

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В СОСТАВНЫХ РЕЗЕРВУАРАХ

**Ю. В. Троценко**

*Ин-т математики НАН Украины*

*Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3*

*e-mail: trots@imath.kiev.ua*

*We develop a variation method for solving a spectral problem for free oscillations of fluid in a complex geometry reservoir having an axis symmetry. The problem is formulated as to use the bridging method. We obtain a generalized functional such that the conjugacy conditions on the bordering parts of the introduced domains make natural boundary-value conditions. We use the Trefts method to reduce the initial problem to a problem of solving an algebraic problem the dimension of which is not too large. The calculations performed show effectiveness of the proposed method.*

*Розвинуто варіаційний метод розв'язання спектральної задачі про вільні коливання рідини в осесиметричному резервуарі складної геометрії, що поставлена з позицій методу спряження. Отримано узагальнений функціонал, для якого умови спряження на суміжній частині введених підобластей є природними граничними умовами. За допомогою методу Трефтца розв'язання вихідної задачі зведено до розв'язання алгебраїчної задачі невеликої розмірності. Наведено результати розрахунків, які демонструють ефективність запропонованого підходу.*

Решение многих задач механики сплошной среды для составных областей зачастую может быть существенно упрощено, если область разделить на отдельные подобласти, вводя на поверхностях раздела соответствующие условия сопряжения. Построение приближенных решений задач в такой постановке обусловлено определенными трудностями, связанными с выполнением условий сопряжения.

Задача о линейных собственных колебаниях идеальной и несжимаемой жидкости в неподвижном резервуаре относительно потенциала смещений  $\Phi(x, y, z)$  имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \in Q, \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \kappa \Phi \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Big|_S = 0, \quad \int_{\Sigma} \Phi dS = 0,$$

где  $\Sigma$  — невозмущенная свободная поверхность жидкости,  $S$  — смачиваемая поверхность резервуара,  $Q$  — область, ограниченная поверхностью  $\Sigma \cup S$ ,  $\vec{\nu}$  — орт внешней нормали к поверхностям  $\Sigma$  и  $S$ ,  $\kappa$  — частотный параметр, который подлежит определению.

Пусть резервуар имеет форму тела вращения. Ось  $Oz$  декартовой системы координат  $Oxyz$  совместим с осью симметрии емкости и направим ее в сторону свободной поверхности  $\Sigma$ . Введем цилиндрическую систему координат  $Ox\eta\eta$ :

$$x = r \cos \eta, \quad y = r \sin \eta, \quad z = z. \quad (2)$$

В дальнейшем будем рассматривать антисимметричные колебания жидкости в плоскости  $Oyz$ , для которых главный вектор гидродинамических сил, действующих на резервуар, отличен от нуля. С учетом осевой симметрии резервуара представим функцию  $\Phi(x, y, z)$  в виде

$$\Phi(x, y, z) = \psi(r, z) \sin \eta. \quad (3)$$

Тогда для составляющей потенциала смещений  $\psi(r, z)$  получим следующую спектральную задачу в области  $G$  меридионального сечения сосуда:

$$M(\psi) = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \psi = 0, \quad (z, r) \in G, \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - \varkappa \psi \right) \Big|_{L_0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \Big|_L = 0, \quad \psi(0, z) = 0.$$

Здесь  $L_0$  и  $L$  — линии пересечения меридионального сечения сосуда с поверхностями  $\Sigma$  и  $S$  соответственно.

Однородная краевая задача (4) с параметром  $\varkappa$  в граничном условии эквивалентна вариационной задаче для функционала [1]:

$$I = \int_G r \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \psi^2 \right] dG - \varkappa \int_{L_0} r \psi^2 ds \quad (5)$$

на классе функций, интегрируемых с квадратом вместе и их первыми производными и подчиненных последнему граничному условию из (4). Стационарные значения функционала (5) достигаются на собственных значениях и функциях задачи (4).

На основе вариационной формулировки задачи (4) и метода Трэфтца ранее был решен широкий класс задач по определению частот и форм собственных колебаний жидкости в осесимметричном резервуаре [1, 2]. Однако для удлиненных вдоль оси  $Oz$  емкостей, у которых радиус свободной поверхности жидкости намного меньше продольного размера сосуда, сходимость метода Трэфтца существенно замедляется, что приводит к необходимости проведения большого числа вычислений. Для рассматриваемого класса резервуаров решение задачи (4) может быть эффективно построено, если исходить при этом с позиций задач сопряжения.

Разобьем область  $G$  линией  $\gamma$  на две подобласти  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ . При этом область  $G^{(1)}$  будет ограничена осью  $Oz$ , линиями  $L_0$ ,  $L^{(1)}$  и  $\gamma$ , а область  $G^{(2)}$  — соответственно осью  $Oz$  и линиями  $L^{(2)}$  и  $\gamma$ . Здесь  $L^{(1)}$  и  $L^{(2)}$  — линии пересечения меридионального сечения резервуара со смачиваемыми границами областей  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$  соответственно. Обозначим решения исходной задачи (4) в подобластях  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$  через  $\psi^{(1)}$  и  $\psi^{(2)}$ . В дальнейшем верхний индекс во всех встречающихся функциях будет обозначать область, в которой эти функции определены. При этом для функций  $\psi^{(1)}$  и  $\psi^{(2)}$ , а также их производных на смежной линии  $\gamma$  подобластей  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$  должны выполняться условия сопряжения

$$\left( \psi^{(1)} = \psi^{(2)} \right) \Big|_{\gamma}, \quad \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} = - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right) \Big|_{\gamma}, \quad (6)$$

где  $\vec{\nu}^{(1)}$  и  $\vec{\nu}^{(2)}$  — орты внешних нормалей к областям  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$  соответственно. Условия (6) фигурируют наравне с граничными условиями исходной задачи.

Для построения приближенного решения сформулированной задачи сопряжения будем использовать вариационный метод, который для одномерных задач применялся в работах [3, 4]. Заменяя в функционале (5) интеграл по области  $G$  суммой интегралов по областям  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ , представим его в виде

$$I = \sum_{i=1}^2 \int_{G^{(i)}} F(\psi^{(i)}) dG^{(i)} - \varkappa \int_{L_0} r (\psi^{(1)})^2 ds, \quad (7)$$

где

$$F(\psi^{(i)}) = r \left[ \left( \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{r} (\psi^{(i)})^2.$$

Вычислим первую вариацию функционала (7), не накладывая никаких ограничений на варьируемые функции, кроме условия на оси  $Oz$ .

Пусть имеем две произвольные функции  $\psi(r, z)$  и  $\varphi(r, z)$ , которые вместе с их первыми производными являются непрерывными функциями в некоторой области  $G$  вплоть до ее границы  $\Gamma$ . Введем в рассмотрение следующий интеграл:

$$K(\psi, \varphi) = \int_G r \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] dG.$$

Преобразуем его с помощью формулы Грина:

$$\begin{aligned} K(\psi, \varphi) &= \int_G \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial z} \varphi \right) \right] dG - \int_G \left[ r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \varphi dG = \\ &= - \int_G \left[ M(\psi) + \frac{1}{r} \psi \right] \varphi dG + \int_{\Gamma} r \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \varphi ds. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом формулы (8) и принятых обозначений первую вариацию от функционала (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta I &= 2 \sum_{k=1}^2 \left[ \int_{L^{(k)}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \nu^{(k)}} \delta \psi^{(k)} r ds + \int_{\gamma^{(k)}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \nu^{(k)}} \delta \psi^{(k)} r ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_{G^{(k)}} M(\psi^{(k)}) \delta \psi^{(k)} dG^{(k)} \right] + 2 \int_{L_0} \left[ \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} - \varkappa \psi^{(1)} \right] r \delta \psi^{(1)} ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что интегрирование вдоль линии  $\gamma$ , в силу принятого разбиения области  $G$ , выполняется дважды в противоположных направлениях. Поэтому здесь через  $\gamma^{(k)}$  обозначены контуры интегрирования по линии  $\gamma$  со стороны областей  $G^{(k)}$  соответственно.

Приравнивая (9) к нулю, получаем вариационное уравнение для определения функций  $\psi^{(k)}(r, z)$  и параметра  $\varkappa$ . Из этого уравнения в силу произвольного варьирования функций  $\psi^{(k)}$  в областях  $G^{(k)}$  и на границах  $L_0$  и  $L^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ , следует, что в пределах каждой из введенных подобластей должны выполняться исходные уравнения и соответствующие граничные условия на контурах  $L_0$  и  $L^{(k)}$ .

Далее, если предположить, что класс допустимых функций подчинен условию

$$\left(\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\right)\Big|_{\gamma} = 0, \quad (10)$$

то второе условие сопряжения (6) будет естественным граничным условием для функционала  $I$ .

Итак, при использовании метода Ритца для решения вариационного уравнения  $\delta I = 0$  аппроксимации для функций  $\psi^{(k)}$  должны выбираться таким образом, чтобы они обеспечивали выполнение условия (10) на контуре  $\gamma$ . В этом случае остальные граничные условия задачи для рассматриваемого функционала будут естественными граничными условиями. Построение координатных функций, удовлетворяющих граничному условию (10), вызывает определенные трудности. В связи с этим возникает проблема построения такого функционала  $F_1$ , для которого все условия сопряжения (6) были бы естественными граничными условиями.

Если рассматривать условие (10) как дополнительное ограничение на задачу нахождения стационарного значения функционала  $I(\psi)$ , то можно воспользоваться методом Лагранжа для построения такого функционала. В соответствии с этим введем в рассмотрение новый функционал  $F_1(\psi, \alpha)$ , который имеет вид

$$F_1(\psi, \alpha) = I(\psi) + \int_{\gamma} \alpha \left(\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\right) r ds, \quad (11)$$

где  $\alpha(s)$  — неизвестная функция, заданная на контуре  $\gamma$  и подлежащая определению в дальнейшем. Эта функция называется множителем Лагранжа.

Стационарное значение функционала (11) нужно искать при свободном варьировании функций  $\psi^{(k)}$  и  $\alpha$ . Следовательно, введение множителя Лагранжа приводит к увеличению числа неизвестных функций рассматриваемой задачи. Во избежание искусственного повышения числа неизвестных функций исходной задачи найдем явное выражение для множителя Лагранжа. Тогда, в отличие от работы [5], где искомые функции и множитель Лагранжа находились методом Ритца, после замены функции  $\alpha(s)$  в функционале (11) на установленное ее явное выражение можно получить обобщенный функционал относительно функций  $\psi^{(k)}$ . Это позволит существенно упростить алгоритм нахождения приближенного решения вариационной задачи с помощью метода Ритца.

Вычислим первую вариацию функционала (11) и приравняем ее к нулю. С учетом

выражения (9) будем иметь

$$\begin{aligned} \delta F_1 = & \sum_{k=1}^2 \left[ \int_{L^{(k)}} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \nu^{(k)}} \delta \psi^{(k)} r ds - \int_{G^{(k)}} M(\psi^{(k)}) \delta \psi^{(k)} dG^{(k)} \right] + \\ & + \int_{L_0} \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} - \kappa \psi^{(1)} \right) \delta \psi^{(1)} r ds + \int_{\gamma} \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} + \frac{\alpha}{2} \right) \delta \psi^{(1)} r ds + \\ & + \int_{\gamma} \left( \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\alpha}{2} \right) \delta \psi^{(2)} r ds + \frac{1}{2} \int_{\gamma} \delta \alpha \left( \psi^{(1)} - \psi^{(2)} \right) r ds = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь было учтено, что при изменении направления пути интегрирования на противоположный криволинейный интеграл первого рода не меняется.

Из свободного варьирования функций  $\psi^{(k)}$  на границе  $\gamma$  из вариационного уравнения (12) вытекают соотношения

$$\frac{\alpha}{2} = - \left. \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right|_{\gamma}, \quad \frac{\alpha}{2} = \left. \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right|_{\gamma}. \quad (13)$$

Складывая эти два равенства, получаем выражение для множителя Лагранжа:

$$\alpha = \left( \left. \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) \right|_{\gamma}. \quad (14)$$

С учетом этого соотношения обобщенный функционал  $F(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})$  имеет вид

$$F(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = I(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) + \int_{\gamma} \left( \psi^{(1)} - \psi^{(2)} \right) \left( \left. \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) \right) r ds. \quad (15)$$

Применяя стандартные приемы вариационного исчисления, убеждаемся, что уравнениями Эйлера для функционала (15) будут уравнения (4). При этом краевые условия задачи и условия сопряжения (6) для него являются естественными граничными условиями, так как они автоматически выполняются для функций  $\psi^{(k)}$ , доставляющих функционалу  $F$  стационарное значение. Это является важным фактором при решении задач сопряжения вариационным методом.

Полученные результаты позволяют теперь перейти к построению приближенного решения исходной задачи на основе метода Ритца. В связи с этим представим искомые функции в виде следующих отрезков обобщенных рядов:

$$\psi^{(1)}(r, z) = \sum_{j=1}^{m_0} a_j W_j^{(1)}, \quad \psi^{(2)}(r, z) = \sum_{j=1}^{n_0} b_j W_j^{(2)}, \quad (16)$$

где  $a_j, b_j$  — произвольные постоянные,  $\{W_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$  и  $\{W_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$  — системы базисных функций для областей  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ , которые удовлетворяют условию  $M(W_j^{(k)}) = 0, k = 1, 2$ .

Требование, чтобы системы базисных функций удовлетворяли исходному уравнению, позволяет избежать от вычисления двойных интегралов по области  $G^{(k)}$  при нахождении коэффициентов алгебраической системы уравнений относительно постоянных  $a_j$  и  $b_j$ .

Коэффициенты разложений (16) определяются из условий стационарности функционала (15):

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_i} = 0. \quad (17)$$

В итоге решение исходной задачи сводится к решению обобщенной алгебраической задачи собственных значений

$$(A - \kappa B) \vec{X} = 0, \quad (18)$$

$$\vec{X}^T = \{a_1, a_2, \dots, a_{m_0}, b_1, b_2, \dots, b_{n_0}\}.$$

Формирование элементов  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_{ij}$  матриц  $A$  и  $B$  будем осуществлять на основе вариационного уравнения  $\delta F = 0$  с использованием выражения (9). При вычислении  $\partial F / \partial a_i$  в вариации для функционала  $F$  полагаем  $\delta\psi^{(1)} = W_i^{(1)}, \delta\psi^{(2)} = 0$ . При нахождении  $\partial F / \partial b_i$  полагаем  $\delta\psi^{(1)} = 0, \delta\psi^{(2)} = W_i^{(2)}$ . В результате получим следующие выражения для элементов  $\alpha_{ij}$  и ненулевых элементов  $\beta_{ij}$ :

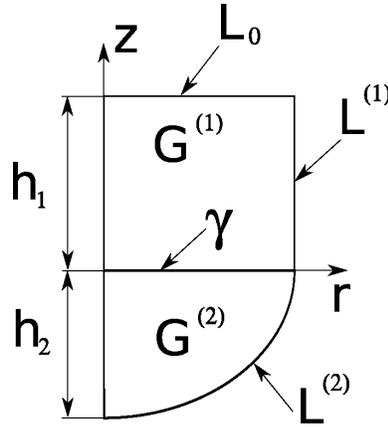
$$\alpha_{i,j} = 2 \int_{\Gamma^{(1)}} W_i^{(1)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} r ds - \int_{\gamma} \left( W_i^{(1)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} + W_j^{(1)} \frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds, \quad i, j = 1, 2, \dots, m_0,$$

$$\alpha_{i,j+m_0} = \int_{\gamma} \left( W_i^{(1)} \frac{\partial W_j^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} + W_j^{(2)} \frac{\partial W_i^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds, \quad i = 1, 2, \dots, m_0, \quad j = 1, 2, \dots, n_0,$$

$$\alpha_{i+m_0,j} = \int_{\gamma} \left( W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} + W_j^{(1)} \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right) r ds, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_0, \quad (19)$$

$$\alpha_{i+m_0,j+m_0} = 2 \int_{\Gamma^{(2)}} W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} r ds - \int_{\gamma} \left( W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} + W_j^{(2)} \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right) r ds, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_0,$$

$$\beta_{i,j} = 2 \int_{L_0} W_i^{(1)} W_j^{(1)} r ds, \quad i, j = 1, 2, \dots, m_0.$$



Напомним, что  $\Gamma^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ , — границы областей  $G^{(k)}$  ( $\Gamma^{(1)} = L^{(1)} \cup L_0 \cup \gamma$ ,  $\Gamma^{(2)} = L^{(2)} \cup \gamma$ ). Симметричность матрицы  $A$  вытекает из симметричности оператора исходной задачи. Элементы матриц  $A$  и  $B$  с высокой степенью точности могут быть вычислены с помощью квадратурных формул Гаусса.

Выражения для коэффициентов матрицы  $A$  в некоторых случаях могут быть существенно упрощены за счет рационального выбора систем базисных функций для аппроксимации решений  $\psi^{(1)}$  и  $\psi^{(2)}$  в областях  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$  соответственно.

В качестве примера рассмотрим составной сосуд, который имеет форму прямого кругового цилиндра единичного радиуса с произвольным осесимметричным днищем. Меридиональное сечение такого сосуда представлено на рисунке.

Для сосудов, у которых радиус свободной поверхности жидкости значительно меньше их продольного размера, сходимость последовательных приближений метода Трэфтца, полученных на основе функционала (5), существенно замедляется, что приводит к потере устойчивости вычислительного процесса до достижения предельных значений решений спектральной задачи (4) [1, 2]. Для такого класса резервуаров решение задачи (4) может быть эффективно построено, если исходить при этом с позиций предложенного алгоритма.

Разобьем область  $G$  прямой линией  $\gamma$ , которая перпендикулярна оси  $Oz$ , на две подобласти  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ . В этом случае область  $G^{(1)}$  будет иметь форму прямоугольника единичной ширины и высоты  $h_1$ . Применяя метод разделения переменных, координатные функции для подобласти  $G^{(1)}$  целесообразно выбрать в виде

$$W_i^{(1)} = \{\zeta_i \cos h[\zeta_i(z - h_1)] + \varkappa \sin h[\zeta_i(z - h_1)]\} J_1(\zeta_i r), \quad (20)$$

где  $J_1(x)$  — функция Бесселя первого рода и первого порядка;  $\zeta_i$  —  $i$ -й корень уравнения  $J_1'(x) = 0$ .

Представленная система координатных функций  $\{W_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}$  заведомо удовлетворяет исходному уравнению в области  $G^{(1)}$  и граничным условиям для функции  $\psi^{(1)}$  на контурах  $L_0$  и  $L_1$ . Кроме того, эти функции ортогональны между собой с весом  $r$ .

Для подобласти  $G^{(2)}$  в качестве координатных функций выберем собственные функ-

ции следующей однородной граничной задачи с параметром в граничном условии:

$$M(W_i^{(2)}) = 0, \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right|_{L^{(2)}} = 0, \quad \left( \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} - \omega_i W_i^{(2)} \right) \Big|_{\gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Граничная задача (21) определяет свободные колебания жидкости в сосуде, имеющем форму днища рассматриваемого резервуара. Все собственные значения  $\omega_i$  задачи (21) действительны и положительны и имеют единственную предельную точку, расположенную на бесконечности. В свою очередь, совокупность собственных функций обладает свойством полноты на линии  $\gamma$  и удовлетворяет условиям ортогональности [1]

$$\int_{\gamma} W_n^{(2)} W_m^{(2)} r ds = 0, \quad \int_{\gamma} \frac{\partial W_n^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial W_m^{(2)}}{\partial z} r ds = 0, \quad n \neq m. \quad (22)$$

Приближенное решение задачи (21) можно представить в виде

$$W_i^{(2)} = \sum_{k=1}^{K_0} X_k^{(i)} V_k(z, r), \quad (23)$$

где  $X_k^{(i)}$  — неопределенные постоянные, а  $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$  — система линейно независимых частных решений исходного уравнения в сферической системе координат. В переменных  $r$  и  $z$  эти функции имеют вид [1]

$$V_1 = r, \quad V_2 = zr, \quad V_3 = z^2 r - \frac{1}{4} r^3. \quad (24)$$

Дальнейшее вычисление функций  $V_k$  и их первых частных производных основано на использовании рекуррентных формул [1]

$$V_{k+1} = \frac{[(2k+1)zV_k - (k-1)(z^2 + r^2)V_{k-1}]}{k+2},$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial z} = (k-1)V_{k-1}, \quad r \frac{\partial V_k}{\partial r} = kV_k - (k-1)zV_{k-1}.$$

Постоянные  $X_k^{(i)}$  находятся из условий стационарности функционала (5). В результате определение векторов  $\vec{X}^{(i)} = \{X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_{K_0}^{(i)}\}$  сводится к решению однородной алгебраической системы

$$(\tilde{A} - \omega_i \tilde{B}) \vec{X}^{(i)} = 0, \quad (25)$$

в которой элементы  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  матриц  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  вычисляются по формулам

$$\alpha_{i,j} = \int_{L^{(2)} \cup \gamma} V_i \frac{\partial V_j}{\partial \nu^{(2)}} r ds, \quad b_{i,j} = \int_{\gamma} V_i V_j r ds.$$

Система базисных функций  $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$  в большинстве случаев обеспечивает нахождение с достаточно высокой точностью только первых трех-четырех собственных функций и собственных значений задачи (21). Определения произвольного конечного числа функций  $W_i^{(2)}(z, r)$  можно достичь за счет расширения класса допустимых функций такими функциями, которые учитывали бы свойство локализации высших собственных функций в окрестности границы  $\gamma$  области  $G^{(2)}$  и их большую изменчивость при удалении от этой границы внутрь области  $G^{(2)}$ . В связи с этим, следуя работе [6], получаем новую систему базисных функций  $\{\tilde{V}_k\}_{k=1}^{\infty}$ , которая имеет следующую структуру:

$$\{\tilde{V}_k\}_{k=1}^{N_0} = \{V_1, V_2, \dots, V_{K_0}, V_{K_0+1}, V_{K_0+2}, \dots, V_{K_0+i}\}, \quad (26)$$

$$N_0 = K_0 + p - p_0 + 1,$$

где первые  $K_0$  координатных функций вычислялись по формулам (24), тогда как последующие базисные функции имеют вид

$$\{V_{K_0+i}\}_{i=1}^{p-p_0+1} = \frac{\cosh[\zeta_{q_i}(z + h_2)]}{\zeta_{q_i} J_1(\zeta_{q_i}) \sin h(\zeta_{q_i} h_2)} J_1(\zeta_{q_i} r),$$

$$q_i = p_0 + i - 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Здесь  $p$  — количество рассчитываемых собственных функций задачи (21),  $h_2$  — высота днища сосуда,  $p_0$  — параметр, который характеризует количество рассчитываемых собственных функций по координатным функциям  $\{V_k\}_{k=1}^{K_0}$ . Так, если по этому базису с достаточной степенью точности находятся первые  $m$  собственных функций задачи (21), то в формулах (26) следует положить  $p_0 = m + 1$ . Таким образом, при  $p = 10$  и  $p_0 = 5$  к системе координатных функций  $\{V_k\}_{k=1}^{K_0}$  следует добавить шесть базисных функций  $\{V_{K_0+i}\}_{i=1}^6$ .

Предполагая, что функции  $W_i^{(2)}$  найдены, перейдем к построению решений рассматриваемой задачи, представив функции  $\psi^{(1)}(z, r)$  и  $\psi^{(2)}(z, r)$  в виде

$$\psi^{(1)}(z, r) = \sum_{j=1}^{m_0} a_j W_j^{(1)}, \quad \psi^{(2)}(z, r) = \sum_{j=1}^{m_0} b_j W_j^{(2)}. \quad (27)$$

При выбранных координатных функциях алгебраическая система (18) расщепляется на две системы относительно векторов-столбцов  $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_{m_0}\}$  и  $\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_{m_0}\}$ :

$$C\vec{a} = 0, \quad C^T\vec{b} = 0. \quad (28)$$

При этом коэффициенты  $c_{i,j}$  несимметричной матрицы  $C$  имеют вид

$$c_{i,j} = \int_{\gamma} \left( W_j^{(1)} \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} + W_i^{(2)} \frac{\partial W_j^{(1)}}{\partial \nu^{(1)}} \right) r ds, \quad i, j = 1, 2, \dots, m_0.$$

С учетом выражения (20) элементы  $c_{i,j}$  можно представить следующим образом:

$$c_{i,j} = (\zeta_j \cos h\zeta_j h_1 - \varkappa \sin h\zeta_j h_1) \omega_i d_{i,j} - (\varkappa \zeta_j \cos h\zeta_j h_1 - \zeta_j^2 \sin h\zeta_j h_1) d_{i,j},$$

$$d_{i,j} = \int_0^1 \left( W_i^{(2)} J_1(\zeta_j r) \right)_{z=0} r dr.$$

Из условия существования нетривиальных решений уравнений (28) получаем характеристическое уравнение для определения параметра  $\varkappa$ :

$$\det C = 0. \tag{29}$$

Компоненты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  определяются из уравнений (28) с точностью до произвольных постоянных множителей. С учетом этого связь между коэффициентами  $a_i$  и  $b_i$  будет осуществляться по формулам

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_0} a_j (\zeta_j \cos h\zeta_j h_1 - \varkappa \sin h\zeta_j h_1) d_{i,j}}{\sum_{j=1}^{K_0} \sum_{k=1}^{K_0} X_k^{(i)} X_j^{(i)} \beta_{k,j}}, \quad i = 1, 2, \dots, m_0.$$

Таким образом, решение исходной задачи в данном случае свелось к решению однородной алгебраической системы  $C\vec{a} = 0$  порядка  $m_0$ .

Приведем некоторые результаты расчетов частот и форм собственных колебаний жидкости по предлагаемому алгоритму для случая, когда днищем сосуда является полусфера единичного радиуса. Пусть  $\vartheta$  — угол между осью  $Oz$  и радиусом-вектором контура окружности,  $h_c$  — расстояние от центра сферы до свободной поверхности жидкости,  $r_0$  — радиус свободной поверхности жидкости. Тогда, выбирая начало системы  $Oxyz$  на свободной поверхности жидкости, элементы  $\alpha_{i,j}$  и  $\beta_{i,j}$  матриц  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  алгебраической системы (25) можно представить в виде

$$\alpha_{i,j} = \int_0^{r_0} \left[ \frac{\partial V_i}{\partial z} V_j \right]_{z=0} r dr + \int_{\vartheta_0}^{\pi} \left[ r V_j \left( \frac{\partial V_i}{\partial z} \cos \vartheta + \frac{\partial V_i}{\partial r} \sin \vartheta \right) \right]_{\substack{z=\cos \vartheta - h_c \\ r=\sin \vartheta}} d\vartheta, \tag{30}$$

$$\beta_{i,j} = \int_0^{r_0} [V_i V_j]_{z=0} r dr, \quad \vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{h_c}{r_0}, \quad r_0 = \sqrt{1 - h_c^2}.$$

В табл. 1 приведена сходимость частот  $\varkappa_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , в зависимости от порядка  $m_0$  алгебраической системы (28) при  $h_1 = 0.5$  и  $K_0 = 24$ .

Таблица 1

$m_0$	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa_3$	$\varkappa_4$	$\varkappa_5$
1	1.7935458	—	—	—	—
2	1.7936587	5.3311629	—	—	—
3	1.7936712	5.3311647	8.5363099	—	—
4	1.7936740	5.3311651	8.5363099	11.706005	—
5	1.7936749	5.3311652	8.5363099	11.706005	14.863589
6	1.7936753	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589
7	1.7936755	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589
8	1.7936756	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589
9	1.7936757	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589
10	1.7936757	5.3311653	8.5363099	11.706005	14.863589

Данные табл. 1 свидетельствуют о том, что для определения первых пяти собственных частот колебаний жидкости с высокой степенью точности в разложениях для функций  $\psi^{(1)}$  и  $\psi^{(2)}$  необходимо удерживать по пять членов. Изменение высоты жидкости в цилиндрической части сосуда несущественно влияет на скорость сходимости последовательных приближений задачи.

Следует отметить, что элементы  $c_{i,j}$  при  $i \neq j$  матрицы  $C$  алгебраической системы (28) по модулю на два порядка меньше диагональных членов  $c_{i,i}$ . В связи с этим если при решении трансцендентного уравнения (18) пренебречь недиагональными членами матрицы  $C$ , то для  $i$ -й формы колебаний жидкости можно установить приближенную формулу для частотного параметра  $\varkappa_i$ :

$$\varkappa_i = \frac{\zeta_i(\omega_i + \zeta_i \tanh \zeta_i h_1)}{\zeta_i + \omega_i \tanh \zeta_i h_1}. \quad (31)$$

Эта формула совпадает с соответствующей формулой из монографии [1], которая была получена при использовании приближенных условий сопряжения на смежной линии подобластей  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ . Соответствующие значения параметров  $\varkappa_i$ , вычисленные по формуле (31), совпадают в рассматриваемом случае с данными табл. 1 вплоть до четырех-пяти значащих цифр.

В табл. 2 для  $h_1 = 0.5$ ,  $K_0 = 24$  приведены значения функций  $\psi^{(1)}(z, r)$  и  $\psi^{(2)}(z, r)$ , а также их производных в направлении оси  $Oz$ , которые вычислены на линии сопряжения  $\gamma$  при разных значениях координаты  $r$  и порядка  $m_0$  алгебраической системы (28).

Результаты расчетов показывают, что предложенный метод решения исходной задачи обеспечивает (в отличие от работы [1]) поточечную сходимость для решений и их производных в направлении оси  $Oz$  на смежной границе подобластей  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$ .

Таким образом, предложенный в настоящей работе обобщенный функционал для решения задачи сопряжения обеспечивает выполнение с высокой степенью точности условий сопряжения в каждой точке прямой  $\gamma$ . Полученные результаты могут быть использованы при исследовании нелинейных колебаний жидкости в составных резервуарах [7].

В заключение приведем решение исходной задачи с позиций предложенного вариационного метода для случая, когда сосуд имеет форму прямого кругового цилиндра единичного радиуса. Для этого сосуда однородная краевая задача (4) имеет точное решение, которое можно представить в виде

Таблица 2

$r$	$\psi_1$	$\psi_2$	$\frac{\partial \psi_1}{\partial z}$	$\frac{\partial \psi_2}{\partial z}$
$m_0 = 10$				
0.20	0.13981	0.13979	0.22952	0.22950
0.40	0.26635	0.26634	0.43425	0.43424
0.60	0.36772	0.36772	0.59060	0.59059
0.80	0.43450	0.43451	0.67903	0.67904
1.00	0.45940	0.45958	0.68411	0.68433
$m_0 = 15$				
0.20	0.13981	0.13980	0.22969	0.22968
0.40	0.26634	0.26634	0.43456	0.43456
0.60	0.36772	0.36772	0.59065	0.59065
0.80	0.43451	0.43451	0.67895	0.67895
1.00	0.45944	0.45953	0.68225	0.68234

$$\psi_i(z, r) = c_i \cos h[\zeta_i(z + h_2)] J_1(\zeta_i r), \quad \varkappa_i = \zeta_i \tan h[\zeta_i(h_1 + h_2)], \quad (32)$$

где  $c_i$  — произвольные постоянные,  $h_2$  — высота прямоугольной области  $G^{(2)}$ .

Систему базисных функций  $W_i^{(1)}(z, r)$  для области  $G^{(1)}$  выберем в форме (20), тогда как для области  $G^{(2)}$  базисные функции  $W_i^{(2)}(z, r)$  выберем в следующем виде:

$$W_i^{(2)} = \frac{\zeta_i}{\cos h[\zeta_i(h_1 + h_2)]} \cos h[\zeta_i(z + h_2)] J_1(\zeta_i r). \quad (33)$$

Каждая из этих функций удовлетворяет исходному уравнению и граничному условию

$$\left. \frac{\partial W_i^{(2)}}{\partial \nu^{(2)}} \right|_{L^{(2)}} = 0.$$

В силу ортогональности базисных функций  $W_i^{(1)}$  и  $W_i^{(2)}$  и их производных в направлении оси  $Oz$  на линии  $\gamma$ , алгебраическая система (28) в данном случае сведется к алгебраической системе относительно коэффициентов  $a_i$  с диагональной матрицей коэффициентов. Собственные функции и собственные значения спектральной задачи (4) для этой алгебраической системы примут вид

$$\begin{aligned} \psi_i^{(1)} &= a_i \{ \zeta_i \cos h[\zeta_i(z - h_1)] + \varkappa_i \sin h[\zeta_i(z - h_1)] \} J_1(\zeta_i r), \\ \psi_i^{(2)} &= a_i \frac{\zeta_i}{\cos h[\zeta_i(h_1 + h_2)]} \cos h[\zeta_i(z + h_2)] J_1(\zeta_i r), \\ \varkappa_i &= \zeta_i \tanh[\zeta_i(h_1 + h_2)], \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Сравнивая выражения (34) и (32), приходим к выводу, что в рассматриваемом случае обобщенная вариационная формулировка задачи сопряжения приводит к решению, которое совпадает с точным решением исходной задачи.

**Заключение.** С позиций метода декомпозиции предложен приближенный метод решения двумерной спектральной задачи о свободных колебаниях идеальной жидкости в емкостях сложной геометрии.

Метод базируется на формулировке обобщенного функционала, для которого условия сопряжения на смежной границе искусственно введенных подобластей относятся к числу его естественных граничных условий. Это позволяет независимо выбирать системы базисных функций в этих областях, что во многих случаях упрощает получение приближенного решения в исходной области.

На конкретном примере показана эффективность предложенного подхода решения рассматриваемой задачи путем сравнения полученных результатов с существующими приближенными и точными решениями исходной задачи. Численная реализация предложенного алгоритма указывает на тот факт, что в рамках этого подхода последовательные приближения метода Грэфтца имеют сходимость в равномерной метрике на смежной линии искусственно введенных подобластей как для самих решений, так и для первых производных по продольной координате.

1. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — Киев: Наук. думка, 1969. — 250 с.
2. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.
3. *Троценко В. А., Троценко Ю. В.* Применение метода Ритца к расчету свободных поперечных колебаний составного стержня // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, № 2. — С. 244–257.
4. *Троценко Ю. В.* Колебания упругих конструкций, содержащих подвесные резервуары с жидкостью // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, № 2. — С. 258–275.
5. *Комаренко О. Н., Троценко В. А.* Варіаційний метод розв'язування задач трансмісії з головною умовою спряження // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 2. — С. 762–775.
6. *Троценко В. А., Богун Р. И.* Колебания жидкости в осесимметричном резервуаре с мембраной на свободной поверхности // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 2. — С. 304–333.
7. *Lukovsky I., Ovchynnykov D., Timokha A.* Asymptotic nonlinear multimodal modeling of liquid sloshing in an upright circular cylindrical tank. Pt 1: Modal equations // Nonlinear Oscillations. — 2012. — **14**, № 4. — P. 512–525

Получено 05.03.13,  
после доработки — 06.06.14