УДК 517.9:532

О РАВНОВЕСИИ И УСТОЙЧИВОСТИ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ С НЕСВЯЗНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ОТКРЫТОМ СОСУДЕ

Н. Д. Копачевский

Тавр. нац. ун-т им. В. И. Вернадского
Украина, 95007, Симферополь, пр. Вернадского, 4
e-mail: kopachevsky@list.ru

З. З. Ситшаева

Крым. инж.-пед. ун-т
Украина, 95015, Симферополь, пер. Учебный, 8
e-mail: szz2008@mail.ru

The paper deals with a problem on stability of an equilibrium of an ideal fluid in a cylindrical container with a hole in the bottom. Gravity and capillary forces are included in the model. A spectral condition on stability of an equilibrium state of the fluid is obtained. We prove that stability of the equilibrium is lost if the upper part of the free surface undergoes translational perturbations. We propose algorithms for calculating the free surface of the fluid, and the boundary of the domain of stability.

Розглянуто задачу про стійкість рівноважного стану ідеальної рідини, що знаходиться в циліндричному контейнері з отвором у днищі, з урахуванням гравітаційних і капілярних сил. Отримано спектральну ознаку стійкості рівноважного стану рідини. Доведено, що стійкість рівноважного стану втрачається на зсувних збуреннях верхньої вільної поверхні. Наведено алгоритми обчислення вільної поверхні рідини та межі області її стійкості.

Введение. Задачи о поведении жидкости в условиях, близких к невесомости, стали особенно актуальными в середине XX века в связи с развитием космической техники. Исследования указанных задач отражены в ряде монографий (см., например, [1–3]), а также многочисленных статьях. Появилось новое направление исследований, которое сейчас называют гидромеханикой невесомости.

Важное значение в этой области имеют задачи статики и устойчивости капиллярной жидкости, частично заполняющей произвольный сосуд. После монографии [3] появилось достаточно много работ, расширяющих и дополняющих предыдущие исследования. Так, в [4, 5] изучались задачи устойчивости с двусвязной свободной поверхностью, в [6, 7], а также в ряде других работ этих авторов — задачи виброустойчивости жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости.

1. О статическом состоянии гидросистемы. ***1.1. Постановка задачи о нахождении равновесной формы свободной поверхности.*** Рассмотрим цилиндрический сосуд с произвольным поперечным сечением Γ и образующими, направленными вертикально вверх. В днище сосуда имеется круговое отверстие радиуса r_0. Будем считать, что сосуд частично заполнен идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ и общим объемом V. На данную гидросистему действует однородное гравитационное поле, направленное вертикально вниз и имеющее ускорение $\vec{g}$. Полагаем также, что система находится в условиях, близких к невесомости, когда следует учитывать действие капиллярных (поверхностных) сил (см. [1–3]).

Будем считать, что в состоянии равновесия жидкость занимает область $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$, где $\Omega_0 = \Gamma \times (0,h)$, $0 < h < h_0 := V/|\Gamma|$ — подобласть, соответствующая части жидкости внутри сосуда, а Ω_1 — подобласть, соответствующая капле, вышедшей из отверстия и свисающей с днища сосуда. Обозначим верхнюю свободную поверхность жидкости через Γ_0 и будем считать, что угол смачивания δ на границе контакта поверхности Γ_0 с твердой стенкой S сосуда является прямым, т. е. $\delta = \pi/2$. Тогда поверхность Γ_0 будет горизонтальной и $|\Gamma_0| = |\Gamma|$. Свободную поверхность капли обозначим через Γ_1, она подлежит определению в процессе решения задачи статики.

Введем декартову систему координат $Oxyz$ с центром O, расположенным на днище сосуда. Тогда имеем $\vec{g} = -g\vec{k}$, где g — величина ускорения гравитационного поля, а $\vec{k}$ — орт оси Oz. Считаем также для простоты, что внешнее постоянное давление p_a равно нулю.

Тогда давление P_0 в жидкости в состоянии покоя определяется по формуле

$$P_0 = P_0(z) = \rho g(h-z), \quad P_0(h) = 0, \tag{1.1}$$

где h — высота столба жидкости в сосуде. В самом деле, на поверхности Γ_0 должно выполняться условие Лапласа для перепада давлений, учитывающее действие капиллярных сил:

$$P_0|_{\Gamma_0} - p_a = -\sigma(k_1+k_2)_{\Gamma_0}, \tag{1.2}$$

где $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения, а k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности Γ_0, которые для плоской поверхности Γ_0 равны нулю. Поскольку $p_a = 0$, то $P_0|_{\Gamma_0} = P_0(h) = 0$, в то время как в гравитационном поле

$$P_0 = P_0(z) = -\rho g z + \mathrm{const}.$$

Отсюда и следует формула (1.1).

Что касается условия Лапласа на свободной поверхности капли, то оно по аналогии с (1.2) и с учетом знаков кривизн (см. [3, с. 30]) принимает вид

$$-P_0|_{\Gamma_1} = -\sigma(k_1+k_2)_{\Gamma_1},$$

что в силу (1.1) приводит к соотношению

$$k_1+k_2 = b(z-h) \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad b := \rho g \sigma^{-1}, \tag{1.3}$$

которое по существу является дифференциальным уравнением в частных производных для нахождения уравнения неизвестной поверхности Γ_1.

Введем характеристический размер l сосуда и перейдем в (1.3) к безразмерным переменным, обозначив их прежними символами. Тогда получим уравнение

$$(k_1+k_2) = b_0(z-h), \quad b_0 := \rho g l^2 \sigma^{-1}, \tag{1.4}$$

где b_0 — число Бонда — безразмерный параметр, характеризующий отношение гравитационных сил к капиллярным. В частности, при $g = 0$ имеем полную невесомость, а при $g < 0$ (т. е. при направлении гравитационного поля $\vec{g}$ не сверху вниз, а снизу вверх) — $b_0 < 0$.

Отметим, что в безразмерных переменных рассматриваемая задача статики имеет три заданных безразмерных параметра: максимальную высоту $h_0 = V/(|\Gamma|l)$ столба, соответствующую всему объему V жидкости, помещенной в цилиндр, радиус r_0 отверстия в днище, а также число Бонда b_0.

1.2. Осесимметричный и плоский случаи. Приведем теперь постановку задачи статики в частном случае осесимметричной задачи, а также в более простой двумерной ситуации (см. пп. 1.2.3, 1.2.4 в [3]).

Будем считать, что цилиндр имеет круговое поперечное сечение радиуса R, который примем за характерный размер ($l = R$), а ось Oz является его осью симметрии. Считаем также, что точка O является центром кругового отверстия в днище. Тогда поверхность Γ_1 капли и вся задача в целом будут осесимметричными.

Пусть функции

$$r = r(s), \quad z = z(s), \quad 0 \le s \le s_0,$$

задают в параметрической форме уравнение образующей равновесной поверхности Γ_1, где в качестве параметра s выбрана длина дуги вдоль кривой, отсчитываемая от оси симметрии. Тогда имеем

$$(r'(s))^2 + (z'(s))^2 \equiv 1, \quad r'r'' + z'z'' \equiv 0, \quad (') := d/ds. \tag{1.5}$$

Использовав выражение для $k_1 + k_2$ в этом случае (см., например, [3, с. 31]), имеющее вид

$$k_1 + k_2 = -(rr')^{-1}(rz')',$$

преобразуем уравнение (1.4) к виду

$$\frac{1}{rr'}\,(rz')' = -b_0(z - h),$$

а затем, с учетом (1.5), к задаче Коши для системы обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений, учитывающих очевидные начальные условия:

$$z'' = -r'(b_0(z - h) + z'/r), \quad z(0) = z_0 < 0, \quad z'(0) = 0, \tag{1.6}$$

$$r'' = z'(b_0(z - h) + z'/r), \quad r(0) = 0, \quad r'(0) = 1. \tag{1.7}$$

Задача (1.6), (1.7) содержит два неизвестных параметра: h и z_0. Их следует подобрать (при заданном b_0) таким образом, чтобы были выполнены краевые соотношения

$$z(s_0) = 0, \quad r(s_0) = r_0, \quad 0 < r_0 < 1,$$

а также условие на величину объема капли:

$$\pi \int\limits_0^{s_0} [r(s)]^2 dz(s) = \triangle V := |\Gamma|(h_0 - h), \tag{1.8}$$

где $|\Gamma|$ и $h_0 - h$ безразмерны.

Будем рассматривать наряду с задачей (1.6) – (1.8) плоскую задачу о равновесии в канале (см. [3], пп. 1.2.4, 1.10.2), когда жидкость находится в плоской кювете малой протяженности вдоль оси Oy. Можно считать, что задача о равновесии является двумерной и рассматривается в плоскости Oxz.

В этом случае вместо равновесной поверхности Γ_0 будем иметь горизонтальную прямую, а вместо осесимметричной поверхности Γ_1 — кривую Γ_1, симметричную относительно оси Oz. Выберем в качестве характерного размера l полуширину канала и будем считать, что уравнение правой полудуги Γ_1 задается в параметрической форме функциями

$$x = x(s), \quad z = z(s), \quad 0 \le s \le s_0. \tag{1.9}$$

Тогда рассуждения, аналогичные таковым в осесимметричном случае и учитывающие, что теперь $k_2|_{\Gamma_1} = 0$, приводят к следующей задаче:

$$z'' = -(b_0)x'(z - h), \quad z(0) = z_0 < 0, \quad z'(0) = 0, \tag{1.10}$$

$$x'' = (b_0)z'(z - h), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \tag{1.11}$$

$$z(s_0) = 0, \quad x(s_0) = x_0, \quad 0 < x_0 < 1, \tag{1.12}$$

$$\int\limits_0^{s_0} x(s) dz(s) = (h_0 - h)/2, \tag{1.13}$$

где x_0 — полуширина отверстия в днище кюветы.

Отметим, что система дифференциальных уравнений (1.10), (1.11) не имеет особенностей при $s_0 = 0$, как это имеет место в (1.6), (1.7). Поэтому решения этой системы можно находить численно (по методу Рунге – Кутта), стартуя непосредственно из точки $s_0 = 0$.

1.3. Об алгоритме построения равновесных форм и результатах расчетов. При численном нахождении значений параметров равновесной поверхности Γ_1, т. е. величин h и z_0, можно использовать комбинацию метода Рунге – Кутта и итерационных процессов. В этом состоит особенность задач (1.6) – (1.8) и (1.10) – (1.13), которая усложняет, в отличие от подходов из [3], решение этих задач статики.

Поясним общую схему вычислений на примере задачи (1.10) – (1.13). Будем считать, что параметры b_0, h_0 и x_0 в этой задаче заданы.

1. Выбираем какие-либо значения $h \in (0, h_0)$ и $z_0 < 0$ и решаем задачу Коши (1.10), (1.11) до точки s_0, в которой выполняется первое условие (1.12). При этом, вообще говоря, $x(s_0) \ne x_0$. Далее, меняя z_0, т. е. итерируя по этому параметру, находим то значение z_0, для которого выполнено условие $|x(s_0) - x_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданная точность выхода по этому условию.

2. Подсчитываем для найденного z_0 левую часть (1.13) (это делается по ходу нахождения z_0) и сравниваем с правой. Итерируем теперь по параметру h, т. е. повторяем процедуры из п. 1, до тех пор, пока условие (1.13) не будет выполнено приближенно с заданной точностью.

Итогом таких вычислений являются значения $h(h_0, x_0, b_0)$ и $z_0(h_0, x_0, b_0)$.

В табл. 1 приведены результаты вычислений для задачи (1.10) – (1.13) при некоторых значениях параметров.

Таблица 1

h	z_0	r_0	b_0	h	z_0	r_0	b_0
$0,1$	-0,0005	0,1	1	1	-0,00501	0,1	1
$0,1$	-0,00202	0,2	1	1	-0,02036	0,2	1
$0,1$	-0,00463	0,3	1	1	-0,0466	0,3	1
$0,5$	-0,00251	0,1	1	1	-0,06098	0,1	10
$0,5$	-0,01014	0,2	1	$0,5$	-0,02309	0,3	1

Аналогичные вычисления выполняются для задачи (1.6) – (1.8) и находятся значения $h(h_0, r_0, b_0)$ и $z_0(h_0, r_0, b_0)$. Отметим только, что здесь проводится предварительное разложение решений задачи (1.6), (1.7) в степенные ряды по переменной s, а затем в качестве начальной точки для вычислительного процесса по методу Рунге – Кутта выбирается малое $\triangle s > 0$.

В табл. 2 приведены некоторые результаты для задачи (1.6) – (1.8).

Таблица 2

h	z_0	r_0	b_0	h	z_0	r_0	b_0
$0,1$	-0,00025	0,1	1	1	-0,00246	0,1	1
$0,1$	-0,001	0,2	1	1	-0,00999	0,2	1
$0,1$	-0,00228	0,3	1	1	-0,02279	0,3	1
$0,5$	-0,00123	0,1	1	1	-0,02582	0,1	10
$0,5$	-0,00499	0,2	1	1	-0,13249	0,2	10
$0,5$	-0,1138	0,3	1				

2. Устойчивость равновесной поверхности. Найденная в пункте 1 равновесная поверхность Γ_1 и вся гидросистема могут оказаться при заданных параметрах b_0, h_0 и r_0 неустойчивыми. Так будет, в частности, если велики объем жидкости, интенсивность гравитационного поля и величина нижнего отверстия радиуса r_0. Поэтому естественно возникает задача нахождения границы области устойчивости в пространстве параметров b_0, h_0 и r_0.

2.1. Общая постановка задачи об устойчивости гидросистемы. Вернемся к рассмотрениям пп. 1.1 и будем считать, что равновесное состояние гидросистемы известно, т. е. найдены положения верхней Γ_0 и нижней Γ_1 поверхностей при заданных значениях h_0, r_0 и b_0. Переходя к изучению вопросов устойчивости, рассмотрим малые отклонения гидросистемы относительно состояния равновесия.

Обозначим малое отклонение поверхности Γ_0 вдоль оси Oz через $\zeta_0 = \zeta_0(\xi)$, $\xi \in \Gamma_0$, а отклонение вдоль внешней нормали к поверхности Γ_1 через $\zeta_1(\xi)$, $\xi := (x, y, z) \in \Gamma_1$.

Тогда из условия сохранения объема жидкости следует, что должно выполняться условие

$$\int_{\Gamma_0} \zeta_0 d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1} \zeta_1 d\Gamma_1 = 0. \tag{2.1}$$

Как известно (см. [3], гл. 2), вопрос об устойчивости гидросистемы в окрестности состояния равновесия капиллярной жидкости связан со знаком второй вариации ее потенциальной энергии $\mathcal{U}$, так как первая вариация $\delta\mathcal{U}$ равна нулю. В рассматриваемом случае вторая вариация $\delta^2\mathcal{U}$ может быть найдена из ее общего представления (2.12.1) – (2.12.3) из [3]:

$$\sigma^{-1}\delta^2\mathcal{U} = \sum_{j=0}^{1} \left\{ \int_{\Gamma_j} \left[a_j|\zeta_j|^2 + |\nabla_j\zeta_j|^2 \right] d\Gamma_j + \oint_{\partial\Gamma_j} \chi_j|\zeta_j|^2 ds \right\},$$

где

$$a_0 = a_0(\xi) \equiv b_0, \quad \xi \in \Gamma_0, \quad a_1(\xi) := b_0 \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{k}}) - (k_1^2 + k_2^2), \quad \xi \in \Gamma_1, \tag{2.2}$$

$|\nabla_j\zeta_j|^2$ — квадрат градиента функции, заданной на Γ_j, $j = 0, 1$, а $\vec{n}_1$ — внешняя нормаль к Γ_1. Далее, в рассматриваемой задаче (когда Γ_0 является плоской, боковая твердая стенка S — цилиндрической, а капля закреплена на кромке $\partial\Gamma_1$) также имеем

$$\chi_0(s) \equiv 0, \quad \zeta_1|_{\partial\Gamma_1} \equiv 0.$$

Отсюда получаем

$$\sigma^{-1}\delta^2\mathcal{U} = \sum_{j=0}^{1} \int_{\Gamma_j} \left[a_j|\zeta_j|^2 + |\nabla_j\zeta_j|^2 \right] d\Gamma_j, \quad \zeta_1|_{\partial\Gamma_1} \equiv 0, \tag{2.3}$$

где $a_j(\xi)$ — функции (2.2).

Рассмотрим вопрос о минимуме потенциальной энергии (2.3) при условии (2.1) и условии нормировки

$$\int_{\Gamma_0} |\zeta_0|^2 d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1} |\zeta_1|^2 d\Gamma_1 = 1. \tag{2.4}$$

Как известно из вариационного исчисления, минимум задачи на условный экстремум квадратичного функционала (2.3) и функция $\zeta := (\zeta_0|_{\Gamma_0}; \zeta_1|_{\Gamma_1})$, реализующая этот минимум, представляют собой наименьшее собственное значение $\lambda = \lambda_*$ и соответствующую нормированную собственную функцию ζ спектральной задачи

$$M_0\zeta_0 + \mu = \lambda\zeta_0 \quad (\text{на } \Gamma_0), \quad \frac{\partial\zeta_0}{\partial e_0} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma_0), \tag{2.5}$$

$$M_1\zeta_1 + \mu = \lambda\zeta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \zeta_1 = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma_1), \tag{2.6}$$

$$M_0\zeta_0 := -\Delta_0\zeta_0 + a_0\zeta_0, \quad M_1\zeta_1 := -\Delta_1\zeta_1 + a_1\zeta_1, \tag{2.7}$$

рассматриваемой при условии (2.1). Здесь λ и μ — не определенные заранее множители Лагранжа, $\partial/\partial e_0$ — производная по внешней нормали к $\partial\Gamma_0$ в плоскости Γ_0, Δ_0 — двумерный оператор Лапласа, действующий на Γ_0, а Δ_1 — соответствующий оператор Лапласа – Бельтрами, действующий на Γ_1. Отметим еще, что соотношения (2.5), (2.6) получены с использованием первых формул Грина для операторов Δ_0 и Δ_1 применительно к задаче на безусловный экстремум функционала

$$\delta^2\mathcal{U} - \lambda\sum_{j=0}^{1}\int\limits_{\Gamma_j}|\zeta_j|^2 d\Gamma_j + \mu\sum_{j=0}^{1}\int\limits_{\Gamma_j}\zeta_j d\Gamma_j, \quad \zeta_1|_{\partial\Gamma_1} \equiv 0.$$

Таким образом, приходим к следующим выводам (см. [3, с. 123]):

1. Если минимальное собственное значение $\lambda = \lambda_*$ задачи (2.5) – (2.7), (2.1) положительно, то равновесное состояние исследуемой гидросистемы устойчиво.

2. Если $\lambda_* < 0$, то равновесное состояние неустойчиво.

3. Границей области устойчивости является такая совокупность заданных параметров b_0, h_0, r_0 гидросистемы, для которой выполнено условие

$$\lambda_*(b_0, h_0, r_0) = 0. \tag{2.8}$$

Утверждения 1 – 3 называют спектральным признаком устойчивости гидросистемы.

2.2. Операторный подход к проблеме устойчивости. Рассмотрим задачу (2.5) – (2.7), (2.1) как задачу на собственные значения для некоторого неограниченного оператора, действующего в гильбертовом пространстве.

С этой целью, опираясь на соотношения (2.4) и (2.1), введем вещественное гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, пар элементов (столбцов) $\zeta := (\zeta_0; \zeta_1)^\tau$ с квадратом нормы

$$\|\zeta\|^2_{L_2(\Gamma)} := \int\limits_{\Gamma_0}|\zeta_0|^2 d\Gamma_0 + \int\limits_{\Gamma_1}|\zeta_1|^2 d\Gamma_1 =: \|\zeta_0\|^2_{L_2(\Gamma_0)} + \|\zeta_1\|^2_{L_2(\Gamma_1)}$$

и соответствующим скалярным произведением. Введем также его подпространство $L_{2,\Gamma}$ тех элементов из $L_2(\Gamma)$, для которых выполнено условие (2.1), т. е. элементов, ортогональных к одномерному подпространству, натянутому на единичную функцию

$$1_\Gamma := (1_{\Gamma_0}; 1_{\Gamma_1})^\tau.$$

Введем еще подпространство

$$L_{2,\Gamma_0} := \left\{\eta_0 \in L_2(\Gamma_0) : \int\limits_{\Gamma_0}\eta_0 d\Gamma_0 = (\eta_0, 1_{\Gamma_0})_{L_2(\Gamma_0)} = 0\right\},$$

а затем представим элемент $\zeta := (\zeta_0; \zeta_1)^\tau$ в виде

$$\zeta = (\eta_0 + \zeta_{01}; \zeta_1)^\tau, \quad \eta_0 \in L_{2,\Gamma_0}, \quad \zeta_{01} \equiv \text{const}.$$

Тогда в силу условия (2.1) получим

$$\zeta_{01} = -|\Gamma_0|^{-1} \int\limits_{\Gamma_1} \zeta_1 d\Gamma_1 =: -K_1\zeta_1 \quad \forall \zeta_1 \in L_2(\Gamma_1). \tag{2.9}$$

Отметим, что константа ζ_{01} описывает возмущение сдвига поверхности Γ_0, а функция $\eta_0 \in L_{2,\Gamma_0}$ — возмущения нулевого объема, связанные с отклонением верхней движущейся поверхности от равновесной поверхности Γ_0 (аналогичные рассуждения см. в [3, с. 208, 209]).

Таким образом, общее отклонение $\zeta := (\zeta_0; \zeta_1)^\tau$ поверхностей Γ_0 и Γ_1 расщепляется на сумму двух независимых отклонений $(\eta_0; 0)^\tau$ и $\zeta := (\zeta_{01}; \zeta_1)^\tau$, ортогональных в пространстве $L_{2,\Gamma}$.

Используя этот факт, преобразуем соотношения (2.5), (2.6) с учетом (2.7), (2.2). Подставляя связь $\zeta_0 = \eta_0 + \zeta_{01}$ в (2.5), получаем

$$M_0\eta_0 + b_0\zeta_{01} + \mu = \lambda(\eta_0 + \zeta_{01}). \tag{2.10}$$

Введем ортопроектор $P_0 : L_2(\Gamma_0) \to L_{2,\Gamma_0}$, действующий по закону

$$P_0\zeta_0 := \zeta_0 - |\Gamma_0|^{-1} \int\limits_{\Gamma_0} \zeta_0 d\Gamma_0,$$

и подействуем им на обе части (2.10). В результате получим соотношения

$$B_0\eta_0 = \lambda\eta_0, \quad B_0 := P_0M_0P_0, \quad M_0P_0\eta_0 = M_0\eta_0 \in L_2(\Gamma_0). \tag{2.11}$$

Применяя еще дополнительный проектор $I_0 - P_0$ к обеим частям (2.10), получаем формулу для вычисления множителя Лагранжа μ:

$$\mu = -(I_0 - P_0)M_0\eta_0 + (\lambda - b_0)\zeta_{01}.$$

Однако с использованием формулы Грина для оператора Δ_0 и с учетом граничного условия

$$\frac{\partial\eta_0}{\partial\nu_0} = \frac{\partial}{\partial\nu_0}(\zeta_0 - \zeta_{01}) = \frac{\partial\zeta_0}{\partial\nu_0} \quad (\text{на } \partial\Gamma_0)$$

получаем $(I_0 - P_0)M_0\nu_0 = 0$. Поэтому

$$\mu = (\lambda - b_0)\zeta_{01}.$$

Подставляя это значение в (2.6), имеем

$$B_1\zeta_1 + b_0K_1\zeta_1 = \lambda(I_1 + K_1)\zeta_1, \quad B_1 := M_1, \quad M_1\zeta_1 \in L_2(\Gamma_1). \tag{2.12}$$

Запишем соотношения (2.11) и (2.12) в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_1 + b_0K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & I_1 + K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_1 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Таким образом, задача об устойчивости исследуемой гидросистемы приведена к задаче на собственные значения (2.13). Здесь в левой части содержится неограниченный оператор, представленный в виде диагональной матрицы с неограниченными операторными элементами.

Уточним свойства этих элементов.

Лемма 2.1. *Оператор K_1, определяемый формулой (2.9), является компактным неотрицательным (одномерным) оператором, действующим в пространстве $L_2(\Gamma_1)$.*

Лемма 2.2. *Пусть граница $\partial\Gamma_0$ поверхности Γ_0 дважды непрерывно дифференцируема. Тогда оператор $B_0 : \mathcal{D}(B_0) \subset L_{2,\Gamma_0} \to L_{2,\Gamma_0}$, заданный в области определения*

$$\mathcal{D}(B_0) = \left\{\eta_0 \in H^2(\Gamma_0) \cap L_{2,\Gamma_0} : \partial\eta_0/\partial e_0 = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma_0)\right\},$$

является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором с дискретным спектром

$$\{\lambda_k(B_0)\}_{k=1}^{\infty}, \quad 0 < \lambda_1(B_0) \le \ldots \le \lambda_k(B_0) \le \ldots, \quad \lambda_k(B_0) \to +\infty \quad (k \to \infty). \tag{2.14}$$

При этом его собственные элементы $\{\eta_{0k}(B_0)\}_{k=1}^{\infty}$, соответствующие собственным значениям (2.14), образуют ортогональный базис как в L_{2,Γ_0}, так и в энергетическом пространстве H_{B_0} этого оператора:

$$(\eta_{0k}, \eta_{0l})_{B_0} = \int_{\Gamma_0} [\nabla_0\eta_{0k} \cdot \nabla_0\eta_{0l} + b_0\eta_{0k}\eta_{0l}]d\Gamma_0 = \lambda_k(B_0)\int_{\Gamma_0} \eta_{0k}\eta_{0l}d\Gamma_0 = \lambda_k(B_0)\delta_{kl}.$$

Лемма 2.3. *Оператор $B_1 : \mathcal{D}(B_1) \subset L_2(\Gamma_1) \to L_2(\Gamma_1)$, заданный в области определения*

$$\mathcal{D}(B_1) = \left\{\zeta_1 \in H^2(\Gamma_1) : \zeta_1 = 0 \ \ (\text{на } \partial\Gamma_1)\right\},$$

является неограниченным самосопряженным и притом ограниченным снизу оператором с дискретным спектром:

$$\{\lambda_j(B_1)\}_{j=1}^{\infty}, \quad -\infty < \lambda_1(B_1) \le \ldots \le \lambda_j(B_1) \le \ldots, \quad \lambda_j(B_1) \to +\infty \quad (j \to \infty). \tag{2.15}$$

Его собственные элементы $\{\zeta_{1j}(B_1)\}_{j=1}^{\infty}$, соответствующие собственным значениям (2.15), образуют ортогональный базис как в $L_2(\Gamma_1)$, так и по билинейной форме оператора B_1:

$$\int_{\Gamma_1} [\nabla_1\zeta_{1k} \cdot \nabla_1\zeta_{1l} + a_1\zeta_{1k}\zeta_{1l}]\, d\Gamma_1 = \lambda_k(B_1)\int_{\Gamma_1} \zeta_{1k}\zeta_{1l}d\Gamma_1 = \lambda_k(B_1)\delta_{kl}.$$

Леммы 2.2 и 2.3 доказываются точно так же, как аналогичные утверждения при наличии лишь одной свободной поверхности (см., например, [9, с. 163, 164]), а также [11, с. 235 – 238]).

Использовав леммы 2.1 и 2.3, рассмотрим спектральную задачу

$$(B_1 + b_0 K_1)\zeta_1 = \lambda(I_1 + K_1)\zeta_1, \quad \zeta_1 \in \mathcal{D}(B_1) \subset L_2(\Gamma_1). \tag{2.16}$$

Лемма 2.4. *Спектр задачи (2.16) дискретен и ограничен снизу, состоит из конечнократных собственных значений*

$$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}, \quad -\infty < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_j \leq \ldots, \quad \lambda_j \to +\infty \quad (j \to \infty), \tag{2.17}$$

а система его собственных элементов $\{\zeta_{1j}\}_{j=1}^{\infty}$, *соответствующая собственным значениям (2.17), образует ортогональный базис как по форме оператора* $I_1 + K_1$, *так и по форме оператора* $B_1 + b_0 K_1$:

$$\int\limits_{\Gamma_1} \left[\nabla_1 \zeta_{1k} \cdot \nabla_1 \zeta_{1j} + a_1 \zeta_{1k} \zeta_{1j}\right] d\Gamma_1 + b_0 |\Gamma_0|^{-1} \int\limits_{\Gamma_1} \zeta_{1k} d\Gamma_1 \int\limits_{\Gamma_1} \zeta_{1j} d\Gamma_1 =$$

$$= \lambda_k \left[\int\limits_{\Gamma_1} \zeta_{1k} \zeta_{1l} d\Gamma_1 + |\Gamma_0|^{-1} \int\limits_{\Gamma_1} \zeta_{1k} d\Gamma_1 \int\limits_{\Gamma_1} \zeta_{1j} d\Gamma_1 \right] = \lambda_k \delta_{kj}.$$

Теорема 2.1. *Спектр задачи (2.13) является дискретным с предельной точкой* $\lambda = +\infty$. *Он является объединением спектров задач (2.11) и (2.16) и состоит из двух ветвей собственных значений, каждая из которых имеет предельную точку* $\lambda = +\infty$. *Ветви* $\{\lambda_k(B_0)\}_{k=1}^{\infty}$ *соответствуют возмущения нулевого объема в окрестности* Γ_0, *а ветви* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ — *сдвиговые возмущения поверхности* Γ_0.

Доказательство основано на том, что операторная матрица слева в (2.13) имеет диагональный вид, а также на утверждениях лемм 2.2–2.4.

Следствием теоремы 2.1 является такое утверждение.

Теорема 2.2. *Границей области устойчивости исследуемой гидросистемы является такой набор заданных параметров* b_0, h_0 *и* r_0, *когда минимальное собственное значение оператора* $B_1 + b_0 K_1$ *равно нулю:*

$$\lambda_* = \lambda_{\min}(B_1 + b_0 K_1) = 0. \tag{2.18}$$

При переходе через эту границу устойчивость системы теряется на сдвиговых возмущениях, т. е. таких, когда верхняя поверхность Γ_0 *перемещается как единое целое вдоль оси цилиндрического сосуда.*

Доказательство. Как следует из теоремы 2.1, возмущениям, сохраняющим объем в окрестности Γ_0, соответствуют положительные собственные значения задачи (2.13), поэтому на таких возмущениях не может достигаться условие $\lambda_* = 0$ (см. (2.8)). Значит, граница области устойчивости может достигаться на сдвиговых возмущениях, т. е. таких, когда задача (2.16) имеет минимальное собственное значение $\lambda_{\min} = \lambda_* = 0$. Однако это соответствует тому, что существует нетривиальное решение уравнения

$$(B_1 + b_0 K_1)\zeta_1 = 0, \quad \zeta_1 \in \mathcal{D}(B_1) \subset L_2(\Gamma_1). \tag{2.19}$$

Теорема 2.2 доказана.

Замечание 2.1. Исследуемая гидросистема заведомо устойчива, если параметры b_0, h_0 и r_0 достаточно малы. Поэтому границу области устойчивости, т. е. соотношение (2.18), можно находить, изменяя один из этих параметров (при фиксированных других) от малых значений к бóльшим.

2.3. Об алгоритмах расчета границы области устойчивости гидросистемы. Использовав теоремы 2.1 и 2.2, перейдем к процедуре нахождения границы области устойчивости капли, подвешенной к дну цилиндра.

Как следует из (2.18), (2.19), необходимо для данной равновесной формы капли, т. е. поверхности Γ_1, выяснить, существуют ли нетривиальные решения задачи (2.19). В пространственном случае возникает задача

$$M_1\zeta_1 + b_0|\Gamma_0|^{-1}\int\limits_{\Gamma_1}\zeta_1 d\Gamma_1 = 0, \quad \zeta_1 = \zeta_1(\xi), \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \zeta_1 = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma_1), \tag{2.20}$$

$$M_1\zeta_1 = -\Delta_1\zeta_1 + a_1\zeta_1, \quad a_1 = b_0\cos(\widehat{\vec{n_1}, \vec{k}}) - (k_1^2 + k_2^2). \tag{2.21}$$

Разлагая функцию $\zeta_1(\xi)$ в ряд Фурье, для осесимметричной задачи имеем (см. аналогичные построения в [3, с. 125–129])

$$\zeta_1 = \varphi_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n(s)\cos n\theta + \psi_n(s)\sin n\theta), \quad 0 \le s \le s_0, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

$$d\Gamma_1 = 2\pi\, r(s)ds, \quad |\Gamma_0| = \pi, \quad b_0|\Gamma_0|^{-1}\int\limits_{\Gamma_1}\zeta_1 d\Gamma_1 = 2b_0\int\limits_0^{s_0}\varphi_0(s)r(s)ds,$$

где $r = r(s)$, $z = z(s)$, $0 \le s \le s_0$, — уравнение поверхности Γ_1.

Для наиболее опасных (с точки зрения устойчивости, см. [3, с. 130]) возмущений по нулевой и первой гармоникам приходим к задачам

$$-\varphi_0'' - \frac{r'}{r}\,\varphi_0' + a(s)\varphi_0 + 2b_0\int\limits_0^{s_0}\varphi_0(s)r(s)ds = 0 \quad \varphi_0(s_0) = 0, \tag{2.22}$$

$$-\varphi_1'' - \frac{r'}{r}\,\varphi_1' + \left(a(s) + \frac{1}{r^2}\right)\varphi_1 = 0, \;\; \varphi_1(s_0) = 0, \;\; a(s) := -b_0 r' - [(k_1(s))^2 + (k_2(s))^2]. \tag{2.23}$$

(Для функции $\psi_1(s)$ возникает такая же задача (2.23).)

Использовав свойство линейности задачи (2.22), представим ее решение в виде

$$\varphi_0(s) = c_0 w_0(s) + 2b_0\left(\int\limits_0^{s_0}\varphi_0(s)r(s)ds\right)w_{01}(s), \tag{2.24}$$

где функции $w_0(s)$ и $w_{01}(s)$ являются решениями следующих вспомогательных задач Коши:

$$-w_0'' - \frac{r'}{r}\, w_0' + a(s)w_0 = 0, \quad (') := d/ds, \quad w_0(s) = 1 + \alpha_0 s^2 + O(s^4), \quad s \to 0, \tag{2.25}$$

$$-w_{01}'' - \frac{r'}{r}\, w_{01}' + a(s)w_{01} + 1 = 0, \quad w_{01}(s) = \alpha_{01} s^2 + O(s^4), \quad s \to 0. \tag{2.26}$$

Здесь учтено асимптотическое поведение решений в нуле, а также аналогичное поведение функций $r(s)$ и $z = z(s)$.

Из представления (2.24) приходим к выводу, что

$$\left[1 - 2b_0 \int\limits_0^{s_0} w_{01}(s)r(s)\, ds\right] \int\limits_0^{s_0} \varphi_0(s)r(s)\, ds = c_0 \int\limits_0^{s_0} w_0(s)r(s)\, ds, \tag{2.27}$$

откуда определяется, с точностью до постоянного множителя, функция $\varphi_0(s)$ из (2.24).

Тогда граничное условие на правом конце (см. (2.22)) приводит к соотношению

$$f_0(s_0) := w_0(s_0) - 2b_0 \left[w_0(s_0) \int\limits_0^{s_0} w_{01}(t)r(t)\, dt - w_{01}(s_0) \int\limits_0^{s_0} w_0(t)r(t)\, dt\right] = 0, \tag{2.28}$$

которое и является условием существования нетривиальных решений задачи (2.22), соответствующим возмущениям по нулевой гармонике.

Для возмущений по первой гармонике, т. е. для задачи (2.23), получаем аналогичное условие существования нетривиальных решений:

$$f_1(s_0) := \varphi_1(s_0) = 0, \quad \varphi_1(s) = s + O(s^3), \quad s \to 0. \tag{2.29}$$

Таким образом, в осесимметричной задаче при заданных параметрах гидросистемы b_0, h_0 и r_0 следует выяснять, выполнено или не выполнено условие (2.28) либо (2.29).

Аналогичные условия можно вывести и в плоской задаче (см. пп. 1.2), когда равновесная дуга Γ_1 симметрична, а капля подвешена к дну плоского канала. Здесь уравнение полудуги Γ_1 задается в виде (1.9), а вместо (2.20), (2.21) рассматриваем задачу

$$-\zeta_1'' + a(s)\zeta_1 + \frac{b_0}{2} \int\limits_{-s_0}^{s_0} \zeta_1(s) ds = 0, \quad -s_0 \le s \le s_0, \tag{2.30}$$

$$\zeta_1(s_0) = \zeta_1(-s_0) = 0, \quad a(s) = -b_0 x'(s) - (k_1(s))^2. \tag{2.31}$$

Введем функции $\varphi_0(s)$, $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$, $0 \le s \le s_0$, являющиеся решениями следующих вспомогательных задач Коши:

$$\begin{aligned} &-\varphi_0'' + a(s)\varphi_0 = 0, \quad \varphi_0(0) = 1, \quad \varphi_0'(0) = 0, \\ &-\varphi_1'' + a(s)\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1'(0) = 1, \\ &-\varphi_2'' + a(s)\varphi_2 + 1 = 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Можно проверить, что $\varphi_0(s)$ и $\varphi_2(s)$ продолжаются четным, а $\varphi_1(s)$ продолжается нечетным образом на промежуток $-s_0 \le s \le s_0$. Поэтому после такого продолжения решение уравнения (2.32) принимает вид

$$\zeta_1(s) = c_0\varphi_0(s) + c_1\varphi_1(s) + \frac{b_0}{2}\left(\int\limits_{-s_0}^{s_0} \zeta_1(s)ds\right)\varphi_2(s) = 0, \quad -s_0 \le s \le s_0,$$

где c_0 и c_1 — произвольные постоянные.

Отсюда, аналогично (2.27), приходим к выводу, с учетом свойств функций (2.32), что

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0} \zeta_1(s)ds \left[1 - b_0\int\limits_0^{s_0} \varphi_2(s)ds\right] = 2c_0\int\limits_0^{s_0} \varphi_0(s)ds.$$

Тогда граничные условия (2.31) приводят к системе двух линейных однородных уравнений относительно констант c_0 и c_1, а равенство нулю ее определителя дает условие

$$f_0(s_0) := \varphi_0(s_0) - b_0\left[\varphi_0(s_0)\int\limits_0^{s_0} \varphi_2(s)ds - \varphi_2(s_0)\int\limits_0^{s_0} \varphi_0(s)ds\right] = 0$$

либо условие

$$f_1(s_0) := \varphi_1(s_0) = 0.$$

Эти соотношения являются плоскими аналогами осесимметричных условий (2.28), (2.29); они обеспечивают существование нетривиальных решений задачи (2.30) либо (2.31).

На основании проведенных рассуждений приходим к следующим алгоритмам нахождения границы области устойчивости исследуемой гидросистемы.

1. Для заданных параметров b_0, h_0 и r_0, имея набор параметров h и z_0, соответствующих набору равновесных поверхностей Γ_1 (см. пп. 1.3), решаем заново для этих параметров задачи Коши (1.6), (1.7) на промежутке $0 \le s \le s_0$. Параллельно с этим решаем вспомогательные задачи Коши (2.25), (2.26), а также задачу (2.23) с учетом асимптотического поведения в нуле (см. (2.29)).

2. В конечной точке $s = s_0$ вычисляем значения функций $f_0(s_0)$ и $f_1(s_0)$ (см. (2.28), (2.29)). При малых значениях b_0, h_0 и r_0 система устойчива, и потому условия (2.28) и (2.29) не выполнены. Фиксируя два из трех параметров, например h_0 и r_0, и увеличивая b_0, находим то его критическое значение $b_0 = (b_0)_*$, когда выполнено одно из условий (2.28) либо (2.29).

3. Изменяя теперь h_0 и r_0, находим границу области устойчивости гидросистемы в форме зависимости

$$(b_0)_* = f(h_0, r_0).$$

4. Аналогичные построения можно выполнить, чтобы получить критические значения h_0 либо r_0:

$$(h_0)_* = \varphi(b_0, r_0), \quad (r_0)_* = \psi(b_0, h_0).$$

5. Та же процедура осуществляется в случае плоской задачи для нахождения границы области устойчивости в виде зависимостей

$$(b_0)_* = f(h_0, x_0), \quad (h_0)_* = \varphi(b_0, x_0), \quad (x_0)_* = \psi(b_0, h_0).$$

Такие расчеты предполагается провести в дальнейшем, а также рассмотреть задачи, в которых с днища сосуда свисает несколько капель.

Авторы выражают благодарность Л. А. Слобожанину за постановку задачи и предварительное обсуждение данного круга проблем.

1. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976. — 504 с.

2. *Myshkis A. D., Babckii V. G., Kopachevskii N. D., Slobozhanin L. A., Tyuptsov A. D.* Low-gravity fluid mechanics. — Berlin etc: Springer-Verlag, 1987. — 583 p.

3. *Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. — Киев: Наук. думка, 1992. — 592 с.

4. *Slobozhanin L. A., Alexander J. I. D.* The stability of two connected drops suspended from the edges of circular holes // J. Fluid Mech. — 2006. — **563**. — P. 319–355.

5. *Slobozhanin L. A., Shevtsova V. M., Alexander J. I. D., Meseguer J., Montanero J. M.* Stability of liquid bridges between coaxial equidimensional disks to axisymmetric finite perturbations: a rewiew // Microgravity Sci. and Technology. — 2012. — **24**, № 2. — P. 65–77.

6. *Луковский И. А., Михайлюк А. В., Тимоха А. М.* Об одном вариационном критерии устойчивости псевдоравновесных форм // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1688–1695.

7. *Gavrilyuk I., Lukovsky I., Timokha A.* Two-dimensional variational vibroequilibria and Faraday's drops // Z. angew. Math. und Phys. — 2004. — **55**. — S. 1015–1033.

8. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1. Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel: Birkhäuser, 2001. — **128**. — 384 p.

9. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

10. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2. Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel: Birkhäuser, 2003. — **146**. — 444 p.

11. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970 .— 512 с.

Получено 09.11.13