

**РОБАСТНА СТАБІЛІЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ****Л. В. Купріянич***Ін-т математики НАН України**Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3**e-mail: Lyudmyla.mail@gmail.com*

*The work is devoted to the problems of robust stabilization and optimization of the equilibrium states of nonlinear mechanical systems. Sufficient conditions for stabilization of a linear system with a measured output feedback are formulated by means of the full order state observer. The solution of the general problem of robust stabilization and evaluation of the quadratic performance criterion for a family of nonlinear systems are demonstrated with examples of an inverted pendulum and a flywheel pendulum. Application of the results reduces to solving systems of linear matrix inequalities.*

*Рассматриваются задачи робастной стабилизации и оптимизации состояний равновесия нелинейных механических систем. Для линейных систем с обратной связью по измеряемому выходу сформулированы достаточные условия стабилизируемости с помощью наблюдателей состояний полного порядка. Приведены решение общей задачи робастной стабилизации и оценки квадратичного критерия качества семейства нелинейных систем на примерах однозвенного маятника на подвижной платформе в верхнем положении равновесия и маятника с маховичным управлением. Применение полученных результатов сводится к решению систем линейных матричных неравенств.*

**1. Вступ.** Динаміка широкого класу керованих механічних об'єктів описується системами нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$A_2\ddot{x} + A_1\dot{x} + A_0x = B_0u, \quad y = C_0x + C_1\dot{x} + Du, \quad (1)$$

де  $x$  і  $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$  — вектори узагальнених координат та швидкостей,  $u \in \mathbb{R}^m$  — вектор керування,  $y \in \mathbb{R}^l$  — вектор вимірюваного виходу, а матричні коефіцієнти  $A_0, A_1, A_2, B_0, C_0, C_1$  і  $D$  відповідних розмірів можуть неперервно залежати від  $x, \dot{x}$  і  $t$  в околі ізольованого стану рівноваги  $x = \dot{x} = 0$  при  $t \geq 0$ . Системи керування такого типу будуються на основі рівнянь Лагранжа другого роду і можуть містити невизначені параметри, коефіцієнти або функції. При цьому відповідні елементи невизначеності описують деякі множини, які характеризують робастність (грубість) математичної моделі. Як множини невизначеності використовуються інтервали, політопи, афінні, еліпсоїдальні сім'ї матриць та ін. (див., наприклад, [1–3]).

Стан рівноваги системи (1) називається *робастно стійким* відносно заданої множини елементів невизначеності  $\mathcal{A}$ , якщо він асимптотично стійкий за Ляпуновим при кожних значеннях даних елементів з  $\mathcal{A}$ . Основна проблема теорії робастної стійкості полягає в тому, щоб описати умови стійкості або нестійкості руху механічної системи в термінах вихідних даних і множин невизначеності.

Однією з основних задач для системи (1) є побудова керування у вигляді статичного зворотного зв'язку (СЗЗ) по виходу, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану рівноваги. Ця задача відноситься до категорії складних задач теорії керування [4].

Навіть властивості керованості і спостережуваності системи не гарантують для неї існування статичного стабілізуючого регулятора по виходу. В таких випадках в задачах стабілізації застосовуються динамічний зворотний зв'язок (ДЗЗ) або СЗЗ по стану спостерігача, що асимптотично відтворює стан системи (див., наприклад, [1, 3]). Огляд відомих методів стабілізації лінійних систем за допомогою СЗЗ по виходу наведено у [5, 6].

У даній статті розглядаються задачі робастної стабілізації та оптимізації станів рівноваги нелінійних механічних систем зі зворотним зв'язком по вимірюваному виходу, що містить компоненти як фазових змінних, так і керування. На підставі результатів робіт [3, 7–9] пропонуються нові методи робастної стабілізації станів рівноваги нелінійних систем керування з ДЗЗ на основі спостережників стану повного порядку. Для систем стабілізації одноланкового маятника на рухомій платформі та маятника з маховиковим керуванням із невизначеними механічними параметрами будуються спільні функції Ляпунова і верхні оцінки квадратичних функціоналів якості. Досліджено залежність радіуса робастної стабілізації від механічних параметрів. Практичне застосування одержаних результатів зводиться до знаходження розв'язків систем диференціальних або алгебраїчних лінійних матричних нерівностей (ЛМН). Для розв'язання ЛМН зі сталими матрицями може бути використана ефективна процедура LMI Toolbox комп'ютерної системи МАТЛАВ.

Будемо використовувати такі позначення:  $\mathbb{R}^{n \times m}$  – простір дійсних матриць розмірів  $n \times m$ ;  $I_n$  – одинична матриця порядку  $n$ ;  $0_{n \times m}$  – нульова матриця розмірів  $n \times m$ ;  $\text{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\} = \{\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i A_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = 1\}$  – опуклий многогранник (політоп) із вершинами  $A_1, \dots, A_\nu$  у просторі матриць;  $X = X^T > 0$  ( $\geq 0$ ) – додатно (невід'ємно) означена симетрична матриця  $X$ ;  $\lambda_{\max}(X)$  ( $\lambda_{\min}(X)$ ) – максимальне (мінімальне) власне значення матриці  $X$ ;  $\sigma(A)$  – спектр матриці  $A$ .

**2. Динамічні регулятори і спостережники стану повного порядку.** Розглянемо лінійну систему керування

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad (2)$$

де  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  і  $y \in \mathbb{R}^l$  – вектори відповідно стану, керування (входу) і спостережуваного виходу об'єкта,  $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – матриці коефіцієнтів системи,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  – матриця входу,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$  – матриця виходу по стану і  $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$  – матриця виходу по керуванню (матриця обходу), яка визначає пряму залежність виходу від входу. Припускаємо, що  $\det E \neq 0$ ,  $\text{rank } B = m$  і  $\text{rank } C = l$ .

Побудуємо динамічний регулятор для системи (2) у вигляді ДЗЗ

$$\begin{aligned} \dot{w} &= Zw + Vy, \\ u &= Uw + Ky, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $w \in \mathbb{R}^r$  – вектор стану регулятора,  $Z, V, U$  і  $K$  – невідомі матриці відповідних розмірів  $r \times r$ ,  $r \times l$ ,  $m \times r$  і  $m \times l$ . В окремому випадку  $r = 0$  маємо статичний регулятор  $u = Ky$ . При  $r \neq 0$  співвідношення (2) і (3) можна записати у компактному вигляді

$$\hat{E}\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u}, \quad \hat{y} = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}\hat{u}, \quad \hat{u} = \hat{K}\hat{y}, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}, \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} \dot{w} \\ u \end{bmatrix}, \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} Z & V \\ U & K \end{bmatrix}, \\ \hat{E} &= \begin{bmatrix} E & 0_{n \times r} \\ 0_{r \times n} & I_r \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times r} \\ 0_{r \times n} & 0_{r \times r} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0_{n \times r} & B \\ I_r & 0_{r \times m} \end{bmatrix}, \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} 0_{r \times n} & I_r \\ C & 0_{l \times r} \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 0_{r \times r} & 0_{r \times m} \\ 0_{l \times r} & D \end{bmatrix},\end{aligned}$$

причому  $\text{rank } \hat{B} = r+m$  і  $\text{rank } \hat{C} = r+l$ . Згідно з (4) задачі керування, зокрема стабілізації і оптимізації системи (2) з ДЗЗ (3), зводяться до аналогічних задач керування зі СЗЗ.

Введемо на множині матриць  $\mathcal{K}_D = \{K : \det(I_m - KD) \neq 0\}$  нелінійний оператор

$$\mathcal{D} : \mathbb{R}^{m \times l} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times l}, \quad \mathcal{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K \equiv K(I_l - DK)^{-1}.$$

Властивості даного оператора, які далі будемо використовувати, встановлено у [8].

Розглянемо систему керування (2) разом зі спостережником стану повного порядку, який описується так:

$$E\dot{w} = Aw + Bu + F(y - Cw - Du), \quad (5)$$

де  $w \in \mathbb{R}^n$  — вектор стану спостережника,  $F$  — деяка невідома матриця розмірів  $n \times l$  (див., наприклад, [10]). При цьому керування для системи (2) будується у вигляді

$$u = Uw + Ky. \quad (6)$$

Система (5) є асимптотичним спостережником стану системи (2), якщо

$$e(t) = w(t) - x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Покажемо, що при деяких додаткових обмеженнях задача стабілізації системи (2) на основі спостережника (5) зводиться до побудови стабілізуючого динамічного регулятора (3) порядку  $r = n$ .

**Означення.** Пара матриць  $(A, B)$  називається стабілізовною, якщо існує матриця  $F$  така, що матриця  $M = A + BF$  гурвіцева, тобто  $\text{Re } \lambda < 0 \forall \lambda \in \sigma(M)$ . Пара матриць  $(A, C)$  називається детектовною, якщо пара матриць  $(A^T, C^T)$  стабілізовна.

Стабілізованість системи є більш слабкою вимогою, ніж її керованість.

**Лема.** Нехай  $(\tilde{A}, \tilde{B})$  і  $(\tilde{A}, C)$  — відповідно стабілізовна і детектовна пари матриць, де  $\tilde{A} = E^{-1}A$ ,  $\tilde{B} = E^{-1}B$ . Тоді існує динамічний регулятор (3) у вигляді зворотного зв'язку (6) на основі спостережника стану (5) повного порядку  $r = n$ , що забезпечує умову (7) і асимптотичну стійкість замкненої системи (2), (5), (6).

**Доведення.** Покладемо

$$EZ = A - FC + (B - FD)U, \quad EV = F + (B - FD)K, \quad (8)$$

де  $K \in \mathcal{K}_D$ ,  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$  і  $F \in \mathbb{R}^{n \times l}$  — деякі матриці. Тоді перше рівняння у (3) описує динаміку спостережника (5), а замкнену систему (2), (5), (6) можна записати в еквівалентному вигляді

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{M}\tilde{x}, \quad \tilde{M} = \left[ \begin{array}{c|c} M_0 & \tilde{B}(I_m - KD)^{-1}U \\ \hline 0_{n \times n} & M_1 \end{array} \right], \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де  $M_0 = \tilde{A} + \tilde{B}D(K)C + \tilde{B}(I_m - KD)^{-1}U$ ,  $M_1 = \tilde{A} - E^{-1}FC$ ,  $e = w - x$  — вектор відхилення. Зокрема, якщо  $K = 0$ , то  $M_0 = \tilde{A} + \tilde{B}U$ .

Отже, за припущеннями існують матриці  $K$ ,  $U$  і  $F$  такі, що дійсні частини всіх власних значень діагональних блоків  $M_0$  і  $M_1$  матриці  $\tilde{M}$  від'ємні і система (9) асимптотично стійка. При цьому виконується умова (7), тобто (5) є асимптотичним спостережником системи (2). Шукані матриці стабілізуючого динамічного регулятора (3) можна знайти за допомогою співвідношень (8) і

$$U = -KC - (I_m - KD)\tilde{B}^T X^{-1}, \quad F = EY^{-1}C^T, \quad (10)$$

де  $K \in \mathcal{K}_D$  — довільна матриця, а  $X = X^T > 0$  і  $Y = Y^T > 0$  — розв'язки відповідних ЛМН (див., наприклад, [1])

$$\tilde{A}X + X\tilde{A}^T < 2\tilde{B}\tilde{B}^T, \quad \tilde{A}^T Y + Y\tilde{A} < 2C^T C. \quad (11)$$

Лему доведено.

**3. Робастна стабілізація нелінійних систем керування.** Розглянемо систему керування (1), матриця інерції  $A_2$  якої не залежить від часу  $t$ , і запишемо її у вигляді

$$E(z)\dot{z} = A(z,t)z + B(z,t)u, \quad y = C(z,t)z + D(z,t)u, \quad (12)$$

де  $z = [x^T, \dot{x}^T]^T$  — вектор повного стану системи,

$$E = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & A_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ B_0 \end{bmatrix}, \quad C = [C_0, C_1].$$

Побудуємо множину стабілізуючих керувань для системи (12) у вигляді статичного зворотного зв'язку:

$$u = Ky, \quad K = K_* + \Delta, \quad \Delta \in \mathcal{K}. \quad (13)$$

Тут  $K_* \in \mathbb{R}^{m \times l}$  — матриця коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану замкненої системи, а  $\mathcal{K} = \{\Delta : \Delta^T P \Delta \leq Q\}$  — еліпсоїдальна множина допустимих збурень матриці  $K_*$ , яку описують додатно означені матриці  $P = P^T > 0$  і  $Q = Q^T > 0$  відповідних розмірів  $m \times m$  і  $l \times l$ . При цьому

$$\|\Delta\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\Delta^T \Delta)} \leq \rho = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}}, \quad (14)$$

оскільки  $\lambda_{\min}(P)\Delta^T\Delta \leq \Delta^T P\Delta \leq Q \leq \lambda_{\max}(Q)I_l$ . Величину  $\rho$  в (14), яку визначає еліпсоїд  $\mathcal{K}$ , будемо називати *радіусом стабілізації* системи (12).

Ставиться задача встановлення умов, за якими нульовий стан замкненої системи керування (12), (13) є асимптотично стійким для кожної матриці  $\Delta \in \mathcal{K}$  і виконується оцінка квадратичного функціонала якості

$$J(u, z_0) = \int_0^{\infty} \varphi(z, u, t) dt \leq \omega, \quad (15)$$

де

$$\varphi(z, u, t) = [z^T, u^T] \Phi(t) \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & R \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} S_0 & S_2 & N_0 \\ S_2^T & S_1 & N_1 \\ \hline N_0^T & N_1^T & R \end{array} \right],$$

$$S \geq NR^{-1}N^T + \delta I_n, \quad R > 0, \quad \delta > 0, \quad t \geq 0. \quad (16)$$

При розв'язанні задачі застосовуємо метод квадратичних функцій Ляпунова  $v(z, t) = z^T X(t)z$  з неперервно диференційовною додатно означеною матрицею  $X(t)$ , який дозволяє враховувати наявність невизначеності матричних коефіцієнтів при  $z = 0$  і  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} A_0 &\in \text{Co}\{A_{01}, \dots, A_{0\alpha_0}\}, & A_1 &\in \text{Co}\{A_{11}, \dots, A_{1\alpha_1}\}, & A_2 &\in \text{Co}\{A_{21}, \dots, A_{2\alpha_2}\}, \\ B_0 &\in \text{Co}\{B_{01}, \dots, B_{0\beta}\}, & C_0 &\in \text{Co}\{C_{01}, \dots, C_{0\gamma_0}\}, & C_1 &\in \text{Co}\{C_{11}, \dots, C_{1\gamma_1}\}, \end{aligned} \quad (17)$$

де задані набори матриць є вершинами деяких політопів у відповідних матричних просторах. У випадку  $K_* \equiv 0$  можна врахувати також аналогічну умову  $D \in \text{Co}\{D_1, \dots, D_\delta\}$ .

Використавши результати роботи [9] і блочне розбиття матриці

$$X(t) = \begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_3^T & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad (18)$$

де  $X_1 = X_1^T$ ,  $X_2 = X_2^T$  і  $X_3$  — блоки розмірів  $n \times n$ , сформулюємо наступний результат у термінах вихідних матриць для замкненої системи керування (12), (13), яка при  $K \in \mathcal{K}_D$  зводиться до форми Лагранжа

$$A_2\ddot{x} + [A_1 - B_0\mathcal{D}(K)C_1]\dot{x} + [A_0 - B_0\mathcal{D}(K)C_0]x = 0. \quad (19)$$

**Теорема.** Нехай для деяких  $\varepsilon_i > 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ , і симетричної матриці (18) при  $z = 0$  і  $t \geq 0$  виконується система співвідношень

$$z_0^T \begin{bmatrix} X_1 & X_3 A_2 \\ A_2^T X_3^T & A_2^T X_2 A_2 \end{bmatrix} z_0 \leq \omega, \quad \varepsilon_1 I_{2n} \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_{2n}, \quad (20)$$

$$\Omega = \left[ \begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & B_{0*}^T & C_{0*}^T \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & B_{1*}^T & C_{1*}^T \\ \hline B_{0*} & B_{1*} & R - G^T P G & D^T \\ C_{0*} & C_{1*} & D & -Q^{-1} \end{array} \right] < 0, \quad (21)$$

де

$$\Omega_{11} = \dot{X}_1 + A_{0*}^T X_3^T + X_3 A_{0*} + S_0 + C_0^T K_c^T N_0^T + N_0 K_c C_0 + C_0^T K_c^T R K_c C_0 + \varepsilon_0 I_n,$$

$$\begin{aligned} \Omega_{21} = \Omega_{12}^T = & A_2^T \dot{X}_3^T + X_1 + A_{1*}^T X_3^T + A_2^T X_2 A_{0*} + \\ & + S_2^T + C_1^T K_c^T N_0^T + N_1 K_c C_0 + C_1^T K_c^T R K_c C_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{22} = & A_2^T \dot{X}_2 A_2 + A_2^T X_3^T + X_3 A_2 + A_2^T X_2 A_{1*} + A_{1*}^T X_2 A_2 + \\ & + S_1 + C_1^T K_c^T N_1^T + N_1 K_c C_1 + C_1^T K_c^T R K_c C_1 + \varepsilon_0 I_n, \end{aligned}$$

$$A_{0*} = B_0 K_c C_0 - A_0, \quad B_{0*} = B_0^T X_3^T + N_0^T + R K_c C_0, \quad C_{0*} = C_0 + D K_c C_0,$$

$$A_{1*} = B_0 K_c C_1 - A_1, \quad B_{1*} = B_0^T X_2 A_2 + N_1^T + R K_c C_1, \quad C_{1*} = C_1 + D K_c C_1,$$

$$M_* = A + B K_c C, \quad \Phi_* = L_*^T \Phi L_*, \quad B_* = B^T X E + N^T + R K_c C,$$

$$C_* = C + D K_c C, \quad L_*^T = [I_{2n}, C^T K_c^T], \quad G = I_m - K_* D, \quad K_c = \mathcal{D}(K_*).$$

Тоді кожне керування (13) забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану  $x = \dot{x} = 0$  системи (19), оцінку функціонала (15) і спільну функцію Ляпунова  $v(x, \dot{x}, t) = x^T X_1 x + 2x^T X_3 A_2 \dot{x} + \dot{x}^T A_2^T X_2 A_2 \dot{x}$ .

Доведення теореми проводиться на основі методу функцій Ляпунова та допоміжного твердження [8], що узагальнює лему Пітерсена про матричну невизначеність [11].

Можна сформулювати наслідки теореми для системи (19) з невизначеностями коефіцієнтів типу (17). Наведемо один із таких наслідків у випадку сталих матриць.

**Наслідок.** Нехай разом із (18) виконується система ЛМН зі сталими матрицями

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & X_3 B_{0r} + N_0 & C_{0p*}^T \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & A_{2k}^T X_2 B_{0r} + N_1 & C_{1q*}^T \\ \hline B_{0r}^T X_3^T + N_0^T & B_{0r}^T X_2 A_{2k} + N_1^T & R - G^T P G & D^T \\ C_{0p*} & C_{1q*} & D & -Q^{-1} \end{array} \right] < 0, \quad (22)$$

де

$$\Omega_{11} = A_{0irp}^T X_3^T + X_3 A_{0irp} + S_0 + C_{0p}^T K_c^T N_0^T + N_0 K_c C_{0p} + C_{0p}^T K_c^T R K_c C_{0p},$$

$$\Omega_{21} = X_1 + A_{1jrq}^T X_3^T + A_{2k}^T X_2 A_{0irp} + S_2^T + C_{1q}^T K_c^T N_0^T + N_1 K_c C_{0p} + C_{1q}^T K_c^T R K_c C_{0p},$$

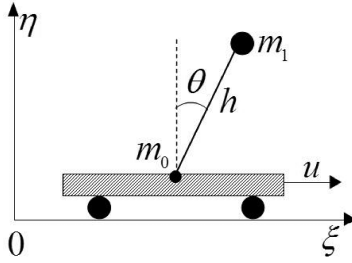


Рис. 1. Одноланковий маятник на платформі.

$$\Omega_{22} = A_{2k}^T X_3^T + X_3 A_{2k} + A_{2k}^T X_2 A_{1jrq} + A_{1jrq}^T X_2 A_{2k} + S_1 + \\ + C_{1q}^T K_c^T N_1^T + N_1 K_c C_{1q} + C_{1q}^T K_c^T R K_c C_{1q},$$

$$A_{0irp} = B_{0r} K_c C_{0p} - A_{0i}, \quad A_{1jrq} = B_{r0} K_c C_{1q} - A_{1j},$$

$$C_{0p*} = C_{0p} + D K_c C_{0p}, \quad C_{1q*} = C_{1q} + D K_c C_{1q},$$

$$i = \overline{1, \alpha_0}, \quad j = \overline{1, \alpha_1}, \quad k = \overline{1, \alpha_2}, \quad r = \overline{1, \beta}, \quad p = \overline{1, \gamma_0}, \quad q = \overline{1, \gamma_1}.$$

Тоді кожне керування (13) забезпечує асимптотичну стійкість стану рівноваги  $x = \dot{x} = 0$  і оцінку функціонала (15) сім'ї систем (17), (19), де

$$\omega = \max_{1 \leq k \leq \alpha_2} \omega_k, \quad \omega_k = x_0^T X_1 x_0 + 2x_0^T X_3 A_{2k} \dot{x}_0 + \dot{x}_0^T A_{2k}^T X_2 A_{2k} \dot{x}_0.$$

**Приклад 1.** Побудуємо систему керування для одноланкового маятника на рухомій платформі (рис. 1).

Кінетична та потенціальна енергії системи відповідно мають вигляд

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2), \quad H = m_1 g \eta_1,$$

де  $\xi_1 = \xi - h \sin \theta$ ,  $\eta_1 = h \cos \theta$ ,  $m_0$  — маса платформи,  $m_1$  — маса маятника,  $\theta$  — кут відхилення маятника,  $\xi$  — горизонтальне переміщення платформи,  $g$  — прискорення вільного падіння. Рух системи в узагальнених координатах  $\xi$  і  $\theta$  описується рівняннями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = v, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

де

$$L = T - H = \frac{1}{2} m_0 \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{\xi}^2 - 2h\dot{\xi}\dot{\theta} \cos \theta + h^2 \dot{\theta}^2) - m_1 g h \cos \theta.$$

Врахувавши силу опору руху платформи, покладемо  $v = u - k\dot{\xi}$ , де  $u$  — керуюча сила, прикладена до платформи,  $k$  — коефіцієнт опору. Тоді рівняння руху системи набирають

вигляду

$$\begin{aligned} (m_0 + m_1)\ddot{\xi} - m_1 h \ddot{\theta} \cos \theta + m_1 h \dot{\theta}^2 \sin \theta + k \dot{\xi} &= u, \\ \ddot{\xi} \cos \theta - h \ddot{\theta} + g \sin \theta &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

причому якщо кутову змінну  $\theta$  замінити на  $\theta + \pi$ , то дана система буде описувати рух платформи з маятником в околі нижнього положення рівноваги.

Систему рівнянь (23) можна подати у вигляді

$$A_2(x) \ddot{x} + A_1(x, \dot{x}) \dot{x} + A_0(x)x = B_0 u, \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} \xi \\ \theta \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_0(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -g \varphi(\theta) \end{bmatrix}, \\ A_1(x, \dot{x}) &= \begin{bmatrix} k & m_1 h \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{bmatrix} m_0 + m_1 & -m_1 h \cos \theta \\ -\cos \theta & h \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$\varphi(\theta) = \sin \theta / \theta$  — неперервна функція.

Покладемо  $h = 0,6096$  м,  $m_0 = 0,94$  кг,  $m_1 = 0,23$  кг,  $k = 0$  кг/с [12] і розглянемо вектор спостереження  $y = [\xi + \dot{\xi} + u, \dot{\theta}]^T$ . В цьому випадку маємо нелінійну систему керування у векторно-матричній формі:

$$E(z)\dot{z} = A(z)z + Bu, \quad y = Cz + Du, \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} z &= \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \quad E(z) = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad A(z) = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \\ C &= [C_0, C_1], \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для пошуку керування, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану системи (25), застосуємо доведену лему до відповідної лінійної системи (2), побудованої із (25) при  $E = E(0)$  і  $A = A(0)$ . Розв'язавши дві ЛМН (11) відносно  $X$  і  $Y$ , знайдено стабілізуюче керування (6) на основі спостережника (5) повного порядку  $r = 4$ . При цьому згідно з (8) і (10) побудовано блоки  $U$ ,  $Z$ ,  $V$  і  $K$  матриці зворотного зв'язку  $\widehat{K}_*$  в об'єднаній системі керування (4):

$$\widehat{K}_* = \left[ \begin{array}{cccc|cc} -0,8596 & 14,0109 & 0,6664 & 3,1444 & 0,8251 & 0,1002 \\ -0,0245 & 0,3987 & -0,0095 & -1,3801 & 0,0235 & 2,4725 \\ -0,1680 & -12,2034 & 0,3476 & -4,7947 & 0,2040 & 1,4134 \\ -0,0314 & -7,9234 & 0,6650 & -18,0111 & 0,1002 & 11,5424 \\ \hline 0,0418 & -16,9811 & 0,4043 & -3,9324 & 0 & 0 \end{array} \right].$$



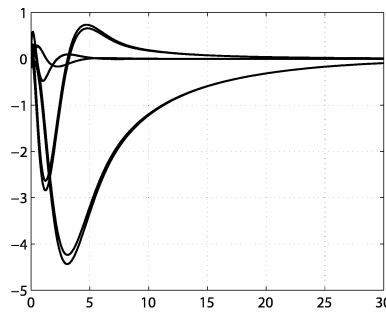


Рис. 2. Поведінка розв'язків системи з керуванням  $\hat{u} = \hat{K}_* \hat{y}$ .

У даному випадку  $K = 0$  і керування  $\hat{u} = \hat{K}_* \hat{y}$  забезпечує асимптотичну стійкість системи (4). Нульовий стан замкненої нелінійної системи (5), (25) також асимптотично стійкий. На рис. 2 зображено поведінку розв'язків даної системи з початковим вектором  $\hat{x}_0 = [0,05 \ 0,1 \ 0,15 \ 0,2 \ -0,05 \ -0,1 \ -0,15 \ -0,2]^T$ .

Для ілюстрації доведеної теореми задамо блочні матриці  $\hat{S}$ ,  $\hat{R}$  і  $\hat{N}$  функціонала:

$$R = 1, \quad S_0 = S_1 = 0,5I_2, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_0 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Нехай маса платформи та коефіцієнт опору є невизначеними і набирають значень на інтервалах

$$0,89 \leq m_0 \leq 1,01, \quad 0 \leq k \leq 0,3. \quad (26)$$

Тоді система співвідношень (22) складається з чотирьох матричних нерівностей, що відповідають можливим значенням  $m_0$  і  $k$  на кінцях заданих інтервалів. Із використанням системи МАТЛАВ знайдено додатно означені матриці  $\hat{P}$ ,  $\hat{Q}$  і  $\hat{X}$ , які задовольняють вказану систему нерівностей. Отже, для всіх значень невизначених параметрів  $m_0$  і  $k$  з інтервалів (26) і матриць ДЗЗ  $\hat{K} = \hat{K}_* + \hat{\Delta}$ , де  $\hat{\Delta}^T \hat{P} \hat{\Delta} \leq \hat{Q}$ , рух маятника в околі нульового стану рівноваги є асимптотично стійким. При цьому  $v(\hat{x}) = \hat{x}^T \hat{X} \hat{x}$  є спільною функцією Ляпунова, а значення заданого функціонала якості не перевищує  $v(\hat{x}_0) = 172760$ . Тут всі вектори і матриці із символом  $\hat{\phantom{x}}$  отримано шляхом зведення системи керування з ДЗЗ до системи зі СЗЗ типу (4) (див. п. 2).

Проведено також дослідження впливу коефіцієнта опору та маси платформи на робастність динамічного регулятора. В таблиці наведено значення радіуса робастної стабілізації  $\rho$ , отримані при різних значеннях вказаних параметрів.

З наведеної таблиці можна зробити висновок, що на вказаному інтервалі зміни маси платформи робастність динамічного стабілізуючого регулятора найбільша при  $k = 0,1$  або  $k = 0,2$ . Подальше збільшення коефіцієнта опору на даному інтервалі призводить до зменшення радіуса стабілізації системи.

Таблиця 1. Залежність радіуса стабілізації  $\rho$  від  $m_0$  і  $k$ .

$m_0$	$k$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,90	0,0075	0,0098	0,0003	0,0079	0,0088	0,0014
0,91	0,0030	0,0096	0,0002	0,0077	0,0077	0,0014
0,92	0,0030	0,0094	0,0086	0,0082	0,0075	0,0074
0,93	0,0029	0,0016	0,0088	0,0006	0,0014	0,0014
0,94	0,0033	0,0039	0,0089	0,0087	0,0069	0,0001
0,95	0,0031	0,0080	0,0006	0,0006	0,0004	0,0004

**Приклад 2.** Розглянемо систему стабілізації нестійкого положення рівноваги одноланкового маятника з маховиком на кінці (рис. 3). Маховик обертається електродвигуном, який разом із редуктором вмонтовано на маятнику. Керування рухом маятника здійснюється за рахунок зміни напрямку і швидкості обертання інерційного маховика, що в свою чергу досягається зміною обертання двигуна під дією керуючої напруги живлення якоря двигуна. Ця напруга обмежена по модулю і задається у відповідності з командами, що надходять від комп'ютера. Маятник може здійснювати обертання у вертикальній площині. Його вісь обертання розміщено горизонтально і закріплено на нерухомій основі, а вісь обертання маховика знаходиться на маятнику. Для вимірювання кутів повороту маятника і маховика передбачено імпульсні датчики.

Рух системи в узагальнених координатах  $\psi$  (кут крена маятника) і  $\varphi$  (кут повороту маховика відносно маятника) описується рівняннями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = T_u, \quad (27)$$

де  $L = T - H$ ,  $T = \frac{1}{2} [(J_v + m_1 h^2) \dot{\psi}^2 + J_r (\dot{\psi} + \Omega)^2 + J_m (\dot{\psi} + \omega)^2]$ ,  $H = (m_0 b + m_1 h) g \cos \psi$ ,  $\dot{\varphi} = \omega = \chi \Omega$  — кутова швидкість обертання маховика відносно маятника,  $\Omega$  — швидкість обертання ротора двигуна,  $\chi$  — коефіцієнт редукції,  $m_0$  — маса маятника,  $m_1$  — маса двигуна,  $J_m$  — момент інерції маховика відносно його головної осі (осі обертання),  $J_r$  — момент інерції ротора електродвигуна,  $J = J_v + J_r + J_m + m_1 h^2$  — повний момент

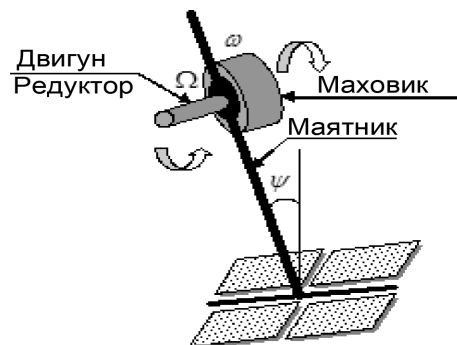


Рис. 3. Маятник, керований маховиком.

інерції системи,  $J_v$  — момент інерції маятника відносно осі обертання,  $g$  — прискорення вільного падіння,  $b$  і  $h$  — відстані від осі обертання до центрів мас маятника і маховика (з ротором двигуна),  $T_u$  — момент електромагнітних сил, прикладених до ротора двигуна, який наближено записується у вигляді  $T_u = c_1 u - c_2 \omega \chi^{-1}$ ,  $u$  — керуюча напруга в колі двигуна,  $c_1$  і  $c_2$  — параметри двигуна.

Рівняння динаміки маятника з маховиком мають вигляд [13]

$$\begin{aligned} J\chi\ddot{\psi} + (J_r + \chi J_m)\dot{\omega} &= (m_0 b + m_1 h)g\chi \sin \psi, \\ (J_r + \chi J_m)\chi\ddot{\psi} + (J_r + \chi^2 J_m)\dot{\omega} &= \chi T_u. \end{aligned} \quad (28)$$

Запишемо систему рівнянь (28) у векторно-матричній формі:

$$E\dot{x} = A(x)x + Bu, \quad (29)$$

де

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \omega \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \chi \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J\chi & J_r + \chi J_m \\ 0 & J_r \chi + J_m \chi^2 & J_r + J_m \chi^2 \end{bmatrix}, \\ A(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (m_0 b + m_1 h)g\chi \varphi(x_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$\varphi(x_1) = \sin x_1 / x_1$  — неперервна функція.

Далі використовуємо такі числові значення параметрів [14]:  $m_0 = 1$  кг,  $m_1 = 3$  кг,  $b = 0,1$  м,  $h = 0,13$  м,  $J_v = 0,0392$  кг · м<sup>2</sup>,  $J_m = 0,03$  кг · м<sup>2</sup>,  $J_r = 0,0001$  кг · м<sup>2</sup>,  $\chi = 0,1$ ,  $c_1 = 0,08$  Н · м/В,  $c_2 = 0,0076$  Н · м · с.

Припустимо, що вимірюється вектор  $y = Cx + Du$ , де

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

На підставі леми 2.1 роботи [8] знаходимо керування

$$u = K_* y, \quad K_* = [6,346 \ 0,8949], \quad (30)$$

що забезпечує асимптотичну стійкість лінійної системи

$$E\dot{x} = M_* x, \quad M_* = A(0) + BD(K_*)C, \quad (31)$$

спектр якої  $\{-1, 4141 \pm 6,5441i; -6,1280\}$ . При цьому нульове положення рівноваги вихідної нелінійної системи (29) із керуванням (30) також є асимптотично стійким. Поведінку розв'язків замкненої системи (29), (30) з початковим вектором  $x_0 = [1 \ 2 \ 3]^T$  зображено на рис. 4.

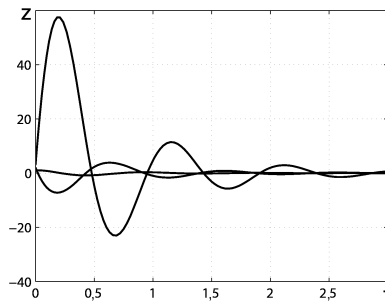


Рис. 4. Поведінка розв'язків системи (29) з керуванням  $u = K_*y$ .

Для ілюстрації отриманих результатів задамо матриці функціонала  $S = 0,1I_3$ ,  $N = [0, 1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $R = 0,5$  і припустимо, що система має невизначені параметри

$$0,5 \leq m_0 \leq 1,2, \quad 0,03 \leq J_v \leq 0,04. \tag{32}$$

На підставі доведеної теореми знайдено  $P = 11,0734$  і додатно означені матриці

$$Q = \begin{bmatrix} 1,2794 & -0,0091 \\ -0,0091 & 1,2667 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 55277,7706 & 10550,6231 & 762,3395 \\ 10550,6231 & 82951,7451 & 4833,6928 \\ 762,3395 & 4833,6928 & 86386,5232 \end{bmatrix},$$

які задовольняють систему чотирьох матричних нерівностей (22), що відповідають можливим значенням пари  $(m_0, J_v)$  на кінцях інтервалів (32).

Отже, для всіх значень параметрів (32) і вектора коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку  $K$  із замкненої області, обмеженої еліпсом  $(K - K_*)Q^{-1}(K - K_*)^T = P^{-1}$  (рис. 5), рух маятника, керованого маховиком, в околі нульового положення рівноваги є асимптотично стійким. При цьому  $v(x) = x^T E^T X E x$  є спільною функцією Ляпунова, значення заданого функціонала якості не перевищує  $v(x_0) = 1,27 \cdot 10^6$ , а радіус стабілізації  $\rho = 0,3405$ .

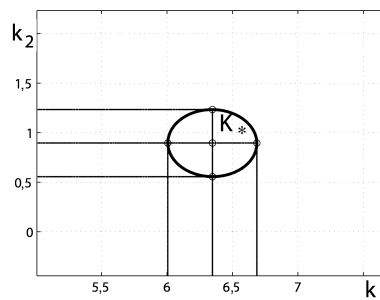


Рис. 5. Область коефіцієнтів керування  $K_*$  при зміні параметрів  $m_0$  і  $J_v$ .

Тепер для системи (29) побудуємо динамічний регулятор (3) у вигляді спостережника повного порядку (5). Нехай вимірюванню доступний вектор

$$y = Cx + Du, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для лінійної системи (4) на основі формул (8), (10) і (11) знайдено стабілізуючу матрицю

$$\hat{K}_* = \left[ \begin{array}{ccc|cc} -0,6444 & -1,6812 & 0 & 0,6444 & 2,6812 \\ -431,2678 & -94,5918 & -8,1519 & 2,6812 & 21,4257 \\ 1814,4536 & 289,7701 & 31,5559 & -0,5055 & -6,5464 \\ \hline 74,0897 & 11,326 & 2,2119 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Знайдено також додатно означені матриці  $\hat{P}$ ,  $\hat{Q}$  та  $\hat{X}$ , які задовольняють систему чотирьох матричних нерівностей (22), що відповідають можливим значенням параметрів  $m_0$  і  $J_v$  на кінцях інтервалів (32).

Отже, для всіх значень параметрів (32) і коефіцієнтів підсилення зворотного зв'язку  $\hat{K} = \hat{K}_* + \hat{\Delta}$ , де  $\hat{\Delta}^T \hat{P} \hat{\Delta} \leq \hat{Q}$ , рух маятника з маховиковим керуванням в околі нульового положення рівноваги є асимптотично стійким. При цьому радіус стабілізації системи  $\rho = 0,0088$ .

**4. Висновок.** В роботі отримано нові методи робастної стабілізації лінійних та нелінійних систем керування з динамічним зворотним зв'язком на основі спостережників станів повного порядку. Практична реалізація запропонованих методів базується на розв'язанні ЛМН. Для знаходження розв'язків ЛМН зі сталими матрицями може бути застосована ефективна процедура в системі MATLAB. Відмінною особливістю побудованих ЛМН у порівнянні з відомими є можливість побудови еліпсоїда стабілізуючих матриць зворотного зв'язку, спільної квадратичної функції Ляпунова, а також оцінки квадратичного функціонала якості в задачі оптимізації нелінійних систем керування з невизначеними матричними коефіцієнтами.

1. Поляк Б. Т., Шербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
2. Zhou K., Doyle J. C., Glover K. Robust and optimal control. — Englewood: Prentice Hall, 1996. — 586 p.
3. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.
4. Поляк Б. Т., Шербаков П. С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 7–46.
5. Syrmos V.L., Abdallah C.T., Dorato P., Grigoriadis K. Static output feedback: a survey // Automatica. — 1997. — **33**, № 2. — P 125–137.
6. Алиев Ф. А., Ларин В. Б. Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной (обзор) // Прикл. механика. — 2011. — **47**, № 3. — С. 3–49.
7. Мазко А. Г., Шрам В. В. Устойчивость и стабилизация семейства псевдолинейных дифференциальных систем // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 2. — С. 227–237.
8. Мазко О. Г., Богданович Л. В. Робастна стійкість і оптимізація нелінійних систем керування // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 1. — С. 200–218.

9. *Мазко О. Г., Богданович Л. В.* Стабілізація механічних систем з невизначеними параметрами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 3. — С. 123–144.
10. *Краснова С. А., Уткин В. А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. — М.: Наука, 2006. — 272 с.
11. *Petersen I.* A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // Systems Control Lett. — 1987. — **8**, № 4. — P. 351–357.
12. *Singh N. M., Dubey J., Laddha G.* Control of pendulum on a cart with state dependent Riccati equations // World Acad. Sci. Eng. and Technol. — 2008. — **41**. — P. 671–675.
13. *Гришин А. А., Ленский А. В., Охоцимский Д. Е., Панин Д. А., Формальский А. М.* О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2002. — №5. — С. 14–24.
14. *Андреевский Б. Р.* Глобальная стабилизация неустойчивого маятника с маховичным управлением // Управление большими системами. — 2009. — Вып. 24. — С. 258–280.

*Одержано 25.07.14*