УДК 517.956

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ СИМВОЛАМИ

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, Р. І. Петришин

Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
Україна, 58012, Чернівці, вул. М. Коцюбинського, 2
e-mai: alfaolga1@gmail.com

We prove that a Cauchy problem for a pseudodifferential equation having a pseudo-Bessel operator with variable symbol has a solution in the class of bounded and even functions on $\mathbb{R}$.

Устанавливается разрешимость задачи Коши для эволюционного уравнения с псевдобесселевым оператором с переменным символом в классе ограниченных четных на $\mathbb{R}$ *функций.*

Диференціальні рівняння, які містять коефіцієнти, необмежені в деякій області з $\mathbb{R}^n$, відносяться, як відомо, до сингулярних диференціальних рівнянь. До сингулярних рівнянь відносяться й еволюційні рівняння параболічного типу з оператором Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$ (B-параболічні рівняння) через наявність у його структурі виразу $1/x$. Такі рівняння вироджуються на межі області, і за внутрішніми властивостями вони близькі до рівномірно параболічних рівнянь. Побудові класичної теорії задачі Коші для сингулярних параболічних рівнянь присвячено ряд робіт (див. [1] та наведену там бібліографію). У класах розподілів та ультрарозподілів задача Коші для таких рівнянь вивчалася в [2, 3] та інших працях.

Як відомо, оператор Бесселя можна визначити за допомогою співвідношення $B_\nu\varphi = -F_B^{-1}[\sigma^2 F_B[\varphi]]$, де F_B — перетворення Бесселя, φ — елемент простору, в якому визначено вказане перетворення, тому еволюційні рівняння з оператором Бесселя природно віднести до псевдодиференціальних рівнянь. До такого ж класу рівнянь слід віднести й еволюційні рівняння з оператором $A = F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}[a(t,x;\sigma)F_{B_{x\to\sigma}}]$, де $a(t,x;\sigma)$ — функція (символ) оператора A, яка задовольняє певні умови (зокрема, є однорідною функцією аргументу σ, недиференційовною у точці $\sigma = 0$). Оператор A далі називатимемо псевдобесселевим. Еволюційні рівняння з псевдобесселевими операторами розпочали досліджувати О. М. Ленюк, Д. І. Спіжавка та В. В. Городецький.

Для подальшого розвитку теорії еволюційних псевдодиференціальних рівнянь важливим є питання побудови нових класів символів, які містять відомий клас символів, що задовольняють умову „параболічності" та розвиток теорії задачі Коші для еволюційних рівнянь з операторами, побудованими за такими функціями, з початковими даними з різних функціональних просторів. У даній роботі будуються такі класи функцій-символів, встановлюється розв'язність задачі Коші для еволюційного рівняння з псевдобесселевим оператором зі змінним символом у класі обмежених неперервних парних на $\mathbb{R}$ функцій.

1. Простори $\theta_{M,\rho}$, $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$. Нехай M, $\rho : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ — неперервні парні на $\mathbb{R}$ функції, диференційовні, монотонно зростаючі на $(0,\infty)$, $M(0) = \rho(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} M(x) = \lim_{x\to+\infty}\rho(x) = +\infty$, причому $\rho(x) = \int_0^x \omega(\xi)d\xi$ для $x \geq 0$, де ω — зростаюча й неперервна на $[0,\infty)$ функція, $\omega(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty}\omega(x) = +\infty$. Функція ρ є опуклою на $[0,+\infty)$, тобто: а) $\forall\{x_1,x_2\}\subset[0,+\infty) : \rho(x_1)+\rho(x_2)\le\rho(x_1+x_2)$; б) $\forall\alpha\ge 1\ \forall x\in[0,\infty) : \rho(\alpha x)\ge \ge \alpha\rho(x)$; в) $\forall\alpha\in(0,1)\ \forall x\in[0,\infty) : \rho(\alpha x)\le\alpha\rho(x)$. Оскільки похідна ω функції ρ при $x\to+\infty$ необмежено зростає, то функція ρ при $x\to+\infty$ зростає швидше за довільну лінійну функцію. Припускаємо також, що виконуються такі умови:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists x_0 = x_0(\varepsilon)>0\ \forall x\ge x_0 :\ \ \rho(\varepsilon x)\ge M(x),$$

$$\rho(x)\underset{x\to 0+0}{\sim}x^{\gamma},\ \ \gamma\in(1,+\infty),\ \ M(x)\underset{x\to 0+0}{\sim}x^{\beta},\ \ \beta\in(0,1],$$

де γ та β — фіксовані параметри.

Символом $\theta_{M,\rho}$ позначимо сукупність усіх неперервних парних на $\mathbb{R}$ функцій $\varphi:\mathbb{R}\to \to\mathbb{R}$, нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, для яких

$$\exists a>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+\ \exists c_k>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} :\ \ M^k(x)|D_x^k\varphi(x)|\le c_k\sum_{l=1}^{k}\rho^l(x)e^{-\rho(ax)} \qquad (1)$$

(якщо $k=0$, то суми немає, якщо $k=1$, то $l=1$ і т. д.; якщо $k=0$, то (1) справджується для всіх $x\in\mathbb{R}$, сталі c_k, $a>0$ залежать від φ).

Наведемо приклад функції із простору $\theta_{M,\rho}$, побудованого за конкретними функціями M та ρ. Для цього розглянемо функцію $\alpha:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, яка використовується при побудові псевдодиференціальних операторів: α — неперервна парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку $\gamma>1$, нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, похідні цієї функції задовольняють умову

$$\forall k\in\mathbb{N}\ \exists b_k>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} :\ \ |D_x^k\alpha(x)|\le b_k|x|^{\gamma-k},\qquad \alpha(x)>0,\quad x\in(0,\infty).$$

Цю умову можна подати у вигляді $M^k(x)|D_x^k\alpha(x)|\le b_k\rho(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $k\in\mathbb{N}$, де $M(x)=|x|$, $\rho(x)=|x|^{\gamma}$. Використовуючи формулу Фаа де Бруно диференціювання складеної функції, безпосередньо переконуємося в тому, що $\exp\{-\alpha(x)\}$ є елементом простору $\theta_{M,\rho}$ із вказаними вище функціями M та ρ, див. також [4] (така функція є важливою при дослідженні задачі Коші для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами, для яких $\alpha(x)$ є негладким у точці 0 однорідним символом).

Відмітимо основні властивості функцій із простору $\theta_{M,\rho}$, встановлені в [4]: функція $D_x^k\varphi$, $\varphi\in\theta_{M,\rho}$, $x\ne 0$, $k\in\mathbb{N}$, має скінченні односторонні границі $\lim_{x\to\pm 0}D_x^k\varphi(x)$, функція $D_x^{2k}\varphi$, $x\ne 0$, $k\in\mathbb{N}$, у точці $x=0$ має усувний розрив, кожна функція $\varphi\in\theta_{M,\rho}$ у точці 0 задовольняє умову Діні, на функціях із простору $\theta_{M,\rho}$ визначено перетворення Бесселя F_{B_ν}:

$$F_{B_\nu}[\varphi](\xi) = \int\limits_0^{\infty}\varphi(x)j_\nu(x\xi)x^{2\nu+1}dx,\quad \varphi\in\theta_{M,\rho},$$

де j_ν — нормована функція Бесселя, ν — фіксований параметр із множини $\{3/2, 5/2, 7/2,\ldots\}$. У просторі $\theta_{M,\rho}$ можна також ввести структуру зліченно-нормованого простору (детальніше про це див. у [4]).

Нехай $F_{B_\nu}[\theta_{M,\rho}] := \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$. Елементами простору $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції, які задовольняють нерівності [4]

$$|D^m_\xi F_{B_\nu}[\varphi](\xi)| \leq \alpha_m(1+|\xi|)^{-(\omega_0+m)}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \xi \in \mathbb{R}, \varphi \in \theta_{M,\rho},$$

$\omega_0 = \tilde{p}_0 + [\beta^{-1}[\gamma]]$, $\tilde{p}_0 = 1 + p_0$, $p_0 = 2\nu + 1$, $[\cdot]$ — ціла частина числа.

$\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ перетворюється у зліченно-нормований простір, якщо систему норм в ньому ввести за допомогою формул

$$\|\varphi\|_p := \sup_{\xi\in[0,\infty)} \left\{ \sum_{k=0}^{p} \Lambda(\xi)^{\tilde{\omega}_0+2k} |D^{2k}_\xi \varphi(\xi)| \right\}, \quad \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\Lambda(\xi) := 1+\xi$, $\xi \in [0,\infty)$, $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ — фіксований параметр. Перетворення Бесселя неперервно відображає $\theta_{M,\rho}$ на $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ [4]; на функціях із простору $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ визначено обернене перетворення Бесселя $F^{-1}_{B_\nu}$:

$$F^{-1}_{B_\nu}[\psi](x) = c_\nu \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \quad \psi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}, \quad c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}.$$

У просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ визначено оператор узагальненого зсуву аргументу T^ξ_x, що відповідає оператору Бесселя [5] і є неперервним:

$$T^\xi_x \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}) \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T^\xi_x\varphi$ диференційовна (навіть нескінченно диференційовна) у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ у тому розумінні, що граничні співвідношення $(\Delta\xi)^{-1}(T^{\xi+\Delta\xi}_x\varphi(x) - T^\xi_x\varphi(x)) \to \partial T^\xi_x\varphi/\partial\xi$, $\Delta\xi \to 0$, виконуються у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$.

2. Побудова фундаментального розв'язку. Задача Коші. Розглянемо функцію $a(t,x;\sigma)$, задану на $[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, парну за змінними x, σ, яка задовольняє умови:

1) функція $a(t,x;\sigma)$ є однорідною порядку γ за аргументом σ рівномірно відносно t, x, тобто

$$a(t,x;\lambda\sigma) = \lambda^\gamma a(t,x;\sigma), \quad \lambda > 0,\ \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R} \equiv \Pi_T;$$

2) $a(t,x;\sigma)$ — неперервна функція аргументу t на відрізку $[0,T]$ (при фіксованих x, σ) і $a(t,x;\sigma)$ — неперервна обмежена на $\mathbb{R}$ функція аргументу x (при фіксованих t, σ);

3) існують сталі $c_0, b_0 > 0$ такі, що справджуються нерівності

$$b_0\rho(\sigma) \leq a(t,x;\sigma) \leq \frac{c_0(1+\rho(\sigma))}{(1+|x|)^{\omega_0}}, \quad \omega_0 = 2\nu+2+[\beta^{-1}[\gamma]], \quad (t,x) \in \Pi_T;$$

4) при фіксованих t, x функція $a(t,x;\sigma)$, як функція σ, нескінченно диференційовна по σ при $\sigma \neq 0$; при цьому

$$\forall k \in \mathbb{N}\, \exists c_k > 0 : \quad M^k(\sigma)|D^k_\sigma a(t,x;\sigma)| \leq c_k \frac{\rho(\sigma)}{(1+|x|)^{\omega_0}},$$

$$(t,x) \in \Pi_T, \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Із властивостей функції a випливає, що $a(t,x;\sigma)$, як функція σ (при фіксованих $(t,x) \in \in \Pi_T$), є мультиплікатором у просторі $\theta_{M,\rho}$.

Розглянемо оператор A_t, заданий на $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ і залежний від параметра $t \in [0,T]$, який визначається співвідношенням

$$(A_t\varphi)(x) := F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}[a(t,x;\sigma)F_{B_{x\to\sigma}}[\varphi](\sigma)](x), \quad \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}.$$

Далі будемо використовувати позначення $A_t = A$. Із властивостей функції $a(t,x;\sigma)$ випливає, що $A\varphi \in \mathcal{K}$ при кожному $t \in [0,T]$, де $\mathcal{K}$ — нормований простір, який складається з неперервних парних на $\mathbb{R}$ функцій ψ, що задовольняють нерівність $|\psi(x)| \leq c(1+|x|)^{-\omega_0}$, $c = c(\psi) > 0$, з нормою

$$\|\psi\| = \sup_{\mathbb{R}}\{\Lambda^{\omega_0}(x)|\psi(x)|\}, \quad \Lambda(x) := 1+|x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки перетворення Бесселя (пряме та обернене) є неперервним оператором, то $A : \Phi^\nu_{\beta,\gamma} \to \mathcal{K}$ — лінійний неперервний оператор. Оператор A далі називатимемо псевдобесселевим оператором, побудованим за змінним символом $a(t,x;\sigma)$.

У смузі $\Pi'_T = \{(t,x) : 0 \leq \tau < t \leq T, x \in \mathbb{R}\}$ розглянемо задачу про відшукання розв'язку еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + Au(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi'_T, \tag{2}$$

який задовольняє початкову умову

$$u(t,x)|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \tag{3}$$

де $\varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$. Введемо позначення $L \equiv L(t,x;A,D_t) := \partial/\partial t + A$.

Під фундаментальним розв'язком задачі Коші (2), (3) розумітимемо функцію $Z(t,x;\tau,\xi)$, $(t,x) \in \Pi'_T$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\xi \in \mathbb{R}$, яка має такі властивості:

1) $LZ(t,x;\tau,\xi) = 0$, тобто Z, як функція t, x (при фіксованих τ, ξ), є розв'язком рівняння (2);

2) $\lim_{t\to\tau+0} \int_0^\infty Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = \varphi(x)$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ для довільної функції $\varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$.

Для побудови функції Z використаємо метод Леві (метод параметрикса), який полягає в тому, що функцію Z шукаємо у вигляді суми двох доданків: головного та деякого допоміжного. Головним доданком є фундаментальний розв'язок рівняння (2), яке містить оператор, побудований за символом $a(t,x;\sigma)$ з фіксованою точкою $t = \beta$, $x = z$. Другий доданок шукаємо у вигляді інтегрального оператора з ядром, щільність якого визначається з деякого інтегрального рівняння.

Отже, зафіксуємо символ $a(t,x;\sigma)$ у точці $t=\beta$, $x=z$ і розглянемо задачу про відшукання розв'язку рівняння зі сталим символом

$$L(\beta,z;A,D_t)u(t,x)=0 \tag{4}$$

з початковою умовою (3). Розв'язок u задачі (4), (3) будемо шукати за допомогою перетворення Бесселя, в результаті чого дістанемо

$$u(t,x)=\int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t-\tau,x;\beta,z)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi=G(t-\tau,x;\beta,z)*\varphi(x),$$

де $G(t-\tau,x;\beta,z)=F_B[\exp\{-a(\beta,z,\sigma)(t-\tau)\}]$.

Із результатів, отриманих у [6], випливає наступне твердження.

Лема 1. 1. *При фіксованих* $t,\tau,t>\tau,\beta,z$ *функція* $G(t-\tau,x;\beta,z)$, *як функція аргументу* x, *є елементом простору* $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$. *Для* G *та її похідних справджуються оцінки*

$$|D_x^m G(t-\tau,x;\beta,z)|\le\alpha_m(t-\tau)^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x|)^{-(\omega_0+m)},\quad m\in\mathbb{Z}_+,$$

де $\alpha_m=\beta_m(1+|z|)^{-\omega_0}$, *стала* $\beta_m>0$ *не залежить від* t,τ,β,z.

2. $G(t-\tau,x;\tau,\xi)\to\delta(x)$ *при* $t\to\tau+0$ (δ — *дельта-функція Дірака*).

Безпосередньо переконуємося в тому, що функція $G(t-\tau,x;\beta,z)$ задовольняє рівняння (4).

Якщо розглядати G як регулярну узагальнену функцію з простору $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$ — простору, топологічно спряженого до $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ зі слабкою збіжністю, елементами якого є лінійні неперервні функціонали, що задані на $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ (узагальнені функції), то за лемою 1

$$\langle T_x^\xi G,\varphi\rangle=\langle T_\xi^x G,\varphi\rangle\underset{t\to\tau+0}{\longrightarrow}\langle T_\xi^x\delta,\varphi\rangle=\langle T_x^\xi\delta,\varphi\rangle=$$

$$=\langle\delta_\xi,T_x^\xi\varphi(x)\rangle=T_x^0\varphi(x)=b_\nu\int\limits_0^\pi\varphi(x)\sin^{2\nu}\omega d\omega,\quad \varphi\in\Phi^\nu_{\beta,\gamma},$$

де $b_\nu=\Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$. Використавши формулу

$$\int\limits_0^\pi\sin^{2\nu}\omega d\omega=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)},\quad \nu\ge0,$$

переконаємося, що $\langle T_x^\xi G,\varphi\rangle\longrightarrow T_x^0\varphi(x)=\varphi(x)$ при $t\to\tau+0$ у кожній точці $x\in\mathbb{R}$. Оскільки $T_x^\xi G$ є регулярною узагальненою функцією відносно параметра ξ, справджується наступне твердження.

Лема 2. *Для довільної функції* $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$

$$\int_0^\infty T_x^\xi G(t-\tau, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi \underset{t\to\tau+0}{\longrightarrow} \varphi(x) \tag{5}$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Зазначимо, що співвідношення (5) справджується і для довільної обмеженої неперервної парної на $\mathbb{R}$ функції.

Нехай

$$J(\tau, t, x) := \int_\tau^t d\mu \int_0^\infty T_x^\xi G(t-\mu, x; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi)\xi^{2\nu+1}d\xi, \tag{6}$$

де $\varphi(t, x)$ — задана на $[0, T] \times \mathbb{R}$, неперервна по t, неперервна, парна і обмежена на $\mathbb{R}$ функція змінної x. Наступне твердження містить формулу для застосування оператора $\partial/\partial t$ до інтеграла (6).

Лема 3. *При вказаних обмеженнях на функцію* φ *правильною є формула*

$$\frac{\partial J(\tau, t, x)}{\partial t} = \int_\tau^t d\mu \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} T_x^\xi G(t-\mu, x; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi)\xi^{2\nu+1}d\xi + \varphi(t, x). \tag{7}$$

Доведення. Розглянемо сім'ю функцій $\{J_h(\tau, t, x), 0 < h < t-\tau\}$, де

$$J_h(\tau, t, x) = \int_\tau^{t-h} d\mu \int_0^\infty T_x^\xi G(t-\mu, x; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi)\xi^{2\nu+1}d\xi \equiv \int_\tau^{t-h} g(t, \mu, x)\, dx,$$

$$g(t, \mu, x) = \int_0^\infty T_x^\xi G(t-\mu, x; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi)\xi^{2\nu+1}d\xi.$$

Застосувавши правило Лейбніца диференціювання інтегралів, залежних від параметра, знайдемо

$$\frac{\partial J_h(\tau, t, x)}{\partial t} = \int_\tau^{t-h} \frac{\partial}{\partial t} g(t, \mu, x)d\mu + g(t, t-h, x) = \int_\tau^{t-h} d\mu \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi)\xi^{2\nu+1}d\xi +$$

$$+ \int_0^\infty T_x^\xi G(h, x; t-h, \xi)\varphi(t-h, \xi)\xi^{2\nu+1}d\xi.$$

Доведемо, що $\{J_h, 0 < h < t-\tau\}$ збігається при $h \to 0$ до функції $J(\tau, t, x)$, а $\left\{\dfrac{\partial J_h}{\partial t}, 0 < h < t-\tau\right\}$ — рівномірно відносно t до правої частини (7). Тоді, скориставшись відповідною теоремою з математичного аналізу, переконаємося, що функція $J(\tau, t, x)$ є диференційовною по t, при цьому справджується рівність (7).

Із властивостей оператора узагальненого зсуву аргументу та оцінок фундаментального розв'язку задачі Коші для еволюційного рівняння з псевдобесселевим оператором, побудованим за сталим символом, що наведені в [6], випливає нерівність

$$|T_x^{\xi} G(t-\mu, x; \mu, \xi)| \leq c(t-\mu)^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma}((t-\mu)^{1/\gamma} + |x-\xi|)^{-(\omega_0-\lambda)},$$

де $\lambda \in (0,1)$ — довільно фіксований параметр. Для фіксованого $x \in \mathbb{R}$ та $t - \mu \geq \varepsilon_0 > 0$ знайдеться стала $L_0 = L_0(x, \varepsilon_0) > 0$ така, що

$$\frac{\xi^{2\nu+1}}{((t-\mu)^{1/\gamma} + |x-\xi|)^{2\nu+1}} \leq \frac{\xi^{2\nu+1}}{(\varepsilon_0^{1/\gamma} + |x-\xi|)^{2\nu+1}} \leq L_0.$$

Тоді

$$\int_0^{\infty} |T_x^{\xi} G(t-\mu, x; \mu, \xi)|\, |\varphi(\mu, \xi)| \xi^{2\nu+1} d\xi \leq c'(t-\mu)^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{((t-\mu)^{1/\gamma} + |x-\xi|)^{1+[\beta^{-1}[\gamma]]-\lambda}} =$$

$$= c'(t-\mu)^{\lambda/\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{(1+|\eta|)^{1+[\beta^{-1}[\gamma]]-\lambda}} = c''(t-\mu)^{\lambda/\gamma},$$

де

$$c'' = c' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{(1+|\eta|)^{1+[\beta^{-1}[\gamma]]-\lambda}}, \quad c' = c \sup_{\substack{0 \leq \mu \leq T \\ \xi \in \mathbb{R}}} |\varphi(\mu, \xi)| L_0.$$

Звідси дістаємо

$$|J_h(\tau, t, x) - J(\tau, t, x)| \leq c'' \int_{t-h}^{t} (t-\mu)^{\lambda/\gamma} d\mu = \tilde{c}'' h^{\lambda/\gamma+1},$$

тобто $\lim_{h\to 0} J_h(\tau, t, x) = J(\tau, t, x)$.

Нехай

$$\gamma_h(t, x) := \int_{\tau}^{t-h} d\mu \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} T_x^{\xi} G(t-\mu, x; \mu, \xi) \varphi(\mu, \xi) \xi^{2\nu+1} d\xi,$$

$$\gamma(t, x) := \int_{\tau}^{t} d\mu \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x; \mu, \xi) \varphi(\mu, \xi) \xi^{2\nu+1} d\xi.$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x; \mu, \xi) = -c_\nu \int\limits_0^\infty a(\mu, \xi; \sigma) e^{-a(\mu,\xi;\sigma)(t-\tau)} j_\nu(x\sigma)\sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T_x^\xi G(t-\mu, x; \mu, \xi) = T_x^\xi \frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x; \mu, \xi),$$

то, врахувавши методику встановлення оцінки функції $|G|$, наведену в [6], властивості оператора узагальненого зсуву аргументу, знайдемо

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} T_x^\xi G(t-\mu, x; \mu, \xi) \right| \leq d(t-\mu)^{([\beta^{-1}[\gamma]]-\gamma)/\gamma} ((t-\mu)^{1/\gamma} + |x-\xi|)^{-(\omega_0-\lambda)},$$

де $\lambda \in (0,1)$ — довільно фіксований параметр. Тоді для фіксованого $x \in \mathbb{R}$ та $t-\mu \geq \varepsilon_0 > > 0$

$$\int\limits_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial t} T_x^\xi G(t-\mu, x; \mu, \xi) \right| |\varphi(\mu,\xi)| \xi^{2\nu+1} d\xi \leq c'(t-\mu)^{([\beta^{-1}[\gamma]]-\gamma)/\gamma} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{((t-\mu)^{1/\gamma} + |x-\xi|)^{1+[\beta^{-1}[\gamma]]-\lambda}} =$$

$$= c'(t-\mu)^{-1+\lambda/\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{(1+|\eta|)^{1+[\beta^{-1}[\gamma]]-\lambda}} =$$

$$= d'(t-\mu)^{-1+\lambda/\gamma},$$

$$d' = c' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{(1+|\eta|)^{1+[\beta^{-1}[\gamma]]-\lambda}}, \quad c' = d \sup_{\substack{0 \leq \mu \leq T \\ \xi \in \mathbb{R}}} |\varphi(\mu,\xi)| \, L_0, \quad L_0 = L_0(x, \varepsilon_0) > 0.$$

Отже,

$$|\gamma_h(t,x) - \gamma(t,x)| \leq d' \int\limits_{t-h}^{t} (t-\mu)^{-1+\lambda/\gamma} d\mu = d'' h^{\lambda/\gamma}.$$

Звідси випливає, що $\gamma_h(t,x) \to \gamma(t,x)$ при $h \to 0$ рівномірно відносно t (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$).

Із леми 1 випливає, що для функції $G(h, x; t-h, \xi)$ правильною є оцінка

$$|G(h, x; t-h, \xi)| \leq c h^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma} (h^{1/\gamma} + |x|)^{-\omega_0} (1+|\xi|)^{-\omega_0},$$

рівномірна відносно t. Звідси, з леми 2 та зауваження до неї, а також із властивості неперервності функції $\varphi(t,x)$ за змінною t одержуємо

$$\int\limits_0^\infty T_x^\xi G(h,x;t-h,\xi)\varphi(t-h,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \varphi(t,x) \tag{8}$$

рівномірно відносно t. Цим доведено, що $\left\{\dfrac{\partial J_h}{\partial t}, 0 < h < t-\tau\right\}$ збігається при $h \to 0$ рівномірно відносно t до правої частини (7).

Лему доведено.

Введемо позначення

$$\omega_h(\tau,t,\sigma) := F_{B_{x\to\sigma}}[J_h(\tau,t,x)](\sigma),$$

$$\omega(\tau,t,\sigma) := F_{B_{x\to\sigma}}[J(\tau,t,x)](\sigma).$$

Зазначимо, що

$$F_{B_{x\to\sigma}}[J_h(\tau,t,x)](\sigma) = F_{B_{x\to\sigma}}\left[\int\limits_\tau^{t-h} d\mu \int\limits_0^\infty T_x^\xi G(t-\mu,x;\mu,\xi)\varphi(\mu,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\right](\sigma) =$$

$$= \int\limits_\tau^{t-h} d\mu \int\limits_0^\infty F_{B_{x\to\sigma}}[T_x^\xi G(t-\mu,x;\mu,\xi)](\sigma)\varphi(\mu,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi.$$

Далі скористаємося тим, що

$$F_{B_{x\to\sigma}}[T_x^\xi G(t-\mu,x;\mu,\xi)](\sigma) = j_\nu(\sigma\xi)F_{B_{x\to\sigma}}[G(t-\mu,x;\mu,\xi)](\sigma) = j_\nu(\sigma\xi)e^{-a(\mu,\xi;\sigma)(t-\mu)}.$$

Тоді

$$F_{B_{x\to\sigma}}[J_h(\tau,t,x)](\sigma) = \int\limits_\tau^{t-h} d\mu \int\limits_0^\infty e^{-a(\mu,\xi;\sigma)(t-\mu)} j_\nu(\sigma\xi)\varphi(\mu,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi.$$

Аналогічно отримаємо співвідношення

$$F_{B_{x\to\sigma}}[J(\tau,t,x)](\sigma) = \int\limits_\tau^{t} d\mu \int\limits_0^\infty e^{-a(\mu,\xi;\sigma)(t-\mu)} j_\nu(\sigma\xi)\varphi(\mu,\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi.$$

Із властивостей функцій M та ρ випливають нерівності

$$M(y) \geq c_0 y^\beta, \rho(y) \geq \alpha_0 y^\gamma, y \in (0,\infty); \rho(y)e^{-a(\mu,\xi;y)(t-\mu)/2} \leq \rho(y)e^{-b_0\rho(y)(t-\mu)/2} \leq$$

$$\leq d_0(t-\mu)^{-1}e^{-\tilde{\alpha}_0\rho(y)(t-\mu)} \leq d_1(t-\mu)^{-1}e^{-\alpha_1 y^\gamma(t-\mu)}, \quad \tilde{\alpha}_0 < b_0/2.$$

Функцію $\exp\{-a(\mu,\xi;\sigma)(t-\mu)\}$ запишемо у вигляді

$$e^{-a(\mu,\xi;\sigma)(t-\mu)} = -e^{-a(\mu,\xi;\sigma)(t-\mu)/2}\int\limits_{\sigma}^{+\infty}(e^{-a(\mu,\xi;y)(t-\mu)/2})'_y dy =$$

$$= \frac{t-\mu}{2}\,e^{-a(\mu,\xi;\sigma)(t-\mu)/2}\int\limits_{\sigma}^{+\infty}(a(\mu,\xi;y))'_y e^{-a(\mu,\xi;y)(t-\mu)/2}dy.$$

Врахувавши наведені вище нерівності, а також умову 3, яку задовольняє функція-символ a, знайдемо

$$e^{-a(\mu,\xi;\sigma)(t-\mu)}|j_\nu(\sigma\xi)||\varphi(\mu,\xi)| \le \tilde{c}A_\nu(t-\mu)^{-(1-\beta)/\gamma}(1+|\xi|)^{-\omega_0}e^{-\tilde{b}_0(t-\mu)\rho(\sigma)}\times$$

$$\times \sup_{\substack{0\le\mu\le T\\ \xi\ge 0}}|\varphi(\mu,\xi)| \le \tilde{c}'(t-\mu)^{-(1-\beta)/\gamma}(1+|\xi|)^{-\omega_0}e^{-\tilde{b}_0(t-\mu)\rho(\sigma)},$$

де $A_\nu = (\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1))/\Gamma(\nu+1/2)$ (тут враховано оцінку нормованої функції Бесселя $j_\nu(\sigma\xi)$, яка випливає з інтегрального зображення Пуассона функції j_ν, див. [7, с. 780]). Взявши до уваги останню нерівність, отримаємо

$$|\omega_h(\tau,t,\sigma)| \le \int\limits_{\tau}^{t-h}d\mu\int\limits_{0}^{\infty}e^{-a(\mu,\xi;\sigma)(t-\mu)}|j_\nu(\sigma\xi)||\varphi(\mu,\xi)|\xi^{2\nu+1}d\xi \le$$

$$\le \tilde{d}\int\limits_{\tau}^{t-h}(t-\mu)^{-(1-\beta)/\gamma}e^{-\tilde{b}_0(t-\mu)\rho(\sigma)}d\mu \equiv \tilde{d}\cdot J.$$

Оскільки $h\to 0$, то вважатимемо, що $0<h\le d<t-\tau$. Тоді $t-h\ge t-d$. Далі знайдемо сталу $L=L(d)>1$ таку, що

$$J \le L\int\limits_{\tau}^{t-d}(t-\mu)^{-(1-\beta)/\gamma}e^{-\tilde{b}_0(t-\mu)\rho(\sigma)}d\mu \le$$

$$\le Le^{-\tilde{b}_0 d\rho(\sigma)}\int\limits_{\tau}^{t-d}(t-\mu)^{-(1-\beta)/\gamma}d\mu \le Le^{-\tilde{b}_0 d\rho(\sigma)}\int\limits_{\tau}^{t-h}(t-\mu)^{-(1-\beta)/\gamma}d\mu =$$

$$= Le^{-\tilde{b}_0 d\rho(\sigma)}\int\limits_{h}^{t-\tau}\alpha^{-(1-\beta)/\gamma}d\alpha = L_1 e^{-\tilde{b}_0 d\rho(\sigma)}((t-\tau)^{(\gamma-1+\beta)/\gamma}-h^{(\gamma-1+\beta)/\gamma}).$$

Якщо $0<\tilde{b}_0 d\le 1$, то для опуклої функції ρ справджується нерівність $\tilde{b}_0 d\rho(\sigma)\ge\rho(\tilde{b}_0 d\sigma)\equiv$ $\equiv\rho(a_1\sigma)$. Якщо $\tilde{b}_0 d>1$, то $\tilde{b}_0 d=[\tilde{b}_0 d]+\{\tilde{b}_0 d\}$. Отже,

$$e^{-\tilde{b}_0 d\rho(\sigma)} = e^{-[\tilde{b}_0 d]\rho(\sigma)}e^{-\{\tilde{b}_0 d\}\rho(\sigma)} \le e^{-\{\tilde{b}_0 d\}\rho(\sigma)} \le e^{-\rho(a_2\sigma)},\quad a_2=\{\tilde{b}_0 d\}.$$

Таким чином, $\exp\{-\tilde{b}_0 d\rho(\sigma)\} \leq \exp\{-\rho(a\sigma)\}$, де

$$a = \begin{cases} \tilde{b}_0 d & \text{при} \quad 0 < \tilde{b}_0 d \leq 1, \\ \{\tilde{b}_0 d\} & \text{при} \quad \tilde{b}_0 d > 1. \end{cases}$$

Підсумовуючи, стверджуємо, що

$$|\omega_h(\tau, t, \sigma)| \leq L_1 \tilde{d} e^{-\rho(a\sigma)} |(t-\tau)^{(\gamma-1+\beta)/\gamma} - h^{(\gamma-1+\beta)/\gamma}| \leq d_0 e^{-\rho(a\sigma)}, \tag{9}$$

де стала d_0 не залежить від h, якщо $0 < h \leq d < t - \tau$ (t, τ, d — фіксовані сталі). Аналогічно доводимо, що функція $\omega(t, \tau, \sigma)$, як функція σ, також задовольняє нерівність (9).

З урахуванням (9) далі доводимо, що

$$AJ_h = F_B^{-1}[a(t, x; \sigma)\omega_h(\tau, t, \sigma)] \underset{h \to 0}{\longrightarrow} F_B^{-1}[a(t, x; \sigma)\omega(\tau, t, \sigma)] = AJ.$$

З іншого боку,

$$AJ_h(\tau, t, x) = \int\limits_{\tau}^{t-h} d\mu \int\limits_{0}^{\infty} AT_x^{\xi} G(t-\mu, x; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi)\xi^{2\nu+1} d\xi.$$

З властивості єдиності границі випливає співвідношення

$$AJ(\tau, t, x) = \int\limits_{\tau}^{t} d\mu \int\limits_{0}^{\infty} AT_x^{\xi} G(t-\mu, x; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi)\xi^{2\nu+1} d\xi. \tag{10}$$

Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Лема 4. *При вказаних обмеженнях на функцію φ правильними є формула (10), а також формула*

$$LJ(\tau, t, x) = \int\limits_{\tau}^{t} d\mu \int\limits_{0}^{\infty} LT_x^{\xi} G(t-\mu, x; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi)\xi^{2\nu+1} d\xi + \varphi(t, x). \tag{11}$$

Фундаментальний розв'язок рівняння (2) шукаємо у вигляді суми

$$Z(t, x; \tau, \xi) = T_x^{\xi} G(t-\tau, x; \tau, \xi) + \Gamma(t, x; \tau, \xi),$$

де

$$\Gamma(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\mu \int\limits_{0}^{\infty} T_x^{\xi} G(t-\mu, x; \mu, \eta)\Phi(\mu, \eta; \tau, \xi)\eta^{2\nu+1} d\eta. \tag{12}$$

Тут G — визначена раніше функція, $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ підберемо так, щоб Z, як функція t,x, задовольняла рівняння (2). Застосувавши до Z оператор L та врахувавши при цьому формулу (11), переконаємося, що це буде тоді й лише тоді, коли

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = K(t-\tau,x;\tau,\xi) + \int_\tau^t d\mu \int_0^\infty K(t-\mu,x;\mu,\eta)\Phi(\mu,\eta;\tau,\xi)\eta^{2\nu+1}d\eta, \qquad (13)$$

де $K(t-\tau,x;\tau,\xi) = -LT_x^\xi G(t-\tau,x;\tau,\xi)$. Ряд

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = \sum_{m=1}^\infty K_m(t-\tau,x;\tau,\xi), \quad K_1 = K, \qquad (14)$$

$$K_m(t-\tau,x;\tau,\xi) = \int_\tau^t dy \int_0^\infty K(t-y,x;y,\eta)K_{m-1}(y-\tau,\eta;\tau,\xi)\eta^{2\nu+1}d\eta,$$

є формальним розв'язком інтегрального рівняння (13). Ряд (14) дослідимо на абсолютну та рівномірну збіжність при $0 < \delta_0 \le t-\tau \le T$. Для обґрунтування збіжності проведемо оцінювання повторних ядер K_m. Зазначимо, що для $|K_1| = |LT_x^\xi G|$ справджується нерівність

$$|LT_x^\xi G(t-\tau,x;\tau,\xi)| \le \tilde{c}_0(t-\tau)^{([\beta^{-1}[\gamma]]-\gamma)/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\omega_0-\lambda)}, \qquad (15)$$

де $\lambda \in (0,1)$ — фіксований параметр. Для оцінювання повторних ядер K_m, $m \ge 2$, введемо позначення

$$d_0(t,x;\tau,\xi) \equiv d_0 := (t-\tau)^{1/\gamma} + |x-\xi|,$$

$$d_1(t,x;y,\eta) \equiv d_1 := (t-y)^{1/\gamma} + |x-\eta|,$$

$$d_2(y,\eta;\tau,\xi) \equiv d_2 := (y-\tau)^{1/\gamma} + |\eta-\xi|,$$

$$\Pi := \{(y,\eta) : \tau \le y \le t, \eta \in \mathbb{R}\},$$

$$J = \int_\Pi (t-y)^{-a/\gamma}(y-\tau)^{-c/\gamma}(d_1 d_2)^{-(2\nu+2+b)}\eta^{2\nu+1}dyd\eta,$$

$$2\nu+1 \equiv 2n+2, \quad \nu = n+1/2, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $b > 0$, $a+b < \gamma$, $c+b < \gamma$, $\gamma > 1$. Тоді, як випливає з результатів, одержаних у [8, с. 71, 72], для інтеграла J правильною є оцінка

$$J \le c d_0^{-(2\nu+2+b)}(t-\tau)^{-(a+b+c-\gamma)/\gamma} B\left(1-\frac{a+b}{\gamma}, 1-\frac{c+b}{\gamma}\right). \qquad (16)$$

Оцінимо ядро

$$K_2(t-\tau,x;\tau,\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{t} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t-y,x;y,\eta)K_1(y-\tau,\eta;\tau,\xi)\eta^{2\nu+1}d\eta,$$

скориставшись при цьому нерівністю (15):

$$|K_2(t-\tau,x;\tau,\xi)| \le \frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{t} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(t-y,x;y,\eta)|\,|K_1(y-\tau,\eta;\tau,\xi)|\eta^{2\nu+1}d\eta \le$$

$$\le \tilde{c}^2\int\limits_{\tau}^{t} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-y)^{-d/\gamma}(y-\tau)^{-d/\gamma}\eta^{2\nu+1}d\eta}{((t-y)^{1/\gamma}+|x-\eta|)^{\omega_0-\lambda}((y-\tau)^{1/\gamma}+|\eta-\xi|)^{\omega_0-\lambda}} =$$

$$= \tilde{c}^2\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-y)^{-d/\gamma}(y-\tau)^{-d/\gamma}\eta^{2\nu+1}}{(d_1d_2)^{2\nu+2+b}}dyd\eta,$$

$$d=\gamma-[\beta^{-1}[\gamma]],\quad b=[\beta^{-1}[\gamma]]-\lambda,\quad \tilde{c}=\tilde{c}_0/2.$$

Далі застосуємо оцінку (16) при вказаному b, $a=c=d$. Тоді

$$|K_2(t-\tau,x;\tau,\xi)| \le \tilde{c}^2 B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{\lambda}{\gamma}\right)(t-\tau)^{-(d-\lambda)/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\omega_0-\lambda)}.$$

Припустимо, що

$$|K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)| \le \tilde{c}^m B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{\lambda}{\gamma}\right)B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{2\lambda}{\gamma}\right)\ldots B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{(m-1)\lambda}{\gamma}\right)\times$$
$$\times(t-\tau)^{-(d-(m-1)\lambda)/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\omega_0-\lambda)}. \qquad (17)$$

Використавши оцінки (16), (17), знайдемо

$$|K_{m+1}(t-\tau,x;\tau,\xi)| \le \frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{t} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(t-y,x;y,\eta)|\,|K_m(y-\tau,\eta;\tau,\xi)|\eta^{2\nu+1}d\eta \le$$

$$\le \tilde{c}^{m+1}B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{\lambda}{\gamma}\right)\ldots B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{(m-1)\lambda}{\gamma}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-y)^{-d/\gamma}(y-\tau)^{-(d-(m-1)\lambda)/\gamma}\eta^{2\nu+1}d\eta}{((t-y)^{1/\gamma}+|x-\eta|)^{\omega_0-\lambda}((y-\tau)^{1/\gamma}+|\eta-\xi|)^{\omega_0-\lambda}} \le$$

$$\le \tilde{c}^{m+1}(t-\tau)^{-(d-m\lambda)/\gamma}B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{\lambda}{\gamma}\right)\ldots B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{(m-1)\lambda}{\gamma}\right)B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{m\lambda}{\gamma}\right)\times$$

$$\times((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\omega_0-\lambda)}$$

при $a = d$, $c = d - (m-1)\lambda$, $b = [\beta^{-1}[\gamma]] - \lambda$.

Отже, для $|K_m|$ оцінка (17) виконується. Врахувавши, що $B(z,\omega) = \Gamma(z)\Gamma(\omega)/\Gamma(z+\omega)$, (17) запишемо у вигляді

$$|K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)| \le \tilde{c}^m \frac{\Gamma^{m+1}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{(m+1)\lambda}{\gamma}\right)} \frac{(t-\tau)^{-(d-(m-1)\lambda)/\gamma}}{((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{\omega_0-\lambda}}.$$

Таким чином, для ряду $\sum_{m=1}^{\infty} K_m$ правильною є оцінка

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)\right| \le \sum_{m=1}^{\infty} |K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)| \le (t-\tau)^{-d/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\omega_0-\lambda)}\times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{b}^m \frac{\Gamma^{m+1}(\lambda/\gamma)}{\Gamma((m+1)\lambda/\gamma)}, \quad \tilde{b} = \tilde{c}(T)^{\lambda/\gamma}.$$

Внаслідок формули Стірлінга

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} e^x x^{x-1/2} e^{\theta/(12x)}, \quad x > 0, \quad 0 < \theta < 1,$$

маємо

$$\frac{\Gamma^{m+1}(\alpha_0)}{\Gamma((m+1)\alpha_0)} \le \beta_0 \frac{\tilde{\delta}_0^m}{m^{m\alpha_0}}, \quad \alpha_0 = \frac{\lambda}{\gamma}, \quad \beta_0 = e^{1/(12\alpha_0)}, \quad \tilde{\delta}_0 = \sqrt{2\pi\alpha_0} e^{1/(12\alpha_0)}.$$

З останньої нерівності випливає збіжність ряду $\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{b}^m \dfrac{\Gamma^{m+1}(\lambda/\gamma)}{\Gamma((m+1)\lambda/\gamma)}$.

Отже, ряд $\sum_{m=1}^{\infty} K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)$ збігається абсолютно і рівномірно при $0 < \delta_0 \le \le t-\tau \le T$, а його сума — функція $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ — при $t > \tau$ є неперервною функцією аргументів x, ξ, і для неї справджується нерівність

$$|\Phi(t,x;\tau,\xi)| \le r_0 (t-\tau)^{-d/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\omega_0-\lambda)}. \tag{18}$$

Ця оцінка забезпечує збіжність інтегралів у (12) та (13). Звідси випливає, що інтеграл у (13) дорівнює

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\tau}^{t} d\mu \int_{0}^{\infty} K(t-\mu,x;\mu,\eta) K_m(\mu-\tau,\eta;\tau,\xi)\eta^{2\nu+1} d\eta = \sum_{m=1}^{\infty} K_{m+1}(t-\tau,x;\tau,\xi).$$

Отже, Φ є розв'язком рівняння (13).

Зазначимо, що для $|T_x^{\xi} G|$ правильною є оцінка

$$|T_x^{\xi} G(t-\tau,x;\tau,\xi)| \le c(t-\tau)^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\omega_0-\lambda)}, \tag{19}$$

$$0 < \lambda < 1, \quad t \in (0,T], \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}.$$

На підставі нерівностей (19), (18) та (16) оцінимо функцію Γ. Отже,

$$|\Gamma(t,x;\tau,\xi)| \le \frac{1}{2}\int\limits_{\tau}^{t} d\mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |T_x^{\xi} G(t-\mu,x;\mu,\eta)|\,|\Phi(\mu,\eta;\tau,\xi)|\eta^{2\nu+1}d\eta \le$$

$$\le \tilde{c}' \int\limits_{\tau}^{t} d\mu \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-\mu)^{[\beta^{-1}[\gamma]]/\gamma}(\mu-\tau)^{-d/\gamma}\eta^{2\nu+1}d\eta}{((t-\mu)^{1/\gamma}+|x-\eta|)^{\omega_0-\lambda}((\mu-\tau)^{1/\gamma}+|\eta-\xi|)^{\omega_0-\lambda}} \le$$

$$\le \tilde{c}_0'(t-\tau)^{(\lambda+[\beta^{-1}[\gamma]])/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\omega_0-\lambda)}. \tag{20}$$

Із оцінки (20) випливає, що для довільної обмеженої неперервної парної на $\mathbb{R}$ функції φ справджуються нерівності

$$\left|\int\limits_{0}^{\infty} \Gamma(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\right| \le \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(t,x;0,\xi)||\varphi(\xi)|\xi^{2\nu+1}d\xi \le$$

$$\le \tilde{\tilde{c}}'t^{(\lambda+[\beta^{-1}[\gamma]])/\gamma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{(t^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{1+[\beta^{-1}[\gamma]]-\lambda}} =$$

$$= \tilde{c}''t^{2\lambda/\gamma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(1+|z|)^{1+[\beta^{-1}[\gamma]]-\lambda}} \to 0$$

при $t \to +0$. Із граничного співвідношення (8) при $h = t$ отримуємо

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_{0}^{\infty} T_x^{\xi}G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = \varphi(x) \tag{21}$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$. Отже, побудована функція Z є фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (2).

Із отриманих результатів та (21) випливає, що функція

$$u(t,x) = \int\limits_{0}^{\infty} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi \tag{22}$$

є розв'язком задачі Коші для рівняння (2) з початковою умовою

$$u(t,\cdot)|_{t=0} = \varphi, \tag{23}$$

де φ — неперервна обмежена парна на $\mathbb{R}$ функція. При цьому (23) розуміється в тому сенсі, що $\lim_{t\to+0} u(t,x) = \varphi(x)$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема 1. *Задача Коші (2), (23) розв'язна у класі обмежених неперервних парних на $\mathbb{R}$ функцій, розв'язок цієї задачі дається формулою (22).*

3. Еволюційні рівняння з показником однорідності $\gamma \in (0,1)$ та $\gamma \in \mathbb{N}$. У попередніх дослідженнях вважалося, за припущенням, що показники однорідності функцій (символів), за якими будувалися псевдодиференціальні оператори, — це числа з множини $(1,+\infty)\setminus\{2,3,4,\ldots\}$. Розглянемо тут випадок однорідності порядку $\gamma \in (0,1)$ та $\gamma \in \mathbb{N}$.

Нехай $\gamma \in (0,1)$ — фіксований параметр. Якщо $\beta \in (0,\gamma]$, то для функції $LT_x^\xi G$ у цьому випадку справджується оцінка

$$|LT_x^\xi G(t-\tau,x;\tau,\xi)| \leq c(t-\tau)^{(1-\gamma)/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\delta_0-\lambda)},$$

де $\lambda \in (0,1)$ є фіксованим, $\delta_0 = 2\nu+3$. При оцінюванні повторних ядер K_m, $m \geq 2$, використовуємо аналог нерівності (16), доведення якої аналогічне доведенню леми 6.6 з [8, с. 71, 72]. Отже, нехай

$$J = \int\limits_{\Pi} (t-y)^{a/\gamma}(y-\tau)^{c/\gamma}(d_1 d_2)^{-(2\nu+2+b)}\eta^{2\nu+1}dyd\eta,$$

де $a, b, c > 0$, $a-b>0$, $c-b>0$. Тоді для інтеграла J правильною є оцінка

$$J \leq c d_0^{-(2\nu+2+b)}(t-\tau)^{(a-b+c+\gamma)/\gamma} B\left(1+\frac{a-b}{\gamma}, 1+\frac{c-b}{\gamma}\right) \tag{24}$$

(тут символами Π, d_0, d_1, d_2 позначено вирази, введені в п. 2). При оцінюванні ядра K_2 в (24) покладемо $a=c=1-\gamma$, $b=1-\lambda$, тоді $a-b=c-b=\lambda-\gamma>0$. В результаті одержимо

$$|K_2(t-\tau,x;\tau,\xi)| \leq \tilde{c}^2 B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{\lambda}{\gamma}\right)(t-\tau)^{(\lambda+1-\gamma)/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\delta_0-\lambda)}.$$

Далі за допомогою методу математичної індукції доводимо, що

$$\begin{aligned}|K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)| &\leq \tilde{c}^m(t-\tau)^{((m-1)\lambda+1-\gamma)/\gamma} B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{\lambda}{\gamma}\right) B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{2\lambda}{\gamma}\right)\ldots B\left(\frac{\lambda}{\gamma},\frac{(m-1)\lambda}{\gamma}\right)\times \\ &\times((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\delta_0-\lambda)} \leq \tilde{c}^m\frac{\Gamma^{m+1}(\lambda/\gamma)}{\Gamma((m+1)\lambda/\gamma)}\times \\ &\times(t-\tau)^{((m-1)\lambda+1-\gamma)/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\delta_0-\lambda)}.\end{aligned}$$

Звідси вже для функції Φ дістаємо нерівність

$$|\Phi(t,x;\tau,\xi)| \leq r_0(t-\tau)^{(1-\gamma)/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\delta_0-\lambda)}. \tag{25}$$

Зазначимо, що для функції $T_x^\xi G$ правильною є оцінка

$$|T_x^\xi G(t-\tau,x;\tau,\xi)| \le c(t-\tau)^{1/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\delta_0-\lambda)}. \tag{26}$$

За допомогою нерівностей (25) та (26) проведемо оцінювання функції Γ:

$$|\Gamma(t,x;\tau,\xi)| \le \frac{1}{2}\int_\tau^t d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} |T_x^\xi G(t-\mu,x;\mu,\eta)|\,|\Phi(\mu,\eta;\tau,\xi)|\,\eta^{2\nu+1}d\eta \le$$

$$\le \tilde{c}'\int_\tau^t d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-\mu)^{1/\gamma}(\mu-\tau)^{(1-\gamma)/\gamma}\eta^{2\nu+1}d\eta}{((t-\mu)^{1/\gamma}+|x-\eta|)^{\delta_0-\lambda}((\mu-\tau)^{1/\gamma}+|\eta-\xi|)^{\delta_0-\lambda}} \le$$

$$\le \tilde{c}_0'(t-\tau)^{(\lambda+1+\gamma)/\gamma}((t-\tau)^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{-(\delta_0-\lambda)}. \tag{27}$$

З (27) випливає, що для довільної обмеженої неперервної парної на $\mathbb{R}$ функції φ справджуються нерівності

$$\left|\int_0^\infty \Gamma(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\right| \le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Gamma(t,x;0,\xi)|\,|\varphi(\xi)|\xi^{2\nu+1}d\xi \le$$

$$\le \tilde{\tilde{c}}t^{(\lambda+1+\gamma)/\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{(t^{1/\gamma}+|x-\xi|)^{2-\lambda}} = \tilde{\tilde{c}}'t^{2\lambda/\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{(1+|z|)^{2-\lambda}} \to 0$$

при $t \to +0$. Скориставшись цим граничним співвідношенням, дістанемо, що задача Коші для рівняння (2) з показником однорідності $\gamma \in (0,1)$ є розв'язною у класі обмежених неперервних парних на $\mathbb{R}$ функцій. Якщо $u(t,\cdot)|_{t=0} = \varphi$, де φ — функція із вказаного класу, то розв'язок такої задачі дається формулою (22).

Нехай тепер $\gamma \in \{2,3,4,\ldots\}$ є фіксованим. Результати, отримані для рівняння (2), справджуються і в цьому випадку за умови, що параметр $\beta \in (0,1)$; при цьому у відповідних оцінках (фундаментального розв'язку, повторних ядер і т. п.) замість параметра $[\gamma]$ слід писати γ.

Зупинимося окремо на випадку $\gamma = 1$. За умови $\beta \in (0,1)$ результати, отримані для рівняння (2), також мають місце. При цьому при оцінюванні відповідних повторних ядер використовуємо наступний аналог нерівності (16). Нехай

$$J = \int_\Pi (t-y)^a(y-\tau)^c(d_1d_2)^{-(2\nu+2+b)}\eta^{2\nu+1}dyd\eta,$$

де числа a, b, c такі, що виконуються умови $b > 0$, $a-b+1 > 0$, $c-b+1 > 0$. Тоді

$$J \le cd^{-(2\nu+2+b)}(t-\tau)^{a-b+c+1}B(a-b+1,c-b+1). \tag{28}$$

Доведення цієї нерівності аналогічне доведенню відповідної нерівності з [8, с. 71, 72]. Врахувавши, що функція $LT_x^\xi G$ у даному випадку задовольняє нерівність

$$|LT_x^\xi G(t-\tau, x; \tau, \xi)| \leq c(t-\tau)^{[\beta^{-1}]-1}((t-\tau)^{1/\gamma} + |x-\xi|)^{-(\omega_0 - \lambda)},$$

де $\omega_0 = 2\nu + 2 + [\beta^{-1}]$, $\lambda \in (0,1)$ — фіксований параметр, в (28) підставимо наступні значення параметрів: $a = c = [\beta^{-1}] - 1$, $b = [\beta^{-1}] - \lambda$. За допомогою нерівності (28) проводимо оцінювання повторних ядер. В результаті для рівняння (2) у випадку $\gamma = 1$ також отримаємо аналог теореми 1.

1. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. — 176 с.
2. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Мат. сб. — 1955. — **36**, № 2. — С. 299 – 310.
3. *Городецький В. В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. — Чернівці: Рута, 1998. — 225 с.
4. *Мартинюк О. В.* Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. I // Мат. та комп'ют. моделювання. Сер. фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. — 2011. — Вип. 5. — С. 179 – 192.
5. *Левитан Б. И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. — 1951. — **6**, вып. 2. — С. 102 – 143.
6. *Мартинюк О. В.* Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. IV // Мат. та комп'ют. моделювання. Сер. фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. — 2013. — Вип. 8. — С. 123 – 139.
7. *Корн Т., Корн Г.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1977. — 832 с.
8. *Дринь Я. М.* Задача Коши для некоторых классов параболических псевдодифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1978. — 124 с.

Одержано 28.10.13