilon q_2(n), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)) + \varepsilon q_3(n), \end{aligned} \quad (3)$$

где ε — малое положительное число, $q_i(n)$ принимает случайные значения на отрезке $[-1, 1]$ и хаотически зависит от времени n . Для моделирования возмущения $q_i(n)$ используем зависимость

$$q(n+1) = 1 - 2q^2(n), \quad q \in [-1, 1],$$

где начальное значение $q(0)$ задается для каждого $i = 1, 2, 3$. Известно [3, с. 115; 13, с. 60], что для почти каждого (по мере Лебега) начального данного $q(0)$ орбита $\{q_n\}$ является

хаотической и распределена на отрезке $[-1, 1]$ с плотностью

$$\rho = \frac{1}{\pi(1-x^2)^{1/2}}.$$

Компьютерное обеспечение. Численные расчеты проводились согласно алгоритмам, разработанным и обоснованным автором [4, с. 204; 11, с. 188]. Компьютерная программа для данных алгоритмов и визуализация реализованы выпускником Петербургского университета Михаилом Сеньковым.

2. Динамика вблизи неподвижных точек. Рассмотрим дискретную динамическую систему (2). Как указано выше, сначала исследуем случай $m = 0$, что несколько упрощает вычисления, но показывает суть динамики. Данное предположение будет действовать в этом и следующем пунктах. Состояние баланса определяется неподвижными точками системы (1), т. е. уравнением

$$F(u) = u.$$

Переходя к координатам (x, y, z) и к системе (2), получаем равенства $xy - 1 = 0$ и $y - z = 0$. Таким образом, неподвижные точки системы заполняют кривую $K = \{xy = 1, y = z\}$. Проекция K на (XY) -плоскость является гиперболой $xy = 1$, а проекция K на (YZ) -плоскость — прямой $y = z$. Топологический тип неподвижной точки $u^* \in K$ системы (1) определяется мультипликаторами или собственными числами дифференциала $DF(u^*)$. Инвариантность кривой K приводит к тому, что касательный вектор к K является собственным вектором дифференциала. Более того, так как отображение F на K является тождественным, то $\lambda = 1$ — собственное значение дифференциала $DF|_K$. На кривой K дифференциал правой части системы (2) имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & -ax^2 \\ -by^2 & 1 & -b \\ 0 & cz & 1-cz \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Мультипликаторы неподвижных точек определяются уравнением

$$\det(D - \lambda E) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda(2 - a - cy) + 1 - a + (b + a - 1)cy).$$

Ясно, что мультипликатор $\lambda = 1$ соответствует кривой неподвижных точек K . Остальные мультипликаторы λ_{12} определяются уравнением

$$\lambda^2 - \lambda(2 - a - cy) + 1 - a + (b + a - 1)cy = 0. \quad (5)$$

Отсюда имеем

$$\lambda_{12} = \frac{2 - a - cy \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

где дискриминант $\Delta = c^2y^2 - 2cy(a + 2b) + a^2$. Легко проверить, что $\lambda_{1,2} \neq 1$ при $y > 0$. Отсюда следует, что собственное подпространство для $\lambda_{1,2}$ является трансверсальным к

K . Если $|\lambda_{1,2}| < 1$, то дифференциал сжимает к K . При $|\lambda_{1,2}| > 1$ дифференциал растягивает от K . Если $|\lambda_1| < 1$ и $|\lambda_2| > 1$, то мы имеем гиперболическую динамику вблизи K . Дискриминант Δ будет отрицательным, когда y лежит между корнями y_1 и y_2 уравнения

$$c^2 y^2 - 2cy(a + 2b) + a^2 = 0, \quad (6)$$

где

$$y_{12} = \frac{a + 2b \pm 2\sqrt{b(a + b)}}{c}.$$

Например, для $a = 2,4$, $b = 0,87$, $c = 0,9$ имеем $y_1 = 0,852$, $y_2 = 7,51$. Следовательно, при $0,852 < y < 7,51$ мультипликаторы λ_{12} являются комплексными сопряженными. В этом случае свободный член уравнения (5) является квадратом модуля мультипликатора

$$1 - a + (b + a - 1)cy = \lambda_1 \lambda_2 = |\lambda|^2,$$

что дает возможность определить области устойчивости и неустойчивости неподвижных точек. Для $a = 2,4$, $b = 0,87$, $c = 0,9$ и $y = 0,852$ имеем $|\lambda|^2 = 0,3406$, т. е. в плоскости, трансверсальной к кривой неподвижных точек, мы имеем устойчивый фокус. Численные эксперименты показывают, что при $1 - a + (b + a - 1)cy = 1$ происходит бифуркация Неймарка–Саккера: состояние равновесия теряет устойчивость, и от него отделяется устойчивая инвариантная кривая, гомеоморфная окружности. Для $a = 2,4$, $b = 0,87$, $c = 0,9$ бифуркация имеет место при $y = 1,174743$. На кривой K между точками $0,852 < y < 1,174743$ расположены устойчивые состояния равновесия, а при $y > 1,174743$ состояния равновесия неустойчивы. Согласно теореме сведения Плисса [6, с. 1297; 7, с. 1139; 12, с. 939], вблизи кривой K над каждой неподвижной точкой лежит инвариантный диск, который является устойчивым многообразием W^s при $|\lambda| < 1$ ($0,852 < y < 1,174743$), либо неустойчивым многообразием W^u при $|\lambda| > 1$ ($1,174743 < y < 7,51$). На рис. 1, *a* показан инвариантный диск W^u для точки B ($0,851; 1,175; 1,175$). На W^u имеется неустойчивое состояние равновесия B и инвариантный устойчивый эллипс E . Орбиты начинаются в точке B при $n = -\infty$ и заканчиваются на S при $n = +\infty$.

На кривой K между точками $0,700 < y < 0,852$ расположены состояния равновесия с двумя отрицательными мультипликаторами, по модулю меньшими 1. При $0,685 < y < 0,700$ возникает гиперболический случай: один мультипликатор больше 1 по модулю, а другой меньше 1 по модулю. Вблизи $y = 0,685$ один мультипликатор становится равен 0. Это означает, что якобиан правой части системы (2) $\det D = 0$. При $y < 0,685$ один мультипликатор является положительным, а другой отрицательным. В этом случае дифференциал меняет ориентацию (на неустойчивом многообразии). Знак якобиана $\det D$ определяет, сохраняет ориентацию или нет динамическая система в данной точке. Следовательно, уравнение $\det D(x, y, z) = 0$ задает поверхность Π , на которой система меняет ориентацию. Таким образом, каждое состояние равновесия в плоскости, трансверсальной к K , может быть устойчивым, неустойчивым с комплексными мультипликаторами и гиперболическим. В последнем случае один мультипликатор отрицательный, а другой меняет знак на Π . На рис. 1, *б* показаны отрезки: $H = \{\text{гиперболические неподвижные точки}\}$; $S = \{\text{устойчивые неподвижные точки}\}$; $UC = \{\text{неустойчивые неподвижные точки с комплексными мультипликаторами}\}$.

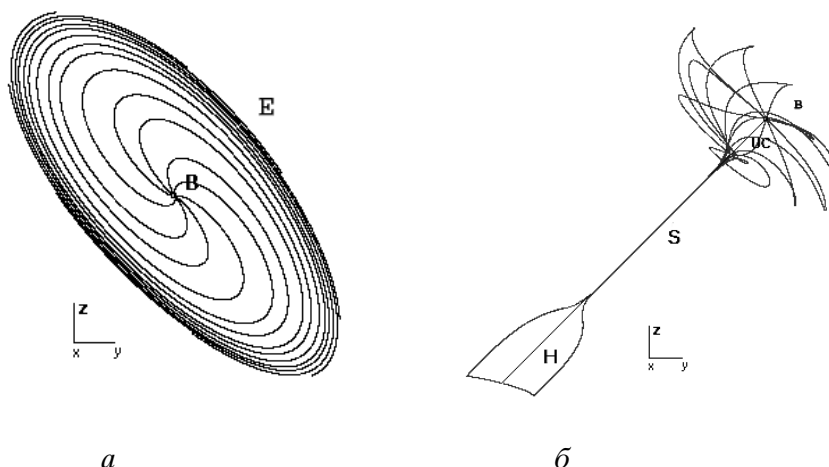


Рис. 1. Динамика вблизи кривой K неподвижных точек системы (2).

3. Слоение с инвариантными слоями. В этом пункте мы покажем, что существует функция $U(x, y, z)$, поверхности уровня которой $U(x, y, z) = \text{const}$ являются инвариантными для дискретной системы

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp(a(1 - x_n z_n)), \\ y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - x_n z_n)), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)). \end{aligned} \tag{7}$$

Функция $U(x, y, z)$ является аналогом интеграла для автономной системы дифференциальных уравнений. Для определения функции U заметим, что первое и второе уравнения системы (7) отличаются только значениями a и b . Если первое уравнение возвести в степень b , а второе — в степень a , то получим одно и то же выражение $\exp(ab(1 - x_n z_n))$. Это дает возможность построить функцию U .

Утверждение 1. *Поверхности уровня функции*

$$U = \frac{x^b}{y^a}$$

являются инвариантными для системы (7).

Доказательство. Поверхность уровня H задается уравнением $U(x, y, z) = \text{const}$. Инвариантность H означает, что если орбита системы (7) начинается на H , то она остается на H все время. Иначе говоря, значение функции U не меняется при итерации. Таким образом, чтобы показать инвариантность, необходимо проверить равенство

$$U(x_n, y_n, z_n) = U(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}).$$

Действительно,

$$U(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = \frac{x_{n+1}^b}{y_{n+1}^a} = \frac{x_n^b \exp(ba(1 - x_n z_n))}{y_n^a \exp(ab(1 - x_n z_n))} = \frac{x_n^b}{y_n^a} = U(x_n, y_n, z_n).$$

Утверждение доказано.

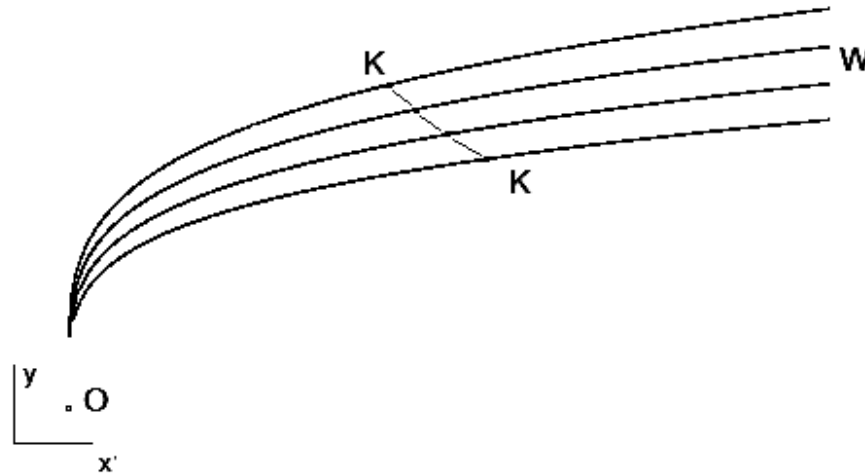


Рис. 2. Кривая неподвижных точек $K = \{(x, y, z) : xy = 1, y = z\}$ и инвариантные слои $W = \{(x, y, z) : x = hy^{a/b}, h = \text{const}\}$.

Каждая поверхность

$$W = \{(x, y, z) : x = hy^{a/b}\}, \quad h = \text{const},$$

трансверсальна кривой неподвижных точек K (рис. 2). Кроме того, как показано выше, вблизи K существуют инвариантные диски $W^{s,u}$. Вследствие инвариантности диски $W^{s,u}$ должны лежать в слоях W . Таким образом, инвариантное слоение, порожденное устойчивыми W^s и неустойчивыми W^u дисками, существует не только вблизи кривой K , но оно определено глобально. Поскольку переменная z явно не входит в функцию U , инвариантный слой $W = \{(x, y, z) : x = hy^{a/b}\}, h = \text{const}$, является линейчатой поверхностью с прямыми, параллельными Z -оси. Система на поверхности $W = \{(x, y, z) : x = hy^{a/b}\}$ задается в виде

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - hy_n^{a/b} z_n)), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)), \end{aligned} \quad (8)$$

где число $h > 0$ задает инвариантный слой. Так, $h = 1$ задает поверхность, проходящую через состояние равновесия $(1, 1, 1)$. Для произвольной поверхности $W(h)$ состояние равновесия определяется равенствами

$$xy = 1, \quad y = z, \quad x = hy^{a/b}.$$

Отсюда следует, что состояние равновесия имеет координаты

$$\left(h^{\frac{b}{a+b}}, h^{-\frac{b}{a+b}}, h^{-\frac{b}{a+b}} \right)$$

на каждом слое $W(h)$.

Исследуем, как меняется динамика системы в слоях $W(h) = \{(x, y, z) : x = hy^{a/b}\}$ в зависимости от значения h . Иначе говоря, рассмотрим бифуркации системы (8) при

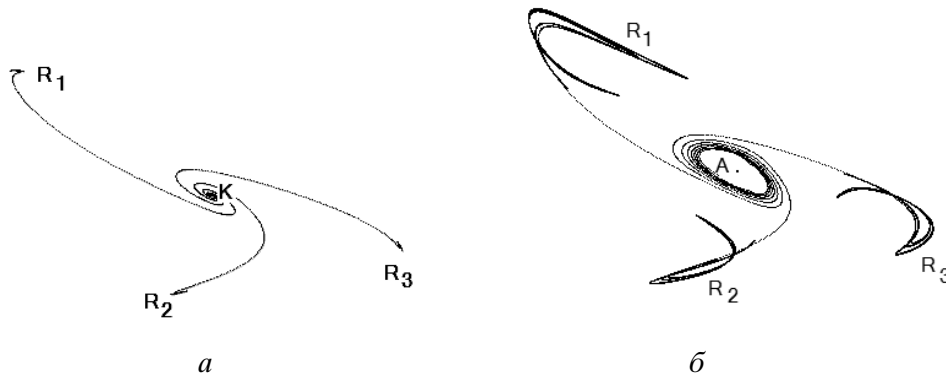


Рис. 3. Рождение устойчивого инвариантного эллипса при изменении h от 0,8 до 0,58.

изменении параметра h . На каждом слое $W(h)$ имеется точка $W(h) \cap K$, которая является неподвижной для системы (8). Если слой фиксирован, то будем обозначать неподвижную точку K^* . Рассмотрим систему (8) при $a = 2,4$, $b = 0,9$, $c = 0,9$. На слое $W(h = 1)$ имеется устойчивое состояние равновесия $K^*(1, 1)$ с комплексными мультипликаторами. При уменьшении значения h характер устойчивости начинает меняться. Так, на слое $W(h = 0,8)$ (см. рис. 3, *a*) имеется 3-периодическое инвариантное множество $R = \{R_1, R_2, R_3\}$, от которого орбиты уходят к устойчивому состоянию равновесия K^* . При изменении параметра h от 0,8 до 0,58 из устойчивого состояния равновесия рождается устойчивый инвариантный эллипс A , а состояние равновесия K^* теряет устойчивость, т. е. происходит бифуркация Неймарка – Саккера (см. рис. 3, *б*). При этом инвариантное множество R увеличивается в размере. При дальнейшем уменьшении параметра h на устойчивом эллипсе A рождается гиперболическая 3-периодическая орбита P (см. рис. 4, *a*). Когда h достигает значения 0,515970, неустойчивое многообразие $W^u(P_3)$ пересекается трансверсально с устойчивым многообразием $W^s(P_1)$ орбиты P (0,8037147; 1,33638665) (см. рис. 4, *б*). Построение этих многообразий и оценка трансверсальности проводились в соответствии с [4, с. 204; 11, с. 188]. Согласно теореме Смейла [9, с. 351], трансверсальное пересечение порождает хаос вблизи точек пересечения. При этом множество A теряет устойчивость и сливается с множеством R , образуя одно инвариантное множество Ω , которое является замыканием неустойчивого многообразия $W^u(P)$ орбиты P (см. рис. 4, *a*).

Отметим, что орбита, которая начинается вблизи состояния равновесия $K^*(1, 1977742; 1, 1977742)$, достигает множества Ω и затем блуждает на нем. На рис. 5, *a* представлена орбита точки $B(1, 2; 1, 2)$. Энтропия E системы на инвариантном множестве Ω была оценена как показатель (по основанию 2) роста длины кривой [10, с. 1331]. Получена оценка снизу $E = 0,69314$. Поскольку энтропия является мерой хаоса, мы можем утверждать, что на множестве Ω система допускает хаос. Это наглядно показывает орбита точки B на рис. 5, *a*.

Дальнейшее уменьшение параметра h приводит к усилению хаоса. Численные эксперименты показывают, что система (2) имеет слои, где хаос в аттракторах достигает громадных размеров. На рис. 5, *б* представлено хаотическое множество в слое $W(h = 0,3)$ в масштабе 1:10. Это множество является ω -предельным для любой орбиты, которая начинается вблизи неподвижной точки $K(1, 3886835; 1, 3886835)$.

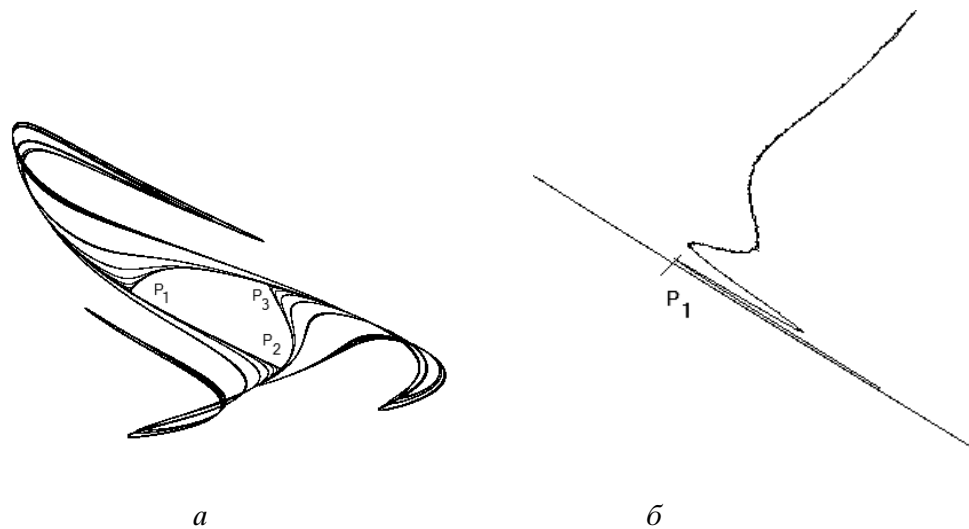


Рис. 4. Хаос на инвариантном слое $W(h = 0, 515970)$, замыкание неустойчивого многообразия $W^u(P)$. Пересечение неустойчивого и устойчивого многообразий 3-периодической точки P .

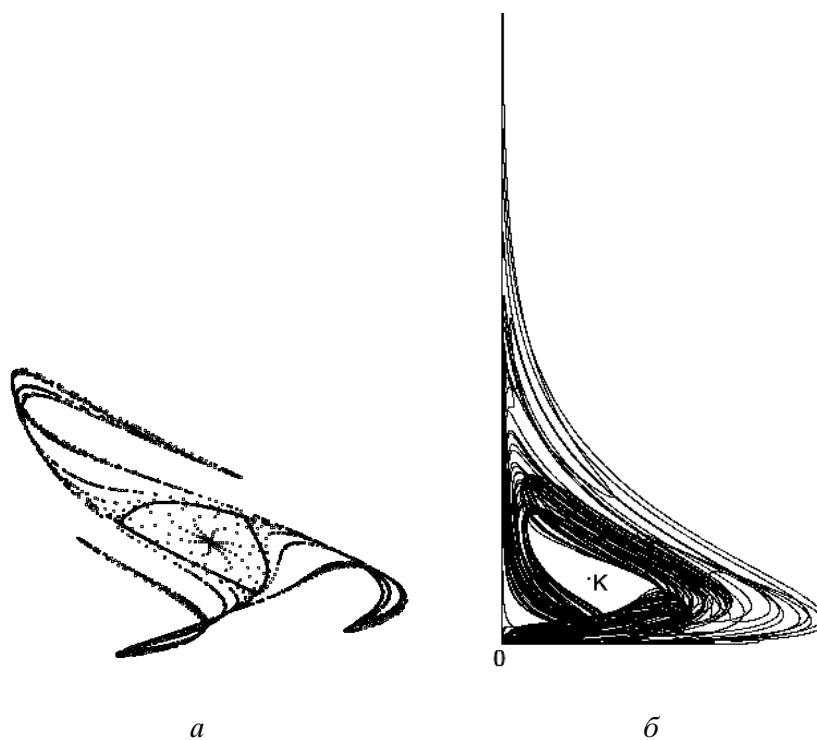


Рис. 5. Орбита точки $(1, 2; 1, 2)$ на инвариантном слое $W(h = 0, 515970)$. Хаос на слое $W(h = 0, 3)$ в масштабе 1:10.

Другая картина бифуркаций наблюдается при увеличении параметра h . Система (8) на слое $W(h)$, $h > 0,8$, имеет устойчивое состояние равновесия K вплоть до $h = 4,02787$. При этом мультипликаторы сначала являются комплексными, а затем становятся действительными. При $h = 4,02787$ состояние равновесия K теряет устойчивость и становится гиперболическим с одним мультипликатором, меньшим -1 . Система меняет ориентацию на одномерном неустойчивом многообразии $W^u(K)$ гиперболической точки K . Многообразие $W^u(K)$ заканчивается в 2-периодической устойчивой орбите A . При $h > 4,1$ 2-периодическая орбита A теряет устойчивость и происходит бифуркация удвоения периода. Описанная бифуркация удвоения периода, по-видимому, повторяется при достаточно больших h .

4. Исследование общего случая. Рассмотрим дискретную систему (2), в которой параметр m принимает положительные значения. Неподвижные точки системы определяются равенствами $1 = xy^{m/s}z$, $y = z$. Таким образом, кривая состояний равновесия имеет вид

$$K = \{(x, y, z) : xy^{m/s+1} = 1, y = z\}.$$

Нетрудно показать, что динамическая система с произвольным m имеет слоение с инвариантными слоями, как и для $m = 0$. Это слоение задается как поверхности уровня функции

$$U = \frac{x^b}{y^a}.$$

Каждая поверхность

$$W = \{(x, y, z) : x = hy^{a/b}\}, \quad h = \text{const},$$

является инвариантной для системы (2). Система на поверхности W задается в виде

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - hy_n^{a/b+m/s}z_n)), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)), \end{aligned} \quad (9)$$

где число $h > 0$ задает инвариантный слой. Таким образом, система (2) имеет слоение, как в случае $m = 0$, но динамика на слоях отличается от случая $m = 0$.

Рассмотрим различия, которые возникают при $m > 0$. Для определенности будем рассматривать систему (2) при $a = 2,45$, $b = 0,6$, $c = 0,9$, $m = 0,25$, $s = 0,5$. На рис. 6 показана динамика системы вблизи кривой состояний равновесия K . Каждой точке на кривой K соответствует инвариантный слой $W(h) = \{(x, y, z) : \frac{x^b}{y^a} = h\}$. Данные слои трансверсальны кривой K , при этом сами слои на рис. 6 не показаны, а показаны только периодические орбиты, устойчивые в слоях. Состояние равновесия $O(1, 1, 1)$ является гиперболическим. На рис. 6, а показано неустойчивое многообразие $W^u(O)$, которое заканчивается в 2-периодической устойчивой орбите. На $W^u(O)$ система меняет ориентацию при каждой итерации. В слоях, которые лежат ниже слоя точки O , возникают бифуркации удвоения периода, что хорошо видно на рис. 6, а. На рис. 6, б показана динамика в слоях выше слоя, проходящего через состояние равновесия $O(1, 1, 1)$. При увеличении y и z происходит бифуркация состояний равновесий (так же, как в случае $m = 0$). Сначала состояние равновесия становится устойчивым в слое. Это происходит в $W(h = 0,3083)$, где состояние равновесия имеет координаты $(1, 234603; 1, 234603)$.

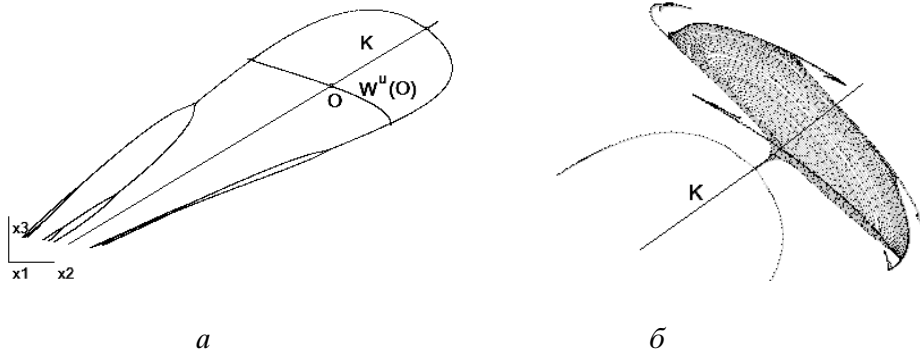


Рис. 6. Динамика вблизи кривой состояний равновесия K .

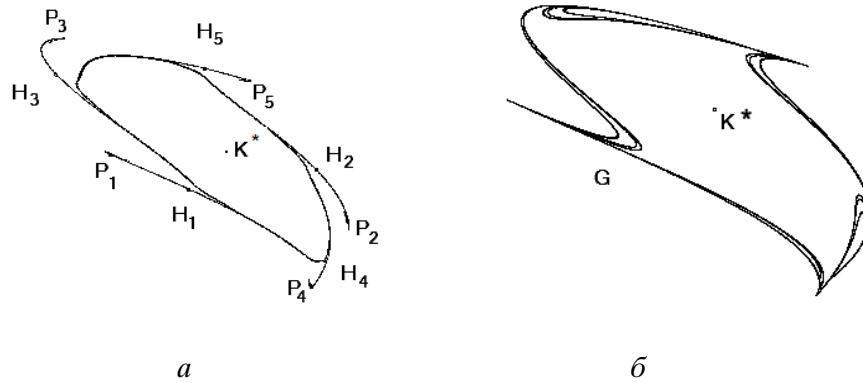


Рис. 7. Динамика вблизи инвариантного эллипса в слое $W(h = 0, 18)$.
Инвариантное множество G в слое $W(h = 0, 155)$.

Затем появляются комплексные мультипликаторы в $W(h = 0, 28)$. Наконец, состояние равновесия теряет устойчивость в $W(h = 0, 2311)$ и происходит бифуркация Неймарка – Саккера. На рис. 7, *a* показана динамика вблизи инвариантного устойчивого эллипса в слое $W(h = 0, 18)$. Здесь K^* (1, 359516; 1, 359516) — неустойчивое состояние равновесия, вблизи эллипса лежит 5-периодическая гиперболическая орбита H , H_1 имеет координаты (1, 289692; 1, 235095). Неустойчивое многообразие $W^u(H)$ стремится одним концом к устойчивому эллипсу, а другим — к устойчивой 5-периодической орбите P , P_1 имеет координаты (1, 156926; 1, 338456) (см. рис. 7, *a*). При этом орбита, начинающаяся вблизи точки K^* , заканчивается на эллипсе.

Дальнейшее уменьшение h приводит к бифуркации инвариантного эллипса к множеству G , которое изображено на рис. 7, *б* для слоя $W(h = 0, 155)$. Инвариантное множество G является предельным для любой орбиты, начинающейся вблизи точки K . Оценивая энтропию, как показатель роста длины кривой при итерации, можно показать хаотичность инвариантного множества G . При $h = 0, 15075$ предельное множество G любой орбиты, начинающейся вблизи точки K , принимает большие размеры, и динамика системы становится аналогичной изображенной на рис. 5, *б*.

5. Эквивалентность систем с $m \geq 0$ и $m = 0$. Сравнивая динамику общего случая $m \geq 0$ и частного случая $m = 0$, можно заметить некоторую аналогию. Действительно, имеет место топологическая эквивалентность этих систем, однако для этого параметр a должен быть изменен.

Утверждение 2. *Отображение F вида*

$$\begin{aligned} X &= xy^{m/s}, \\ Y &= y, \\ Z &= z \end{aligned} \tag{10}$$

переводит дискретную систему

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp(a(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)), \\ y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)) \end{aligned} \tag{11}$$

в систему вида

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n \exp(d(1 - X_n Z_n)), \\ Y_{n+1} &= Y_n \exp(b(1 - X_n Z_n)), \\ Z_{n+1} &= Z_n \exp(c(Y_n - Z_n)), \end{aligned} \tag{12}$$

где $d = a + \frac{bm}{s}$.

Доказательство. Требуется показать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (x_n, y_n, z_n) & \longrightarrow & (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \\ F \downarrow & & F \downarrow \\ (X_n, Y_n, Z_n) & \longrightarrow & (X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1}) \end{array}$$

или равенств

$$\begin{aligned} X_{n+1}(F(x_n, y_n, z_n)) &= F_x(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}), \\ Y_{n+1}(F(x_n, y_n, z_n)) &= F_y(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}), \\ Z_{n+1}(F(x_n, y_n, z_n)) &= F_z(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}). \end{aligned} \tag{13}$$

Для первого уравнения имеем

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n \exp(d(1 - X_n Z_n)) = x_n y_n^{m/s} \exp((a + bm/s)(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) = \\ &= x_n \exp(a(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) y_n^{m/s} \exp((bm/s)(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) = x_{n+1} y_{n+1}^{m/s}, \end{aligned}$$

для второго уравнения

$$Y_{n+1} = Y_n \exp(b(1 - X_n Z_n)) = y_n \exp(b(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) = y_{n+1}.$$

Последнее уравнение тривиально, так как отображение F тождественно по y и z .

Утверждение доказано.

Замечание. Отображение F является диффеоморфизмом в области $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$, где заданы системы (11) и (12).

Таким образом, системы (11) и (12) диффеоморфны. При этом система (11) для $a = 2,45, b = 0,6, c = 0,9, m = 0,25, s = 0,5$ эквивалентна системе (12), где $d = 2,75, b = 0,6, c = 0,9$.

Система (11) имеет слоение с инвариантными слоями вида

$$W(h) = \left\{ (x, y, z) : h = \frac{x^b}{y^a} \right\},$$

а система (12) — слоение с инвариантными слоями вида

$$W(H) = \left\{ (X, Y, Z) : H = \frac{X^b}{Y^d} \right\}.$$

Можно показать, что отображение F переводит слой $W(h)$ в слой $W(H)$, при этом системы на этих слоях совпадают.

Учитывая, что $x = P/P_e, y = (r_e/r)^s, P$ — уровень цен, r — ставка процента, введенная координата

$$X = P/P_e((r_e/r)^s)^{m/s} = \frac{P/r^m}{r_e^m/P_e},$$

т. е. с экономической точки зрения координата X пропорциональна уровню цен и обратно пропорциональна m -й степени ставки процента.

6. Неконтролируемое возмущение системы. Обычно экономическая система подвергается возмущениям, которые являются неконтролируемыми и случайными. В этом пункте мы исследуем динамику возмущенной системы вида (3), где ε — малое положительное число,

$$q_i(n+1) = 1 - 2q_i^2(n), \quad (14)$$

начальные значения $q_i(0) \in [-1, 1]$ задаются для каждого $i = 1, 2, 3$ случайным образом. Таким образом, исследуется 6-мерная система, состоящая из уравнений системы (3) и уравнений (14), $i = 1, 2, 3$. Следует ожидать, что описанные возмущения не сохраняют инвариантное слоение. Однако в каждом инвариантном слое невозмущенной системы существуют аттракторы с некоторой областью притяжения, которые должны сохраняться при малых возмущениях. Результаты, описанные выше, показывают, что аттракторы формируются из устойчивых состояний равновесия кривой K , а при потере устойчивости этих состояний равновесия рождаются аттракторы, которые меняются непрерывно от слоя к слою. Послойное объединение таких аттракторов создает множество, которое при возмущении не исчезает. Это хорошо видно на рис. 8, а, где изображена орбита точки $(1, 1, 1)$ возмущенной системы (3) для параметров $a = 2,45, b = 0,6, c = 0,9$,



Рис. 8. Орбита точки $(1, 1, 1)$ возмущенной системы (3) с $\varepsilon = 0, 01$.
Орбита точки $(1, 1, 1)$ системы (15) с $\varepsilon_1 = 0, 01, \varepsilon_{2,3} = 0$.

$m = 0$ с величиной хаотического возмущения $\varepsilon = 0, 01$. Следует отметить, что хаотическое возмущение заставляет орбиту двигаться вверх и вниз вблизи аттракторов невозмущенной системы. При этом возмущение может не только перевести орбиту в хаотическую область (см. верхнюю часть рис. 8, а), но и вернуть ее из этой области.

С экономической точки зрения существуют возмущения, которые мы можем свести к нулю или сделать незначительными, а есть возмущения, которые мы не можем существенно уменьшить. Например, центральный банк может контролировать ставку процента и не допускать хаотических возмущений. Но мы не можем избавиться от хаотических возмущений уровня цен. Таким образом, желательно выяснить, какие возмущения существенно влияют на динамику системы, а какие нет. Для этого рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp(a(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) + \varepsilon_1 q_1(n), \\ y_{n+1} &= y_n \exp(b(1 - x_n y_n^{m/s} z_n)) + \varepsilon_2 q_2(n), \\ z_{n+1} &= z_n \exp(c(y_n - z_n)) + \varepsilon_3 q_3(n), \end{aligned} \tag{15}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 различны, а q_i удовлетворяют системе (14). Отметим, что возмущение последнего уравнения сохраняет инвариантные слои, так как каждый слой является линейчатой поверхностью, параллельной оси Z . Таким образом, возмущение вида $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_3 \neq 0$ сохраняет слои невозмущенной системы и возмущает систему в слое. Это означает, что возмущение национального дохода (производства) существенно не меняет динамику вблизи аттракторов на слоях.

Слабый контроль уровня цен приводит к возмущению первого уравнения. На рис. 8, б показана орбита точки $(1, 1, 1)$ системы (15) с $\varepsilon_1 = 0, 01, \varepsilon_{2,3} = 0$. Из результатов численного расчета следует, что возмущение уровня цен приводит к бифуркациям y и z . Возрастание y означает уменьшение ставки процента. Следует отметить, что наиболее силь-

ные бифуркации к хаосу наблюдаются при слабом контроле ставки процента. Численные эксперименты для системы (15) с $\varepsilon_2 = 0,01$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$, показывают, что поведение решений такой системы практически не отличается от возмущенной системы общего типа (3) с $\varepsilon = 0,01$ (см. рис. 8, а). Малые возмущения общего вида приводят к тому, что орбита начинает смещаться вдоль состояний равновесия и попадает сначала в неустойчивое состояние равновесия, а затем в слой, где наблюдается хаос. Величина хаоса может как увеличиваться, так и уменьшаться при возмущении.

7. Заключение. Проведено исследование дискретной макроэкономической модели (2). Показано, что эта система C^1 -эквивалентна системе (2) с $m = 0$. Она имеет кривую, заполненную состояниями равновесия, а трансверсально к этой кривой лежат инвариантные поверхности уровня функции $U = \frac{x^b}{y^a}$, которые образуют слоение. Можно считать, что состояния равновесия являются центром каждой инвариантной поверхности. На каждом слое имеется аттрактор, к которому стремятся почти все орбиты. Данный аттрактор может быть состоянием равновесия или иметь достаточно сложное (хаотическое) строение. При изменении поверхности уровня происходит бифуркация динамики системы от устойчивого состояния равновесия к хаосу. Отметим, что хаос в данной макроэкономической модели является внутренним свойством системы. При этом хаос не всегда порождает экономический кризис. В данном случае хаос — это невозможность долгосрочного прогнозирования. Численные результаты показывают, что имеются слои, где хаос достигает громадных размеров, тогда происходит разбалансировка экономической системы и наступает кризис.

Малое внешнее возмущение может разрушить описанную топологическую структуру орбит системы. Численные эксперименты и экономическая практика показывают, что не все возмущения одинаково влияют на динамику системы. Так, возмущение национального дохода (z) не меняет инвариантного слоения, возмущение уровня цен (x) приводит к слабому изменению динамики, сохраняя аттракторы слоев. Существенное влияние на динамику системы оказывает возмущение процентной ставки. Малые возмущения приводят к тому, что орбита начинает смещаться вдоль состояний равновесия и попадает сначала в неустойчивое состояние равновесия, а затем в слой, где наблюдается хаос, величина которого может увеличиваться, достигая значительных размеров.

1. Лебедев В. В., Лебедев К. В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов. — М.: ООО „Тест“, 2011. — 336 с.
2. Макконнелл К. Р., Брю С. Л. Экономикс. — М.: ИНФРА-М, 1992. — 983 с.
3. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 336 с.
4. Осипенко Г. С., Ампилова Н. Б. Введение в символический анализ динамических систем. — С.-Петербург: С.-Петербург. ун-т, 2005. — 240 с.
5. Пезенни А. Очерки политической экономии капитализма. — М.: Прогресс, 1976. — 843 с.
6. Плисс В. А. Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР Сер. мат. — 1964. — **28**, № 6. — С. 1297–1324.
7. Плисс В. А. К теории инвариантных поверхностей // Дифференц. уравнения. — 1966. — **2**, № 9. — С. 1139–1150.
8. Столерю Л. Равновесие и экономический рост. — М.: Статистика, 1974. — 302 с.
9. Коток Б. А., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем. — М.: МЦНМО, 2005. — 464 с.

10. *Newhouse S., Pignataro T.* On the estimation of topological entropy // *J. Statist. Phys.* — 1993. — № 72. — P. 1331–1351.
11. *Osipenko G.* Dynamical systems, graphs, and algorithms // *Lect. Notes Math.* — 2007. — № 1889. — 283 p.
12. *Osipenko G.* Center manifold // *Encycl. Complex. and Systems Sci.* / Ed. Robert A. Meyers. — New York; Berlin: Springer, 2009. — P. 936–951.
13. *Schuster H. G., Just W.* Deterministic chaos. — Weinheim: WILEY-VCH, 2005. — 287 p.
14. *Takens F.* Detecting strange attractor in turbulence // *Lect. Notes Math.* — 1981. — № 898. — P. 89–94.

Получено 27.09.13