

МОДЕЛЬ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КОНФЛІКТУ ТИПУ „ВОГОНЬ – ВОДА”

Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко

Ін-т математики НАН України

Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We discuss a dynamical system model generated by the conflict interaction between alternative essences of "fire - water" type under permanent external replenishment and internal mixing. The behavior of trajectories is investigated. We prove the existence of periodic orbits and convergence of trajectories to ω -limit cyclic orbits.

Построена модель динамической системы, заданная конфликтным взаимодействием между альтернативными стихиями типа „огонь – вода” при систематическом внешнем восполнении ресурса и внутренним перемешиванием. Исследовано поведение траекторий. Установлена сходимость траекторий системы к ω -предельным циклическим орбитам.

1. Вступ. Математична наука про конфлікт виникла близько 100 років тому, швидко розвивалась і вже у 1944 р. була послідовно викладена у фундаментальній монографії фон Неймана та Моргенстерна (див. ювілейне видання за 2006 рік [1]). Метою було не тільки впорядкування великої кількості чисто ігрових задач, але і їх застосування в економічних та соціальних моделях. Теорія ігор, як абстрактна наука про різного типу конфліктні ситуації, набула потужного розвитку в багатьох публікаціях (див., наприклад, [2, 3] та наведену там бібліографію). Неможливо не згадати монографію Т. Шеллінга „Стратегія конфлікту” [4], яка істотно удосконалила теорію стандартної ігрової ситуації, відому як „zero-sum game”.

По-справжньому новий етап розвитку теорії конфлікту виник при дослідженнях складних систем, коли об’єдналися методи чистої теорії ігор з методами динамічних систем [5–7] та методами нелінійної динаміки [13–16]. Коло моделей теорії конфліктів значно розширилось і включило в себе не лише економічні та соціальні проблеми, а і біологічні (див. [8]), політичні, релігійні, екологічні, практично всі актуальні проблеми людської цивілізації на мові теорії динамічних систем [10–12, 21]. В теорії конфлікту складних систем кінцевим результатом процесу конфліктної взаємодії, тобто „гри”, вже може бути не тільки фіксований рівноважний стан, а і циклічна орбіта, вибір між колекцією рівноважних станів або циклічних орбіт, навіть хаос чи колапс [16].

Потужна гілка теорії конфліктів відома як диференціальні ігри [17–20].

В останнє десятиліття методи моделювання складних конфліктних систем збагатилися новими підходами: статистичною інтерпретацією та регіоналізацією простору [22–27].

У цій роботі побудовано і досліджено поведінку максимально спрощеної моделі складної динамічної системи, породженої перетворенням конфліктної взаємодії між альтернативними стихіями F та W типу вогню та води, які розподілені по секторах замкнутого простору. Припускається додатково, що стихія F зазнає систематичного зовнішнього впливу (підживлення, аналогічного сонячній радіації з одночасною дисипацією), а розподіл стихії W трансформується за певним законом (перемішуванням). У розглядуваній

моделі простір розподілу стихій F, W є колом, поділим на $n \geq 2$ секторів (регіонів) $\Delta_k, k = 1, \dots, n$. Вага наявності кожної із стихій F, W в регіоні Δ_k задається статистично. В початковий момент часу $t = 0$ стихіям F, W ставиться у відповідність пара стохастичних векторів $p, r \in \mathbb{R}_+^n$, координати яких $p_k, r_k \geq 0, k = 1, \dots, n$, мають сенс імовірностей знаходження F, W в регіоні Δ_k :

$$p_k := \mathbb{P}(F \in \Delta_k), \quad r_k := \mathbb{P}(W \in \Delta_k).$$

Еволюцію векторів $p(t), r(t), t \geq 0$, задано системою $2n$ звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dp_k}{dt} = \tilde{p}_k(\theta - \tilde{r}_k), \quad \frac{dr_k}{dt} = \tilde{r}_k(\theta - \tilde{p}_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (1)$$

які визначають закон конфліктної взаємодії між F та W . Вплив зовнішнього підживлення та внутрішнього перемішування з точністю до нормування має адитивний характер:

$$\tilde{p}_k = \frac{p_k + s_k}{z_p}, \quad \tilde{r}_k = \frac{r_k + h_k}{z_r}, \quad (2)$$

де $s_k, h_k \geq 0$ — деякі періодичні функції. Величина $\theta(p, r)$ є показником конфліктності між стихіями F, W в момент часу t . Нормуючі знаменники z_p, z_r в (2) забезпечують стохастичність векторів у кожен момент часу. Еквівалентна модель задається системою рівнянь

$$\dot{p}_k = \frac{p_k(\theta - r_k) + s_k}{z_p}, \quad \dot{r}_k = \frac{r_k(\theta - p_k) + h_k}{z_r}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Схематично модель зображено на рис. 1.

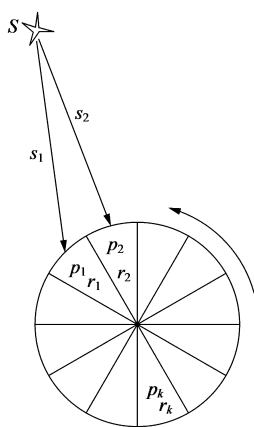


Рис.1. Схеми моделі.

Дослідження поведінки траєкторій моделі, заданої рівняннями (1), (2) або (3), розіб'ємо на кілька етапів. На першому етапі розглядаємо автономну систему з чисто внутрішньою конфліктною взаємодією. Потім окремо вивчаємо модель, коли конфліктної взаємодії між стихіями немає, але кожна з них зазнає періодичного зовнішнього впливу. Нарешті досліджуємо повну модель, задану рівняннями (1)–(3), яка моделює процес конфліктної взаємодії між парою альтернативних підсистем (опонентів), що мають систематичне зовнішнє підживлення.

Стійкість системи забезпечується сталою дисипацією стихії F (аналога теплової енергії) та інваріантністю повної кількості стихії W (аналога води) в усьому просторі.

Опишемо коротко розглядувану модель в дискретному часі. У просторі пар стохастичних векторів $p, r \in \mathbb{R}_+^n$, $n \geq 2$, розглядається нелінійне відображення ($p^0 = p, r^0 = r$)

$$\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \ni \{p^N, r^N\} \xrightarrow{*} \{p^{N+1}, r^{N+1}\} \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

яке визначається в термінах координат формулами

$$p_i^{N+1} = \frac{\tilde{p}_i^N (1 - \tilde{r}_i^N)}{c_p^N}, \quad r_i^{N+1} = \frac{\tilde{r}_i^N (1 - \tilde{p}_i^N)}{c_r^N}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

де c_p^N, c_r^N — нормуючі знаменники, які забезпечують стохастичність векторів p^{N+1}, r^{N+1} , а

$$\tilde{p}_i^N = \frac{p_i^N + s_i^{N+1}}{z_p^N}, \quad \tilde{r}_i^N = \frac{r_i^N + h_i^N}{z_r^N}, \quad (6)$$

де $s_i^{N+1} = s_{i+1}^N$ при $1 \leq i < n$, $s_n^{N+1} = s_1^N$, а $s^{N=0} = (s_1, \dots, s_n)$, $h^{N=0} = (h_1, \dots, h_n)$ — фіксовані вектори з \mathbb{R}_+^n , їх залежність від N задається певним законом. Відображення $*$, згідно з формулами (5), має інтерпретацію альтернативної конфліктної взаємодії між парою фізичних систем, які знаходяться в станах p^N, r^N у моменти дискретного часу $N = 1, 2, \dots$. При цьому кожна з систем отримує систематичне зовнішнє „підживлення”, задане формулами (6).

У роботі досліджується асимптотична поведінка траєкторій динамічної системи (1). Зокрема, при певних умовах на вектори s, h та p, r встановлено існування ω -граничних періодичних траєкторій. А саме, при наявності зовнішнього джерела впливу (аналога сонячної радіації) для однієї із стихій та закономірного або випадкового перемішування по регіонах другої стихії (аналога вітру) доведено існування циклічних орбіт, до яких асимптотично збігаються траєкторії моделі. Цей результат є багатовимірним аналогом відомої теореми Пуанкаре – Бендіксона (див., наприклад, [10]) про існування циклів для двовимірних динамічних систем і наслідком двох фактів: існування нерухомої ω -граничної точки динамічної системи, заданої формулами (5) з $\tilde{p}_i^N = p_i^N, \tilde{r}_i^N = r_i^N$ (див. [28, 29]), та коливального характеру рівномірно обмеженого зовнішнього підживлення і внутрішнього перемішування.

Зазначимо, що різні методи побудов складних динамічних систем із внутрішньою конфліктною взаємодією досліджувались у роботах [30, 31, 34, 35], а деякі попередні результати до моделі „вогонь – вода” доповідалися на конференціях [36, 37].

2. Модель чистого конфлікту. Розглянемо випадок чистого конфлікту альтернативних стихій, коли немає зовнішнього підживлення та внутрішнього перемішування, $s_k = h_k = 0$, $k = 1, \dots, n$. Тоді система рівнянь (1) спрощується і набирає вигляду

$$\dot{p}_k = p_k(\theta - r_k), \quad \dot{r}_k = r_k(\theta - p_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (7)$$

де показник конфліктності $\theta(t) = (p, r) = \sum_{k=1}^n p_k r_k$ — скалярний добуток векторів $p(t)$, $r(t)$. Покажемо, що в цьому випадку кожна траєкторія $\{p(t), r(t)\}$, $t \geq 0$, відповідної динамічної системи збігається до нерухомої точки (компромісного стану).

Зауважимо, що завдяки стохастичності кожного з векторів $p(t)$, $r(t)$ при довільному $t \geq 0$ справджуються рівності

$$\dot{p} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n p_k \right) = 0, \quad \dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n r_k \right) = 0.$$

Більш того, аналіз рівнянь (1) показує, що при зростанні часу похідна кожної з координат p_k, r_k прямує до нуля:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{p}_k(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{r}_k(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Це означає, що всі координати $p_k(t), r_k(t)$ збігаються до фіксованих граничних значень:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) = p_k^\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r_k(t) = r_k^\infty.$$

Отже, кожна траєкторія динамічної системи чистого конфлікту збігається до ω -граничної нерухомої точки у просторі $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$:

$$p^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p^t, \quad r^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} r^t.$$

Значення граничних координат мають точний опис. Справедливою є така теорема.

Теорема 1 (про чистий конфлікт). *Кожна траєкторія динамічної системи $\{p(t), r(t)\}_{t \geq 0}$, заданої в термінах координат рівняннями (7), збігається у просторі $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ до нерухомої точки:*

$$\{p^\infty, r^\infty\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{p(t), r(t)\}.$$

Якщо в момент $t = 0$ початкові вектори є різними, $p \neq r$, то граничні вектори ортогональні, $p^\infty \perp r^\infty$, а їхні координати мають такі значення:

$$p_i^\infty = \begin{cases} \frac{d_i}{D}, & i \in \mathbb{N}_+, \\ 0, & i \notin \mathbb{N}_+, \end{cases} \quad (8)$$

$$r_k^\infty = \begin{cases} -\frac{d_k}{D}, & k \in \mathbb{N}_-, \\ 0, & k \notin \mathbb{N}_-, \end{cases} \quad (9)$$

де $d_i = p_i - r_i$, $\mathbb{N}_+ = \{i | p_i > r_i\}$, $\mathbb{N}_- = \{k | p_k < r_k\}$, $D = 1/2 \sum_i |d_i|$. Зокрема, якщо для довільної координати $p_l = r_l$, то $p_l^\infty = r_l^\infty = 0$. У випадку $p = r$ граничні вектори також рівні, $p^\infty = r^\infty$, а їхні координати рівномірно розподілені по регіонах: $p_k^\infty = p_k^\infty = \frac{1}{m}$, де $m \leq n$ — кількість ненульових координат векторів p, r .

Доведення різницевого аналога цієї теореми наведено в роботах [28, 29]. Тут викладемо основні ідеї аргументації, які мають місце для моделі з неперервним часом. Нехай у початковий момент часу для довільної пари координат виконується нерівність $p_i > r_i$. Тоді з рівнянь (7) випливає, що функція $d_i(t) := p_i(t) - r_i(t)$ монотонно зростає. При $t \rightarrow \infty$, завдяки обмеженості кожної з координат, випливає існування границі,

$$d_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} d_i(t) \leq 1.$$

При цій же умові, $p_i > r_i$, розглянемо відношення $R_i(t) := p_i(t)/r_i(t)$. З (7) випливає, що величина $R_i(t)$ необмежено зростає:

$$R_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} R_i(t) = \infty.$$

Це означає, що координата $r_i(t)$ збігається до нуля. Як наслідок, одержуємо існування

$$p_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) > 0.$$

Аналогічно встановлюємо існування

$$r_k^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} r_k(t) > 0$$

та збіжність $p_k(t)$ до нуля при умові $p_k < r_k$. Існування таких границь з необхідністю викликає збіжність до нуля показника конфліктності,

$$\theta^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0,$$

що еквівалентно ортогональності граничних векторів, $p^\infty \perp r^\infty$ при умові $p \neq r$ на початкові вектори. Зокрема, це означає, що границі рівних початкових координат $p_l = r_l$ є нульовими: $p_l^\infty = r_l^\infty = 0$. Нерухомість граничного стану впливає з рівності $\theta^\infty = 0$. Формули (8), (9) для граничних значень p_i^∞, r_k^∞ одержуємо з рівнянь

$$\frac{p_i^\infty}{p_{i'}^\infty} = \frac{d_i^\infty}{d_{i'}^\infty} = \frac{d_i}{d_{i'}}, \quad i, i' \in \mathbb{N}_+, \quad \frac{r_k^\infty}{r_{k'}^\infty} = \frac{d_k^\infty}{d_{k'}^\infty} = \frac{d_k}{d_{k'}}, \quad k, k' \in \mathbb{N}_-.$$

Нарешті, рівність $p^\infty = r^\infty$ та рівномірна розподіленість координат цих векторів по регіонах у випадку, коли початкові вектори рівні, $p = r$, встановлюється впорядкуванням координат за величиною значень при кожному t : $p_1(t) \leq p_2(t) \leq \dots \leq p_m(t)$ і спостереженням, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [p_1(t) - p_m(t)] = 0.$$

Тому $\lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = 1/m$, $j = 1, \dots, m \leq n$.

Теорему 1 доведено.

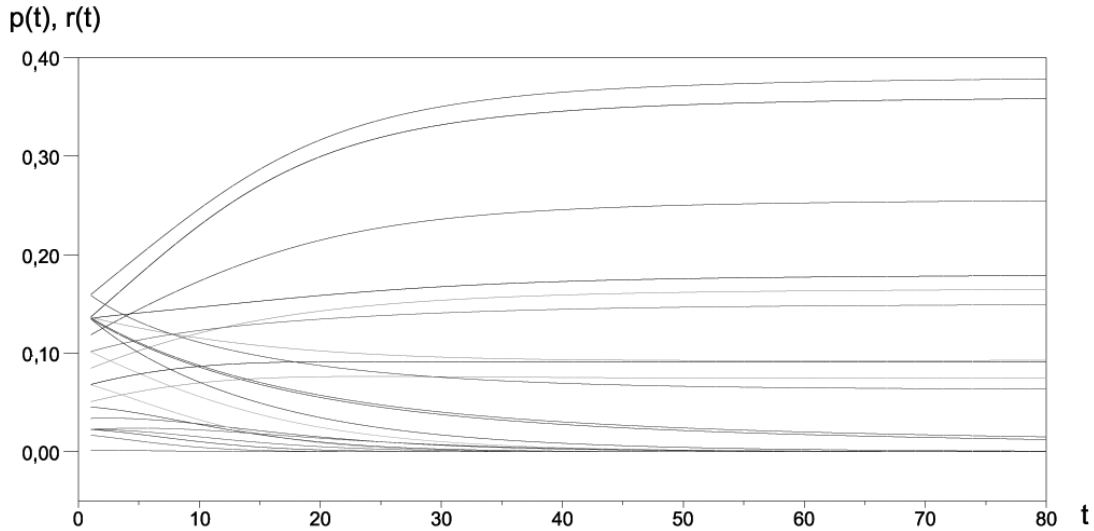


Рис. 2. Асимптотичний розподіл граничних координат.

Приклад 1. Модель еволюції динамічної системи з чисто внутрішньою конфліктною взаємодією в неперервному часі.

Траєкторія стохастичних векторів $p(t), r(t)$, координати яких задовольняють рівняння (7), збігається до фіксованої нерухомої точки $\{p^\infty, r^\infty\} \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ з координатами, зображеними на рис. 2.

3. Модель динамічної системи без конфліктної взаємодії. Розглянемо випадок, коли конфліктної взаємодії між стихіями F, W немає, але кожна з них зазнає зовнішнього впливу періодичного характеру. Покажемо, що це приводить до існування граничних циклічних орбіт.

З (1) випливає, що при відсутності конфліктної взаємодії система задається двома наборами незалежних рівнянь:

$$\dot{p}_k(t) = \frac{p_k(t) + s_k(t)}{z_p(t)}, \quad \dot{r}_k(t) = \frac{r_k(t) + h_k(t)}{z_r(t)}, \quad k = 1, \dots, n \geq 2, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

де періодичні функції $s_k(t), h_k(t)$ описують зовнішній вплив, а нормуючі знаменники $z_p(t), z_r(t)$ забезпечують стохастичність векторів $p(t), r(t)$ в кожний момент часу.

Далі досліджуємо поведінку одного з незалежних векторів $p(t)$ або $r(t)$, поведінка другого буде аналогічною. Виберемо вектор $p(t)$, але щоб відрізнити його від випадку, коли між $p(t)$ та $r(t)$ відбувається конфліктна взаємодія, позначимо його через $x(t)$. Отже, ми хочемо дослідити систему рівнянь

$$\dot{x}_k(t) = \frac{x_k(t) + s_k(t)}{z(t)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Насправді далі ми досліджуємо деякий різницевий варіант системи (11) у фіксовані моменти часу, кратні деякому куту α :

$$x_k(t_{N+1}) = \frac{x_k(t_N) + s_k(t_N)}{z(t_N)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad t_N = \alpha N, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

де покладено, що вплив зовнішнього джерела відбувається по закону

$$s_k(t_N) = s(\alpha k + t_N), \quad \alpha > 0. \quad (13)$$

Тут $s(t)$ — деяка додатна періодична неперервна функція така, що $s(t) = s(\alpha n + t)$, наприклад $s(t) = c(1 + \sin t)$, $c > 0$, $\alpha = 2\pi/n$.

Легко перевірити, що нормуючий знаменник у (12), який забезпечує стохастичність вектора $x(t)$, не залежить від часу, і його можна знайти:

$$z = z(t_N) = 1 + s, \quad s = \sum_{k=1}^n s_k, \quad s_k = s(\alpha k). \quad (14)$$

Позначимо

$$x_k^N := x_k(t_N), \quad s_k^N := s_k(t_N) = s(\alpha k + t_N) \equiv s_{k+N}.$$

Тоді система рівнянь (12) набере вигляду

$$x_k^{N+1} = \frac{x_k^N + s_k^N}{1 + s}, \quad x_k^0 \equiv x_k(t_0) = x_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad N = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Ітеруючи цю систему, можна знайти значення координат $x_k(t_N)$ для довільного моменту часу t_N . Отже, рівняння (15) задають у просторі \mathbb{R}_+^n деяку динамічну систему в дискретному часі:

$$x^0 \equiv x(t_0) \xrightarrow{T_1} x^1 \xrightarrow{T_2} x^2 \xrightarrow{T_3} \dots \xrightarrow{T_{N-1}} x^{N-1} \xrightarrow{T_N} x^N \xrightarrow{T_{N+1}} \dots, \quad (16)$$

де T_1, T_2, \dots позначають послідовність залежних від часу перетворень, заданих формулами (15). Завдяки (13) ця послідовність перетворень періодично повторюється через кожні n кроків. Тому для кожного $k = 1, \dots, n$ $T_k = T_{k+n} = T_{k+Nn}$, $N = 0, 1, \dots$. Нас цікавить поведінка вектора $x^N \equiv x(t_N)$ при $N \rightarrow \infty$. Покажемо, що при будь-яких початкових значеннях координат $x_k(t_0)$ послідовність векторів $x(t_N)$ наближається до фіксованої циклічної орбіти періоду n .

Теорема 2. *Кожна траєкторія $x^N = x(t_N)$ динамічної системи (16), заданої системою різницевих рівнянь (12), збігається у просторі \mathbb{R}_+^n до ω -множини Γ^∞ , інваріантної відносно впорядкованої послідовності перетворень T_1, \dots, T_n . Множина Γ^∞ складається із n векторів*

$$\Gamma^\infty = \{\Gamma_j^\infty\}_{j=1}^n.$$

Координати вектора Γ_1^∞ визначаються набором значень s_1, \dots, s_n джерела зовнішньо-

го впливу за формулами

$$\begin{aligned} \gamma_1^\infty &= \frac{s_1 + s_2 z + \dots + s_n z^{n-1}}{z^n - 1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma_k^\infty &= \frac{s_k + s_{k+1} z + \dots + s_{k-1} z^{n-1}}{z^n - 1} \equiv \frac{1}{z^n - 1} \sum_{j=0}^{n-1} s_{|k+j|(\bmod n)} z^j, \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma_n^\infty &= \frac{s_n + s_1 z + \dots + s_{n-1} z^{n-1}}{z^n - 1}, \end{aligned}$$

де $z = 1 + s$, $s = s_1 + \dots + s_n$. Кожен вектор Γ_j^∞ , $j > 1$, визначається $(j - 1)$ -кратним циклічним зсувом координат першого вектора $\Gamma_1^\infty = (\gamma_1^\infty, \dots, \gamma_n^\infty)$:

$$\gamma_1^\infty \rightarrow \gamma_2^\infty, \dots, \quad \gamma_k^\infty \rightarrow \gamma_{k+1}^\infty, \dots, \quad \gamma_n^\infty \rightarrow \gamma_1^\infty.$$

Гранична ω -множина Γ^∞ є циклічною орбітою динамічної системи (16). Вона не залежить від початкової точки $x = x(t_0)$ траєкторії $x(t_N)$ і повністю визначається джерелом зовнішнього впливу.

Доведення ґрунтується на аналізі поведінки координат $x_k(t_N)$ при $N \rightarrow \infty$. Виходячи з (12), одержуємо таку еволюцію (послідовність) значень першої координати:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{x_1 + s_1}{z} = \frac{x_1}{z} + \frac{s_1}{z}, \\ x_1^2 &= \frac{x_1^1 + s_2}{z} = \frac{x_1}{z^2} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z}, \\ x_1^3 &= \frac{x_1^2 + s_3}{z} = \frac{x_1}{z^3} + \frac{s_1}{z^3} + \frac{s_2}{z^2} + \frac{s_3}{z}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_1^N &= \frac{x_1^{N-1} + s_N}{z} = \frac{x_1}{z^N} + \frac{s_1}{z^N} + \frac{s_2}{z^{N-1}} + \dots + \frac{s_N}{z}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{17}$$

Друга координата має аналогічну еволюцію:

$$\begin{aligned}
 x_2^1 &= \frac{x_2 + s_2}{z}, \\
 x_2^2 &= \frac{x_2}{z^2} + \frac{s_2}{z^2} + \frac{s_3}{z}, \\
 x_2^3 &= \frac{x_2}{z^3} + \frac{s_2}{z^3} + \frac{s_3}{z^2} + \frac{s_4}{z}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_2^{N-1} &= \frac{x_2}{z^{N-1}} + \frac{s_2}{z^{N-1}} + \dots + \frac{s_N}{z}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

де, як у першому, так і у другому випадках послідовність s_N циклічно повторює свої значення s_1, \dots, s_n таким чином, що $s_{n+l} = s_l, l = 1, \dots, n$. Порівнюючи (17) і (18), помічаємо, що при довільному N

$$x_1^N - x_2^{N-1} = \frac{x_1}{z^N} + \frac{s_1}{z^N} - \frac{x_2}{z^{N-1}}.$$

Тому завдяки $z > 1$ робимо висновок, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (x_1^N - x_2^{N-1}) = 0.$$

Аналогічно для всіх $k < n$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (x_k^N - x_{k+1}^{N-1}) = 0.$$

При $k = n$ з тих же міркувань одержуємо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (x_n^N - x_1^{N-1}) = 0.$$

Таким чином, при $N \rightarrow \infty$ для $\gamma_k^\infty := x_k^{N=\infty}$ виникає система рівнянь

$$\frac{\gamma_1^\infty + s_1}{z} = \gamma_2^\infty, \dots, \frac{\gamma_k^\infty + s_k}{z} = \gamma_{k+1}^\infty, \dots, \frac{\gamma_n^\infty + s_n}{z} = \gamma_1^\infty.$$

Неважко знайти розв’язок цієї системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^\infty &= \frac{s_1 + s_2 z + \dots + s_n z^{n-1}}{z^n - 1}, \\
 \gamma_2^\infty &= \frac{s_2 + s_3 z + \dots + s_n z^{n-2} + s_1 z^{n-1}}{z^n - 1}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$\gamma_k^\infty = \frac{s_k + s_{k+1}z + \dots + s_{k-1}z^{n-1}}{z^n - 1},$$

$$\gamma_n^\infty = \frac{s_n + s_1z + \dots + s_{n-1}z^{n-1}}{z^n - 1}.$$

Введемо вектор $\Gamma_1^\infty = (\gamma_1^\infty, \dots, \gamma_n^\infty)$. Використовуючи явну форму перетворень T_1, \dots, T_n , задану рівняннями (12), безпосередньо перевіряємо, що

$$(T^1 \Gamma_1^\infty)_k = \frac{\gamma_k^\infty + s_k}{z} = \gamma_{k+1}^\infty, \quad k < n.$$

Наприклад, при $k = 1$ маємо

$$\begin{aligned} (T_1 \Gamma_1^\infty)_1 &= \frac{\gamma_1^\infty + s_1}{z} = \frac{s_1 + s_2z + \dots + s_n z^{n-1}}{(z^n - 1)z} + \frac{s_1}{z} = \\ &= \frac{s_1 + s_2z + \dots + s_n z^{n-1} + s_1(z^n - 1)}{(z^n - 1)z} = \frac{s_2z + \dots + s_n z^{n-1} + s_1 z^n}{(z^n - 1)z} = \gamma_2^\infty. \end{aligned}$$

Зокрема, при $k = n$

$$(T_1 \Gamma_1^\infty)_n = \frac{\gamma_n^\infty + s_n}{z} = \gamma_{n+1}^\infty = \gamma_1^\infty.$$

Таким чином, ми показали, що $T_1 \Gamma_1^\infty = \Gamma_2^\infty$, де використано позначення

$$\Gamma_2^\infty := (\gamma_2^\infty, \dots, \gamma_n^\infty, \gamma_1^\infty).$$

Аналогічно, $T_2 \Gamma_2^\infty = \Gamma_3^\infty$, де вектор Γ_3^∞ утворюється однократним циклічним зсувом вліво координат вектора Γ_2^∞ . Далі застосовуємо перетворення T_3 до вектора Γ_3^∞ і послідовно продовжуємо ці дії. За побудовою на n -му кроці повертаємося до вектора $\Gamma_1^\infty = T^n \Gamma_n^\infty$.

Теорему 2 доведено.

Встановлений результат можна переформулювати у вигляді іншої теореми з простішим доведенням, якщо ввести іншу динамічну систему, породжену перетворенням, що не залежить від часу. З цією метою побудуємо у просторі \mathbb{R}_+^n перетворення T (не залежне від часу), яке породжує динамічну систему, по суті, еквівалентну (16), але в іншій системі координат. При $N = 0$ позначимо $y^0 = x^0$, $y_k^0 = x_k^0$, $k = 1, 2, \dots, n$, і визначимо для $N = 1$ перетворення T формулами

$$(Ty)_k \equiv y_k^1 = \frac{y_{k+1}^0 + s_k}{1 + s}, \quad s_k = s(\alpha k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (19)$$

де покладемо

$$y_{n+1}^0 = y_1^0 \quad \text{при} \quad k = n.$$

Аналогічно до (19) для будь-якого $N \geq 1$ координати вектора y^N визначаються формулами

$$(T^N y)_k \equiv y_k^N = \frac{y_{k+1}^{N-1} + s_k}{1 + s}, \quad y_{n+1}^{N-1} = y_1^{N-1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (20)$$

Виявляється, що для довільних початкових значень координат $y_k^0 = x_k^0$ послідовність векторів y^N збігається до єдиної нерухомої точки у просторі \mathbb{R}_+^n .

Теорема 3. Кожна траєкторія $\{y^N\}_{N=0}^\infty$ динамічної системи, породженої перетворенням T , згідно з формулами (19), (20) збігається у просторі \mathbb{R}_+^n до нерухомої точки, заданої вектором

$$y^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} T^N y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

координати якого визначаються лише набором значень s_1, \dots, s_n джерела зовнішнього впливу:

$$y_k^\infty = \frac{s_k + s_{k+1}z + \dots + s_{k-1}z^{n-1}}{z^n - 1} \equiv \frac{1}{z^n - 1} \sum_{j=0}^{n-1} s_{(k+j) \pmod n} z^j, \quad k = 1, \dots, n, \quad (21)$$

де $z = 1 + s$ (див. (14)). Зокрема,

$$y_1^\infty = \frac{s_1 + s_2 z + \dots + s_n z^{n-1}}{z^n - 1}, \quad y_n^\infty = \frac{s_n + s_1 z + \dots + s_{n-1} z^{n-1}}{z^n - 1}.$$

Доведення. З формул (20) знаходимо, що кожену координату y_k^N при великому N можна записати у вигляді суми двох доданків. Перший доданок має вигляд $y_l^0 z^{-N}$, $l = 1, \dots, n$, та залежить від k та N . Очевидно, цей доданок збігається до нуля, оскільки всі $|y_l^0| \leq 1$, а $z > 1$. Другий доданок є сумою N членів геометричної прогресії із знаменником $q = \frac{1}{z^n}$ і першим членом

$$a_k = s_n z^{-n} + s_{n+1} z^{-n+1} + \dots + s_{k-1} z^{-1},$$

де $s_0 = s_n$, $s_{n+1} = s_1$. При $N \rightarrow \infty$ для y_k^N одержуємо значення з набору (21). Теорему 3 доведено.

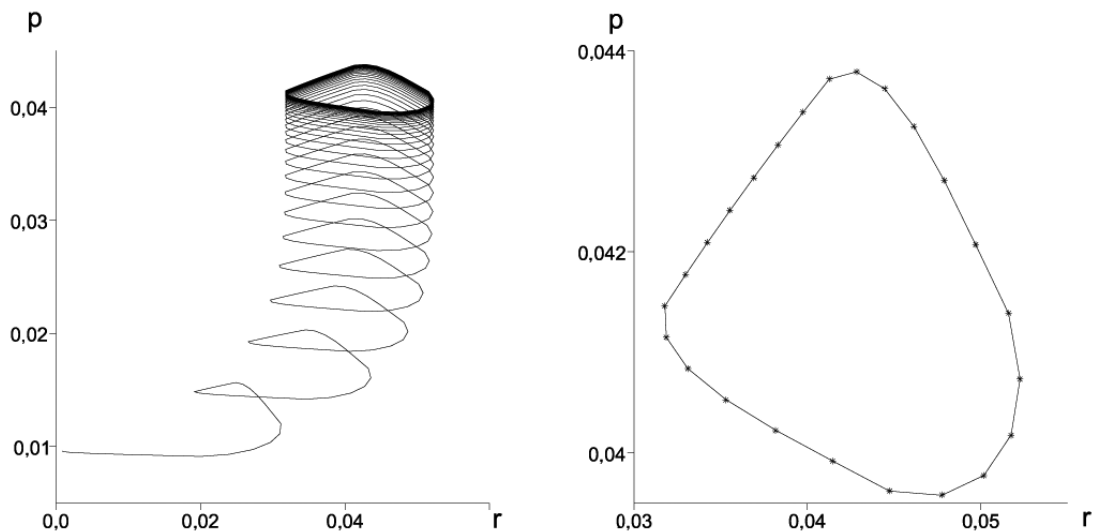


Рис. 3. Еволюція та граничний цикл довільної пари координат у фазовому просторі.

Приклад 2. Модель еволюції динамічної системи з циклічним підживленням та перемішуванням (без конфліктної взаємодії).

Траєкторія кожного вектора $p(t_N), r(t_N)$ динамічної системи (16) при довільних $p(0), r(0) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ збігається до циклічної орбіти $\{\Gamma^\infty, \Psi^\infty\}$ періоду n (див. рис. 3). Тут Ψ^∞ позначає граничну орбіту для $\{r(t_N)\}_{N=0}^\infty$, яка існує згідно з теоремою 2.

4. Існування циклічних орбіт у загальному випадку. У загальному випадку еволюція динамічної системи (4) відбувається під впливом одночасної взаємодії різної природи: внутрішньої конфліктної взаємодії між стихіями F, W ; взаємодії із зовнішнім джерелом впливу на стихію F у вигляді періодичного підживлення; нарешті, процесу міграції, який описується у термінах внутрішнього перемішування розподілів стихії W по регіонах. Виявляється, що і в цьому випадку практично кожна траєкторія динамічної системи асимптотично наближається до фіксованої циклічної орбіти.

Цей результат можна пояснити якісно таким чином. Згідно з теоремою 1 чисто конфліктна взаємодія між F, W гарантує існування фіксованих граничних значень p_k^∞, r_k^∞ для кожної пари координат $p_k^N, r_k^N, k = 1, \dots, n$. Періодичне зовнішнє підживлення для F та процес перемішування для W , який також має періодичний характер, приводять до фіксованих періодичних зсувів передграничних значень цих координат. При цьому важливо, що величини змін координат завдяки відштовхувальній конфліктній взаємодії між F та W є незначними у порівнянні з ефектами зовнішнього впливу і внутрішнього перемішування. Тому, як правило, всі пари координат $p_k^N, r_k^N, k = 1, \dots, n$, при $N \rightarrow \infty$ наближаються до однієї і тієї ж циклічної орбіти, яка є збуренням ω -граничної множини $\{\Gamma^\infty, \Psi^\infty\}$ з теореми 2.

Для точного формулювання цього результату розглянемо динамічну систему

$$\{p^N, r^N\} \xrightarrow{*} \{p^{N+1}, r^{N+1}\}, \quad p^0, r^0 \in \mathbb{R}_+^n, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (22)$$

в якій перетворення $*$ задано набором різницевих рівнянь у термінах координат:

$$p_k^{N+1} = \frac{p_k^N(\theta^N + 1 - r_k^N) + s_{k+N}}{z_p}, \quad (23)$$

$$r_k^{N+1} = \frac{r_k^N(\theta^N + 1 - p_k^N) + h_{k+N}}{z_r}, \quad k = 1, \dots, n,$$

з $z_p = 1 + s, z_r = 1 + h$, де залежність послідовностей s_{k+N}, h_{k+N} від дискретного часу є періодичною: $s_{N+n} = s_N, h_{N+n} = h_N$.

Комп’ютерне моделювання на численних конкретних прикладах показує, що кожна траєкторія динамічної системи (22), заданої відображенням (23), збігається до певної граничної циклічної орбіти. При цьому проєкції цієї орбіти на фазові простори кожної пари координат $\{p_k, r_k, k = 1, \dots, n\}$ мають однакову форму. Наведена нижче теорема є правдоподібною, але швидше гіпотетичною, оскільки на даний момент має лише схематичне доведення.

Теорема 4. *Якщо всі пари координат $\{p_k^N, r_k^N\}, k = 1, \dots, n$, збігаються до однієї і тієї ж циклічної орбіти на площині, то гранична ω -множина $\{\Gamma, \Psi\}$ динамічної системи*

(22) складається з набору $2n$ векторів: $\Gamma = \{\Gamma_j\}_{j=1}^n$, $\Psi = \{\Psi_j\}_{j=1}^n$, $\Gamma_j, \Psi_j \in \mathbb{R}_+^n$. Координати першої пари векторів $\Gamma_1 = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\Psi_1 = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ є розв'язками системи $2n$ алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}\gamma_{k+1} &= \frac{\gamma_k(\theta + 1 - \psi_k) + s_k}{1 + s}, \\ \psi_{k+1} &= \frac{\psi_k(\theta + 1 - \gamma_k) + h_k}{1 + h}, \quad k = 1, \dots, n,\end{aligned}\tag{24}$$

де $\gamma_{n+1} = \gamma_1$, $\psi_{n+1} = \psi_n$, $\theta = \sum_{k=1}^n \gamma_k \psi_k$. Кожна пара векторів Γ_j, Ψ_j , $1 < j \leq n$, утворюється циклічним зсувом координат першої пари векторів Γ_1, Ψ_1 на $j - 1$ крок вліво. При цьому однократний зсув координат векторів Γ_n, Ψ_n приводить до Γ_1 та Ψ_1 відповідно.

Доведення. Безпосередня ітерація координат p_k^N, r_k^N , згідно з формулами (23), показує, що при $N = Mn + l$, $l = 1, \dots, n$, $M = 1, 2, \dots$, кожен з цих координат (далі детально досліджуємо лише p_k^N) можна подати у вигляді двох груп доданків різного характеру поведінки:

$$p_k^N = I_k^N + \Pi_k^N,$$

де

$$I_k^N = \frac{F_k^N(p, r)}{z_p^N}, \quad \Pi_k^N = \sum_{j=1}^n S_{kj}^N,$$

$F_k^N(p, r)$ — деякий поліном від координат векторів p, r , а Π_k^N (завдяки періодичним властивостям послідовностей s_N, h_N) розкладається в комбінацію часткових сум S_{kj}^N геометричних прогресій з одним і тим же знаменником (що не перевищує одиниці), але різними першими членами, які виражаються через $s_i, h_i, i = 1, \dots, n$. Неважко переконатися, що значення F_k^N рівномірно обмежені, оскільки всі координати $p_k, r_k \leq 1$. Тому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_k^N = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

тому що $z_p = 1 + s > 1$. Беручи до уваги, що всі геометричні прогресії, з яких складаються S_{kj}^N , є збіжними, робимо висновок, що існують границі

$$\gamma_k = \lim_{M \rightarrow \infty} \Pi_k^{Mn}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Докладний аналіз структури доданків S_{kj}^N (з урахуванням формул (23)) показує, що для членів Π_k^N виконуються співвідношення

$$\Pi_1^N = \Pi_n^{N+1}, \quad \Pi_k^N = \Pi_{k-1}^{N+1}, \quad k > 1.\tag{25}$$

Тому при $Mn = N \rightarrow \infty$, завдяки припущенню теореми, граничні значення γ_k відрізняються від граничних значень γ_k^∞ з теореми 2 на відносно малі величини, які називаємо зсувами і позначаємо через d_k^γ . Вони також є сумами збіжних геометричних прогресій,

перші члени яких визначаються добутками $s_k \cdot h_k$ та добутками початкових координат $p_k \cdot r_k$. Аналогічним чином переконаємося, що існують границі $\gamma_k^l = \lim_{M \rightarrow \infty} \Pi_k^{Mn+l}$, $l = 1, \dots, n - 1$. Більш того, завдяки (25) залежність цих границь від l є циклічною. Як наслідок, робимо висновок, що залежність величин зсувів d_k^l від індексу l також є циклічною і мають місце формули

$$d_k^l(l) = d_{k+l}^l, \quad d_{n+1}^l = d_1^l. \quad (26)$$

Цей факт приводить до того, що граничні значення γ_k^l , $k = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, n - 1$, можна одержати циклічним зсувом на l кроків вліво координат γ_k :

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \rightarrow (\gamma_l, \dots, \gamma_n, \dots, \gamma_1, \dots, \gamma_{l-1}).$$

Зауважимо, що формули (26) (разом із аналогічними формулами для зсувів d_k^ψ) є точним математичним записом припущення теореми про єдину форму орбіти для кожної пари координат. Таким чином, при виконанні умови (26) послідовність p_1^N при $N \rightarrow \infty$ наближається до граничної ω -множини, яка утворює вектор Γ_1 з координатами $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, а послідовність p_l^N , $1 < l \leq n$, — до аналогічної граничної ω -множини, яка утворює вектор Γ_l з координатами $(\gamma_l, \dots, \gamma_n, \dots, \gamma_1, \dots, \gamma_{l-1})$.

Аналогічні міркування і твердження справедливі і при ітерації координат r_l^N , що приводить до знаходження системи векторів Ψ_l , які (при $1 < l \leq n$) можна виразити послідовним зсувом координат першого вектора $\Psi_1 = (\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Таким чином, у термінах граничних векторів один крок перетворення, заданого рівняннями (23), приводить до рівності

$$T_1 \Gamma_1 = \Gamma_2,$$

де

$$(T_1 \Gamma_1)_k = (\Gamma_2)_k = \frac{\gamma_k(\theta + 1 - \chi_k) + s_k}{1 + s}, \quad k = 1, \dots, n.$$

При цьому координати вектора Γ_2 утворюються зсувом вліво координат вектора Γ_1 :

$$(\Gamma_2)_k = \gamma_{k+1},$$

де $\gamma_{n+1} = \gamma_1$. Для координат $(T_1 \Psi_1)_k$ виконується аналогічна рівність

$$(T_1 \Psi_1)_k = (\Psi_2)_k = \psi_{k+1}.$$

На другому кроці виникають вектори Γ_3, Ψ_3 , а на j -му кроці маємо $\Gamma_j = T_j \circ \dots \circ T_1 \Gamma_1$, або в термінах координат

$$(T_j \circ \dots \circ T_1 \Gamma_1)_k = \gamma_{k+j}, \quad (T_j \circ \dots \circ T_1 \Psi_1)_k = \psi_{k+j}, \quad j < n.$$

При $j = n$ отримуємо

$$T_n \circ \dots \circ T_1 \Gamma_1 = \Gamma_1,$$

або в термінах координат

$$(T_n \circ \dots \circ T_1 \Gamma_1)_k = \gamma_k, \quad (T_n \circ \dots \circ T_1 \Psi_1)_k = \psi_k.$$

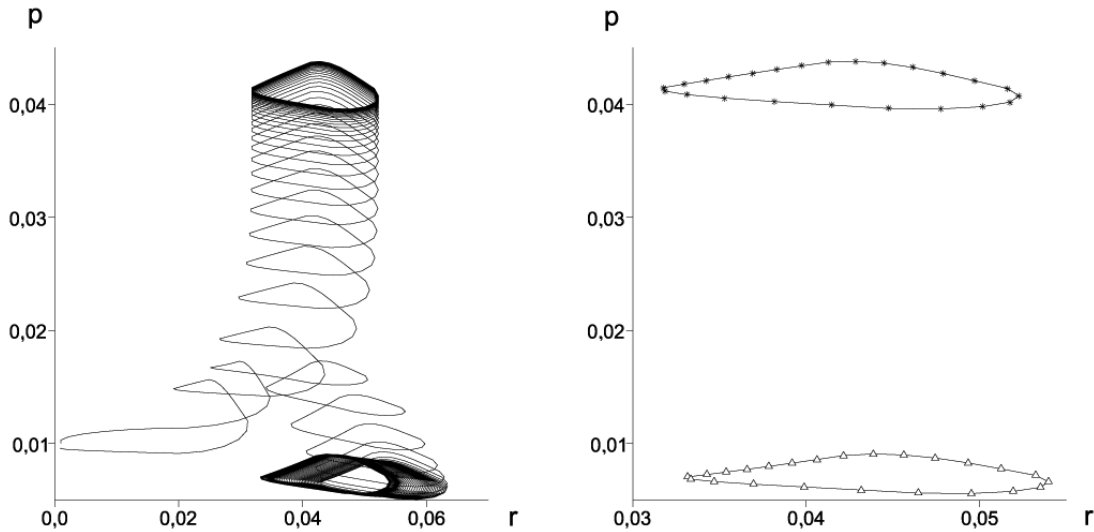


Рис. 4. Порівняння еволюцій та граничних орбіт.

Отже, ми довели, що при $N \rightarrow \infty$ вектори p^N, r^N наближаються до циклічної орбіти, період якої дорівнює розмірності простору \mathbb{R}_+^n :

$$\{\Gamma_1, \Psi_1\} \xrightarrow{T_1} \{\Gamma_2, \Psi_2\} \xrightarrow{T_2} \dots \xrightarrow{T_{n-1}} \{\Gamma_n, \Psi_n\} \xrightarrow{T_n} \{\Gamma_1, \Psi_1\}.$$

Важливо, що скалярний добуток (Γ_j, Ψ_j) не залежить від індексу $j = 1, \dots, n$. Тому показник конфліктності θ є сталою величиною, яка залежить, взагалі кажучи, від початкової пари векторів $\{p, r\}$.

Той факт, що координати граничних векторів задовольняють рівняння (24), безпосередньо впливає з явного вигляду конфліктного перетворення $*$.

Теорему 4 доведено.

Отже, в загальному випадку, коли динамічна система визначається відображенням заданим формулами (23), і виконується умова (26), кожна траєкторія $\{p^N, r^N\}$ збігається у просторі \mathbb{R}_+^n до ω -множини, яка складається з циклічної орбіти $\{\Gamma, \Psi\}$. Інваріантність цієї множини відносно генератора $*$ динамічної системи впливає з формул (24).

Приклад 3. Модель динамічної системи, генератор якої включає в себе конфліктну взаємодію, циклічне підживлення та перемішування.

Для динамічних систем конфлікту із зовнішнім підживленням та внутрішнім перемішуванням не існує нерухомих рівноважних станів. Кожна траєкторія такої системи збігається до циклічної орбіти.

Урахування конфліктної взаємодії деформує циклічну орбіту з прикладу 2. На рис. 4 зображено траєкторію еволюції та граничну орбіту динамічної системи з конфліктною взаємодією, циклічним підживленням та перемішуванням (зображені знизу) в порівнянні з траєкторією та граничною орбітою динамічної системи без конфліктної взаємодії (зображені зверху).

5. Комп'ютерний аналіз. Якщо підживлення і перемішування мають однакові напрямки, то кожна пара координат $p_k^N, r_k^N, k = 1, \dots, n$, наближається до однієї фіксованої

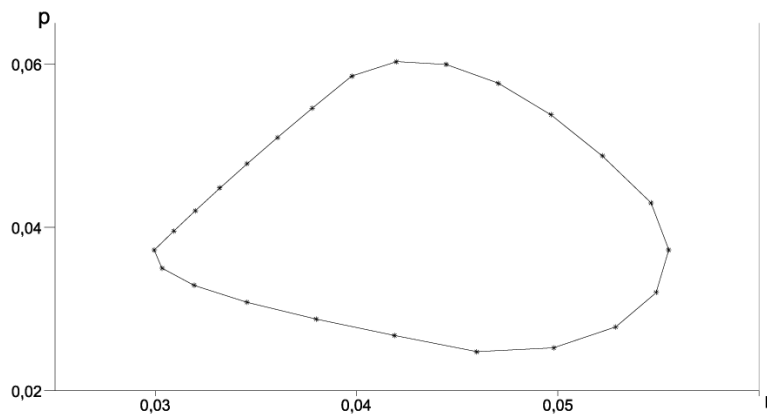


Рис. 5. Типова форма граничної орбіти.

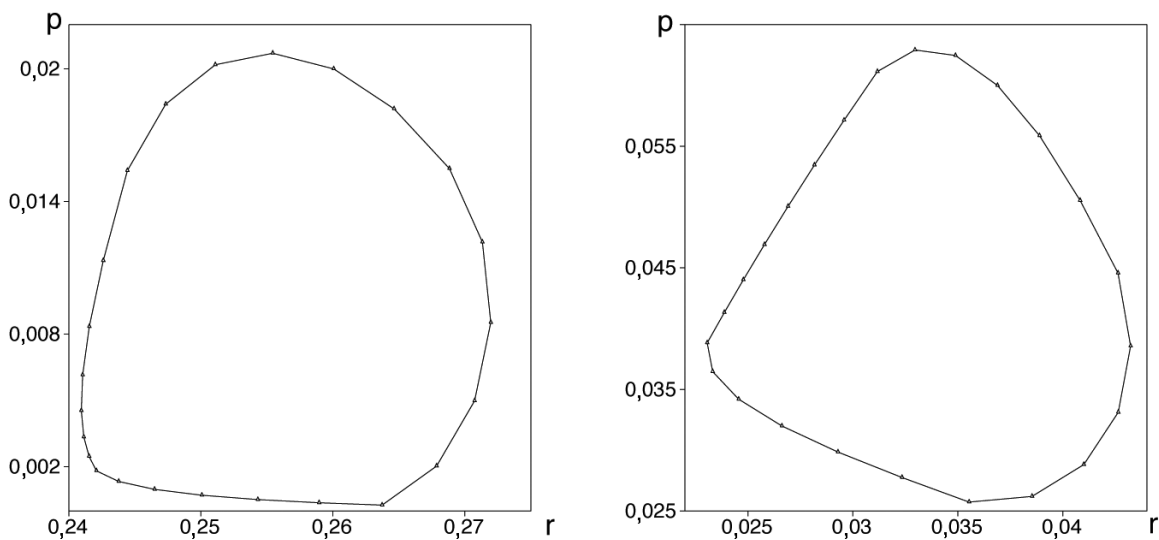


Рис. 6. Ефект деформації граничних орбіт.

циклічної орбіти (див. рис. 5). Точна форма орбіти залежить від величин s_k , h_k згідно з формулами (24).

При зменшенні величин h_k виникає ефект деформації орбіт в окремих регіонах (див. рис. 6). Значна деформація орбіт є наслідком привалювання конфліктної взаємодії. У випадку, коли напрямки коливань підживлення і перемішування протилежні, кожна пара координат p_k^N , r_k^N наближається до своєї індивідуальної циклічної орбіти (див. рис. 7). При цьому форма орбіти в конкретному регіоні залежить від нелокальної конфліктної взаємодії.

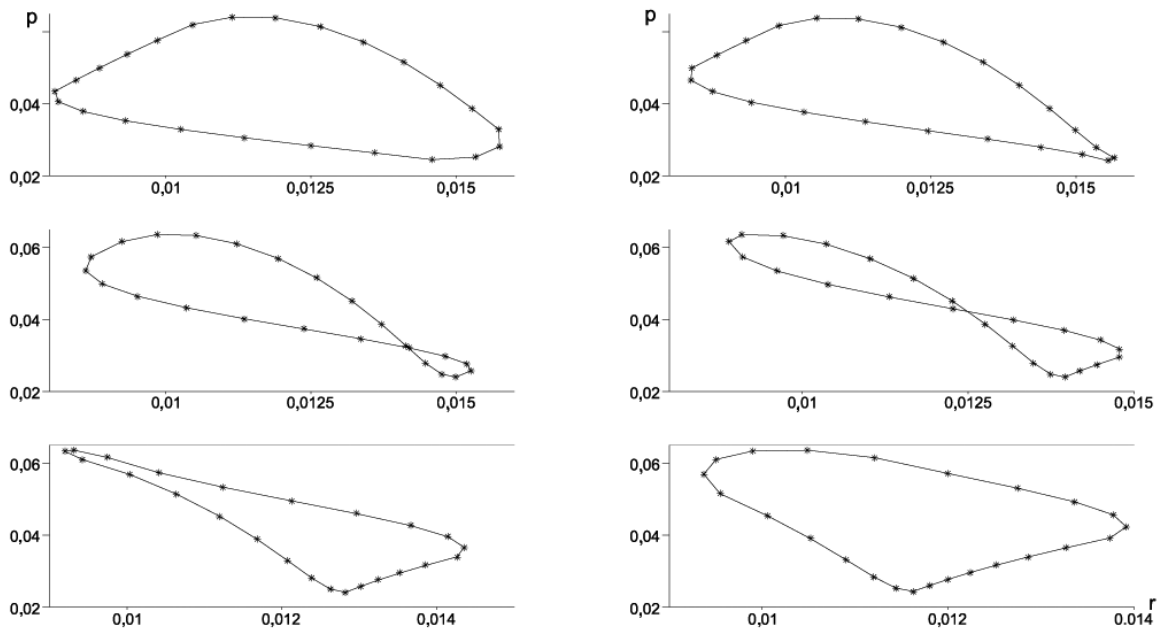


Рис. 7. Різні форми граничних орбіт.

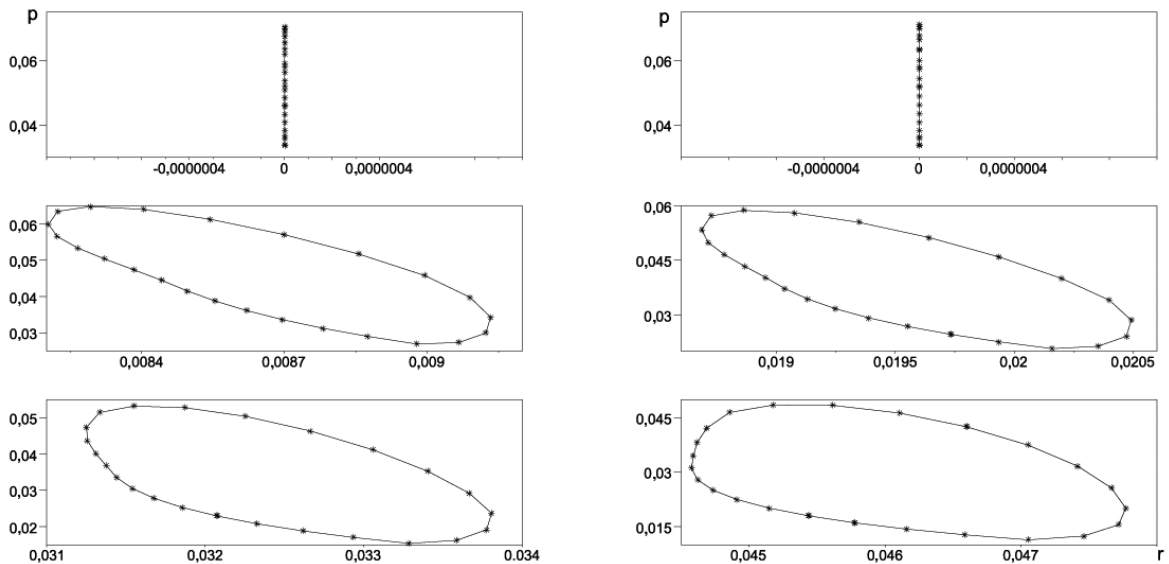


Рис. 8. Форми орбіт при сталому перемішуванні.

Аналогічний ефект виникає при сталому (неперіодичному) перемішуванні. При цьому можуть з'явитися координати $r_j^\infty = 0$ (див. рис. 8). Наближення r_j^N до нуля є наслідком мінімізації перемішування.

6. Відкриті питання. В цій роботі ми ставили собі за мету показати, що поведінка траєкторій складної моделі, яка описує конфліктну взаємодію між абстрактними альтернативними стихіями F та W під впливом зовнішнього джерела підживлення для F та

фіксованим законом внутрішнього перемішування (міграцією) для W , в елементарному варіанті нагадує фізичну картину перерозподілу теплової енергії та вологості на поверхні планети.

Для побудови закону конфліктної взаємодії ми виходимо з того, що теплота (стихія F) та вологість (стихія W) мають протилежні, в певному сенсі, альтернативні властивості. Внаслідок цього виникає конфронтаційний перерозподіл початкової ваги їхньої наявності у різних регіонах спільного простору існування. Але це лише одна з причин динамічної картини. В розглядуваній математичній моделі ми враховуємо також дію зовнішнього джерела енергії. Воно систематично по певному закону підживлює запас теплоти в кожному конфліктному регіоні. При цьому повна кількість теплової енергії в усьому просторі залишається в середньому сталою завдяки природній дисипації. Математично це забезпечується нормуванням на кожному кроці конфліктного перетворення. Варто зазначити, що джерело зовнішнього впливу збурює можливу компромісну рівновагу між альтернативними стихіями, зокрема викликає переміщення вологості з високо-температурних регіонів у холодні. В моделі це забезпечується процедурою внутрішнього перемішування.

В побудованій вище моделі повний математичний механізм конфліктної взаємодії (див. (5)) між аналогом теплової енергії (стихія F) та водою (стихія W) фактично описано в термінах умовних імовірностей наявності цих стихій у кожному з регіонів замкненого простору (кола). При цьому беруться до уваги лише деякі, найбільш важливі на наш погляд, причини перерозподілу альтернативних стихій по різних регіонах. Звичайно, головним „двигуном” динамічної картини є зовнішнє джерело енергії, яке впливає на стихію F . Але без введення додаткового механізму внутрішнього перемішування (міграції) для стихії W , наприклад завдяки вітру, еволюція системи стає досить примітивною, зокрема можливий варіант, коли увесь запас W намертво зосереджується в одному з регіонів.

Урахування всіх зазначених вище причин перерозподілу ми проводимо в три етапи. У пункті 2 розглядаємо найпростіший абстрактний варіант динамічної системи з чисто конфліктною взаємодією типу „мінус-мінус”. Доводимо теорему про еволюційну поведінку системи та існування граничного рівноважного стану для кожної траєкторії. Описуємо точні значення компромісних розподілів у термінах початкових станів.

У пункті 3 досліджується модель з двох незалежних підсистем без конфліктної взаємодії, але з періодичним зовнішнім впливом. Показано, що кожна траєкторія такої системи асимптотично наближається до фіксованої циклічної орбіти, не залежної від початкової точки. Гранична орбіта повністю визначається джерелом зовнішнього впливу, лише включення конфліктної взаємодії між підсистемами змінює граничну поведінку.

У пункті 4 показано, що факт існування циклічних орбіт та збіжність до них траєкторій динамічної системи залишається справедливим у загальному випадку, коли діють усі три причини перерозподілу стихій F та W по різних регіонах. Звичайно, в цьому випадку граничні орбіти є залежними від початкової точки (не є атракторами) і чутливі до співвідношень між потужностями зовнішніх впливів на F та W . Зокрема, з’являються регіони з особливою поведінкою, неподібною до поведінки в більшості регіонів. А у випадку, коли підживлення для стихії F відбувається у напрямку, протилежному до міграційного перемішування для стихії W , практично в усіх регіонах спостерігається своя індивідуальна гранична циклічна орбіта. Для встановлення точної характеристики таких ефектів потрібні подальші дослідження.

Можливо, що існування циклічних граничних орбіт в теоремах 3, 4 є наслідком

абстрактного твердження теорії динамічних систем, який ми наводимо, як евристичний, без доведення. Якщо відомо, що траєкторії динамічних систем, породжених генераторами T_1, T_2 , в одному і тому ж просторі збігаються до нерухомих граничних станів або циклічних орбіт, то траєкторії динамічної системи, породженої генератором $T_3 = T_1 \circ T_2$, також збігаються до нерухомого стану або циклічної орбіти.

Нагадаємо, що проблема існування циклічних орбіт для динамічних систем на площині

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y)$$

має цікаву історію. З нею пов'язана шістнадцята проблема Гільберта, яка досі до кінця не розв'язана. Найбільш відомою у цьому напрямку є теорема Пуанкаре – Бендіксона, яка гарантує існування циклічних орбіт, якщо функції f, g є неперервно диференційовними, координати $x(t), y(t)$ обмежені і немає рівноважної точки.

Теорему 4 можна розглядати як деяке узагальнення теореми Пуанкаре – Бендіксона у просторі $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$, $n \geq 2$. Дійсно, при додаткових умовах теорема 4 зводиться до теореми Пуанкаре – Бендіксона. Припустимо, що рівняння (23) мають єдиний розв'язок для кожної пари початкових векторів $p, r \in \mathbb{R}_+^n$. Тоді, згідно з теоремою про неявну функцію, для кожної пари $p_i(t), r_i(t)$ існують функції $f_i(p, r), g_i(p, r)$ такі, що рівняння (23) можна записати у вигляді

$$\dot{p}_i = f_i(p, r), \quad \dot{r}_i = g_i(p, r).$$

Припускаючи додатково, що ці функції є диференційовними, робимо висновок про існування замкнених циклічних орбіт.

1. *von Neumann J., Morgenstern O.* Theory of games and economic behavior. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. — 776 p. (Переклад: фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970).
2. *Jones A. J.* Game theory: mathematical models of conflict // Math. and Appl. — New York etc., 1980. — 286 p.
3. *Owen G.* Game theory. — San Diego, CA: Acad. Press, Inc., 1995. — 447 p.
4. *Schelling T. C.* The strategy of conflict. — Cambridge, MA: Harvard Univ. Press, 1981. — 309 p.
5. *Шарковський А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерних отображений. — Киев: Наукова думка, 1989.
6. *Шарковський А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1986. — 280 с.
7. *de Melo W., van Strien S.* One dimensional dynamics. — Berlin: Springer-Verlag, 1993. — 605 p.
8. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary games and population dynamics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. — 323 p.
9. *Murray J. D.* Mathematical biology I: An Introduction. — New York, Tokio: Springer, 2002. — 551 p.
10. *Epstein J. M.* Nonlinear dynamics, mathematical biology, and social science. — Addison-Wisley Publ. Co., 1997. — 164 p.
11. *Lonzonn Y., Solomon S., Goldenberg J., Mazarsky D.* World-size global markets lead to economic instability // Acr. life. — 2003. — P. 357–370.
12. *Maron M.* Modelling populations: from malthus to the threshold of artificial life, evolutionary and adaptive systems. — Univ. Sussex, 2003. — P. 1–17.
13. *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введення в сучасну теорію динамічних систем з оглядом останніх досягнень / Пер. з англ. під ред. А. С. Городецького. — М.: МЦНМО, 2005. — 464 с.

14. Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика // Proc. Int. Congr. Math. — 1954. — **1**. — P. 315–333.
15. Колмогоров А. Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций // Проблемы кибернетики. — 1972. — **25**, вып. 2. — С. 101–106.
16. Арнольд В. И. Теория катастроф. — М.: Наука, 1986. — 126 с.
17. Понтрягин Л. С. Звичайні диференціальні рівняння. — Київ, 2000.
18. Чикрий А. А. Конфликтно-управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.
19. Chikrii A. Matychyn I., Chikrii K. Differential game with impulse control // Adv. Dynam. Game Theory, Ann. Int. Soc. Dynam. Games. — 2007. — **9**. — P. 37–57.
20. Кривонос Ю. Г., Матичин И. И., Чикрий А. А. Динамические игры с разрывными траекториями. — Киев: Наук. думка, 2005. — 220 с.
21. Takahashi K. I., Salam K. M. D. M. Mathematical model of conflict with non-annihilating multi-opponent // J. Interdiscipl. Math. — 2006. — **9**, № 3. — P. 459–473.
22. Bischi G.-I., Merlone U. Global dynamics in binary choice models with social influence // J. Math. Sociology. — 2009. — **33**. — P. 1–26.
23. Bischi G.-I., Tramontana E. Three-dimensional discrete-time Lotka–Volterra models with an application to industrial clusters // Commun. in Nonlinear Sci. and Numer. Simulat. — 2009. — **15**, № 10. — P. 3000–3014.
24. Bellomo N., Herrero M., Tosin A. On the dynamics of social conflicts: looking for the black swan // Kinetic and Relat. Models. — 2013. — **6**. — P. 459–479.
25. Bischi G.-I., Gallegati M., Gardini L., Leombruni R., Palestini A. Herd behavior and nonfundamental asset price fluctuations in financial markets // MacDynamics. — 2006. — **10**. — P. 502–528.
26. Kar T. K. Modelling and analysis of a harvested prey-predator system incorporating a prey refuge // J. Comput. and Appl. Math. — 2006. — **185**. — P. 19–33.
27. Belan E. P., Mikhalevich M. V., Sergienko I. V. System analysis, cycles in economic systems with open labor markets // Cybern. and Syst. Anal. — 2008. — **44**, № 4.
28. Кошманенко В. Д. Теорема про конфлікт для пари стохастических векторов // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 4. — P. 555–560.
29. Koshmanenko V. Theorem of conflicts for a pair of probability measures // Math. Meth. Oper. Res. — 2004. — **59**, № 2. — P. 303–313.
30. Koshmanenko V., Samoilenko I. The conflict triad dynamical system // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2011. — **16**. — P. 2917–2935.
31. Кошманенко В. Д., Самойленко І. В. Модель динамічної системи конфліктної тріади // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 1. — С. 55–75.
32. Koshmanenko V. D., Kharchenko N. V. Invariant points of a dynamical system of conflict in the space of piecewise-uniformly distributed measures // Ukr. Math. J. — 2004. — **56**, № 7. — P. 927–938.
33. Боднарчук М. В., Кошманенко В. Д., Харченко Н. В. Властивості граничних станів динамічної системи конфлікту // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 4. — С. 446–461.
34. Боднарчук М. В., Кошманенко В. Д., Самойленко І. В. Динаміка взаємодії конфлікту між системами з внутрішньою структурою // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 4. — С. 435–450.
35. Albeverio S., Koshmanenko V., Samoilenko I. The conflict interaction between two complex systems: cyclic migration // J. Interdiscipl. Math. — 2008. — **11**, № 2. — P. 163–185.
36. Koshmanenko V., Samoilenko I. The cyclic conflict fire-water model // Int. Conf. "System Analysis and Information Technology". — 2008. — **43**.
37. Koshmanenko V., Kharchenko N. The conflict fire-water cyclic model // Int. Conf. "Problems of Decision Making under Uncertainties". — Kyiv; Rivne, 2008. — **24**.

Одержано 31.12.13