УДК 517.929

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

А. А. Акбергенов, Г. П. Пелюх

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

We obtain sufficient conditions for a certain class of systems of nonlinear difference equations to have continuous solutions.

Получены достаточные условия существования непрерывных решений одного класса систем нелинейных разностных уравнений.

Системи нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + F(t, x(t)), \tag{1}$$

де $A(t)$ — неособлива дійсна матриця, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, були основним об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1–9] і наведену там бібліографію), і на сьогодні ряд важливих питань їх теорії досить детально досліджено. Особливо це стосується питань існування неперервних розв'язків таких рівнянь. Зауважимо, що рівняння вигляду (1) можуть мати нескінченно багато неперервних розв'язків і, отже, природно виникає задача про дослідження структури їх множини. При різних припущеннях цю задачу досить добре досліджено [7–9]. У даній роботі продовжується її дослідження у випадку, коли елементи матриці $A(t)$ є неперервними N-періодичними (N — ціле додатне число) функціями, вектор-функція $F(t, x)$ є неперервною N-періодичною по t і належить класу $\mathcal{C}^k$ (k — деяке ціле додатне число) по x.

Згідно з [6] існує неособлива неперервна при $t \in \mathbb{R}$ заміна змінних

$$x(t) = C(t)y(t),$$

яка зводить систему рівнянь (1) до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda(t)y(t) + \bar{F}(t, y(t)), \tag{2}$$

де $\Lambda(t) = C^{-1}(t+1)A(t)C(t)$ — неперервна 1-періодична матриця така, що $\det \Lambda(t) \neq 0$, і $\bar{F}(t, y(t)) = C^{-1}(t+1)F(t, C(t)y(t))$.

Нехай $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — корені рівняння

$$\det(\Lambda(t) - \lambda(t)E) = 0,$$

де E — одинична $(n \times n)$-матриця. Неважко показати, що $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, є неперервними 1-періодичними функціями. Далі будемо припускати, що $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, і $\Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$ (у протилежному випадку існує заміна змінних

$$y(t) = \widetilde{C}(t)\widetilde{y}(t),$$

де $\widetilde{C}(t)$ — неособлива неперервна 1-періодична матриця така, що $\widetilde{C}^{-1}(t)\,\Lambda(t)\,\widetilde{C}(t) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)))$.

Розглянемо тепер систему рівнянь (2) у випадку, коли виконуються такі умови:

1) $0 < \lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \ldots < \lambda_n(t) < 1$, $t \in [0, 1)$;

2) для довільного набору $(i_1, \ldots, i_n)$ цілих невід'ємних чисел $\Big(2 \le \sum_{j=1}^{n} i_j \le k = \dfrac{\ln \lambda_*}{\ln \lambda^*}$, де $\lambda_* = \min\limits_t \lambda_1(t)$, $\lambda^* = \max\limits_t \lambda_n(t)\Big)$ виконуються нерівності

$$\lambda_i(t) \ne \lambda_1^{i_1}(t)\lambda_2^{i_2}(t)\ldots\lambda_n^{i_n}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{3}$$

3) функції $\bar{F}_i(t, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, є неперервними N-періодичними по t та належать класу $\mathcal{C}^k$ по $y_1, \ldots, y_n$ при $|y_i| \le b$, $i = 1, \ldots, n$;

4) функції $\bar{F}_i(t, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, та всі їхні частинні похідні першого порядку по $y_1, \ldots, y_n$ дорівнюють нулю при $y_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1 – 4. Тоді існує вектор-функція*

$$\gamma(t, y) = y + \sum_{|i|=2}^{k} \gamma_i(t) y^i, \tag{4}$$

де $i = (i_1, \ldots, i_n)$, $|i| = i_1 + \ldots + i_n$, $y^i = y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n}$, $\gamma_i(t)$ — *деякі неперервні* N*-періодичні функції, така, що*

$$\gamma(t + 1, \Lambda(t)y(t) + \bar{F}(t, y(t))) - \Lambda(t)\gamma(t, y(t)) = \bar{\bar{F}}(t, y(t)). \tag{5}$$

Тут компоненти $\bar{\bar{F}}_j(t, y)$, $j = 1, \ldots, n$, *вектор-функції* $\bar{\bar{F}}(t, y)$ *є неперервними* N*-періодичними по* t *функціями і належать класу* $\mathcal{C}^k$ *по* $y_1, \ldots, y_n$ *при* $t \in \mathbb{R}$, $|y| \le b_* < b$ *та дорівнюють нулю при* $y_i = 0, i = 1, \ldots, n$, *разом з усіма своїми частинними похідними по* $y_1, \ldots, y_n$ *порядку* $\le k$.

Доведення. Згідно з умовами 3, 4 в деякій області $D : |t| < \infty$, $|y| \le b_* < b$ вектор-функцію $\bar{F}(t, y(t))$ можна записати у вигляді

$$\bar{F}(t, y) = \sum_{|i|=2}^{k} \bar{F}_i(t) y^i + \varphi(t, y), \tag{6}$$

де $\bar{F}_i(t)$ — неперервні N-періодичні вектор-функції, компоненти $\varphi^j(t, y)$, $j = 1, \ldots, n$, вектор-функції $\varphi(t, y)$ є неперервними та N-періодичними по t функціями, що належать класу $\mathcal{C}^k$ по y при $|y| \le b_*$ та дорівнюють нулю при $y = 0$ разом з усіма своїми частинними похідними по y порядку $\leq k$. Тоді, беручи до уваги (4), (6), отримуємо

$$\Lambda(t)y + \sum_{|i|=2}^{k} \bar{F}_i(t)y^i + \varphi(t,y) + \sum_{|i|=2}^{k} \gamma_i(t+1)\left(\Lambda(t)y + \sum_{|j|=2}^{k} \bar{F}_j(t)y^j + \varphi(t,y)\right)^i -$$
$$- \Lambda(t)y - \Lambda(t)\sum_{|i|=2}^{k}\gamma_i(t)y^i = \sum_{|i|=2}^{k}\lambda^i(t)\gamma_i(t+1)y^i -$$
$$- \sum_{|i|=2}^{k}\Lambda(t)\gamma_i(t)y^i + \sum_{|i|=2}^{k}P_i(t)y^i + R(t,y), \tag{7}$$

де $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$, $\lambda^i(t) = \lambda_1^{i_1}(t)\ldots\lambda_n^{i_n}(t)$, $P_i(t) = (P_i^1(t), \ldots, P_i^n(t))$, $R(t,y) = (R^1(t,y), \ldots, R^n(t,y))$, $P_i^j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, $|i| = 2, 3 \ldots$, — деякі многочлени відносно $\gamma_l(t+1)$ із неперервними N-періодичними коефіцієнтами, причому $|l| < |i|$ та $P_i(t) = \bar{F}_i(t)$ при $|i| = 2$, функції $R^j(t,y)$, $j = 1, \ldots, n$, є неперервними N-періодичними по t, належать класу $\mathcal{C}^k$ по y при $|y| \leq b_*$ та дорівнюють нулю при $y = 0$ разом з усіма своїми частинними похідними по $y_1, \ldots, y_n$ порядку $\leq k$.

Прирівнюючи в (7) коефіцієнти при y^i, $i = 2, 3, \ldots, k$, нулю, отримуємо послідовність систем лінійних різницевих рівнянь відносно вектор-функцій $\gamma_i(t)$:

$$\lambda^i(t)\gamma_i(t+1) = \Lambda(t)\gamma_i(t) - P_i(t), \quad |i| = 2, 3, \ldots, k. \tag{8}$$

Оскільки $P_i^j(t), j = 1, \ldots, n, |i| = 2, \ldots, k,$ — многочлени відносно $\gamma_l(t+1)$ із неперервними N-періодичними по t коефіцієнтами, причому $|l| < |i|$, то, беручи до уваги умови 1, 2, можна послідовно показати, що система рівнянь (8) має неперервні N-періодичні розв'язки $\gamma_i(t) = (\gamma_i^1(t), \ldots, \gamma_i^n(t))$, $|i| = 2, \ldots, k$, вигляду

$$\gamma_i^j(t) = \sum_{k=0}^{N-1} [\alpha_{ij}(t)]^k [1 - \alpha_{ij}^N(t)]^{-1} \lambda_j^{-1}(t) P_i^j(t+k), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

де $\alpha_{ij}(t) = \lambda_j^{-1}(t)\lambda_1^{i_1}(t)\lambda_2^{i_2}(t)\ldots\lambda_n^{i_n}(t)$, $|i| = 2, 3, \ldots, k, j = 1, \ldots, n$.

Таким чином, безпосередньо з (7) випливає, що якщо в якості $\gamma_i(t)$, $|i| = 2, \ldots, k$, взяти неперервні N-періодичні розв'язки системи рівнянь (8), які мають вигляд (9), та покласти $\bar{\bar{F}}(t,y) = R(t,y)$, то буде виконуватися рівність (5).

Теорему 1 доведено.

Виконуючи в (2) заміну змінних

$$\tilde{y}(t) = \gamma(t, y(t)), \tag{10}$$

отримуємо систему рівнянь

$$\tilde{y}(t+1) = \Lambda(t)\tilde{y}(t) + \hat{F}(t, \tilde{y}(t)), \tag{11}$$

де $\hat{F}(t,\tilde{y}) = (\hat{F}_1(t,\tilde{y}),\ldots,\hat{F}_n(t,\tilde{y}))$, функції $\hat{F}_j(t,\tilde{y}), j = 1,\ldots,n$, є неперервними N-періодичними по t, належать класу $\mathcal{C}^k$ по $\tilde{y}$ при $|\tilde{y}| \le b_*$ та дорівнюють нулю при $\tilde{y} = 0$ разом з усіма своїми частинними похідними по $\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n$ порядку $\le k$.

Запишемо систему рівнянь (11) у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(t+1) &= \lambda_1(t)\tilde{y}_1(t) + \hat{F}_1(t,\tilde{y}_1(t),\ldots,\tilde{y}_n(t)),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \tilde{y}_n(t+1) &= \lambda_n(t)\tilde{y}_n(t) + \hat{F}_n(t,\tilde{y}_1(t),\ldots,\tilde{y}_n(t)) \end{aligned} \tag{12}$$

і доведемо наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді в деякій області $D_* \subset D$ існує заміна змінних*

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i(t) &= \bar{y}_i(t), \quad i = 1,\ldots,n-1,\\ \tilde{y}_n(t) &= \bar{y}_n(t) + \varkappa(t,\bar{y}_1(t),\ldots,\bar{y}_{n-1}(t)), \end{aligned} \tag{13}$$

де функція $\varkappa(t,\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{n-1})$ є неперервною N-періодичною по t, $\varkappa(t,0,\ldots,0) \equiv 0$ і належить класу $\mathcal{C}^k$ по $\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{n-1}$, яка зводить систему рівнянь (12) до вигляду

$$\begin{aligned} \bar{y}_1(t+1) &= \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) + \tilde{F}_1(t,\bar{y}_1(t),\ldots,\bar{y}_n(t)),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \bar{y}_n(t+1) &= \lambda_n(t)\bar{y}_n(t) + \tilde{F}_n(t,\bar{y}_1(t),\ldots,\bar{y}_n(t)). \end{aligned} \tag{14}$$

Тут функції $\tilde{F}_i(t,\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n), i = 1,\ldots,n$, є неперервними N-періодичними по t, належать класу $\mathcal{C}^k$ по $\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n$ та виконується співвідношення

$$\tilde{F}_n(t,\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{n-1},0) \equiv 0.$$

Доведення. Виконуючи в (12) заміну змінних (13), отримуємо систему

$$\begin{aligned} \bar{y}_1(t+1) &= \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) + \hat{F}_1(t,\bar{y}_1(t),\ldots,\bar{y}_{n-1}(t),\bar{y}_n(t) + \varkappa(t,\bar{y}_1(t),\ldots,\bar{y}_{n-1}(t))),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \bar{y}_{n-1}(t+1) &= \lambda_{n-1}(t)\bar{y}_{n-1}(t) + \hat{F}_{n-1}(t,\bar{y}_1(t),\ldots,\bar{y}_{n-1}(t),\bar{y}_n(t) + \varkappa(t,\bar{y}_1(t),\ldots,\bar{y}_{n-1}(t))), \end{aligned}$$

$$\bar{y}_n(t+1) + \varkappa\Big(t+1, \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) + \hat{F}_1(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t), \bar{y}_n(t) +$$
$$+ \varkappa(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t))), \ldots, \lambda_{n-1}(t)\bar{y}_{n-1}(t) +$$
$$+ \hat{F}_{n-1}(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t), \bar{y}_n(t) + \varkappa(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t)))\Big) =$$
$$= \lambda_n(t)\bar{y}_n(t) + \lambda_n(t)\varkappa(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t)) + \hat{F}_n(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t), \bar{y}_n(t) +$$
$$+ \varkappa(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t))),$$

яку можна записати у вигляді

$$\bar{y}_1(t+1) = \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) + \widetilde{F}_1(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\bar{y}_n(t+1) = \lambda_n(t)\bar{y}_n(t) + \widetilde{F}_n(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)),$$

де

$$\widetilde{F}_i(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)) = \hat{F}_i(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t), \bar{y}_n(t) + \varkappa(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t))), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\widetilde{F}_n(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_n(t)) = \lambda_n(t)\varkappa(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t)) + \hat{F}_n(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t), \bar{y}_n(t) +$$
$$+ \varkappa(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t))) - \varkappa\Big(t+1, \lambda_1(t)\bar{y}_1(t) +$$
$$+ \hat{F}_1(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t), \bar{y}_n(t) + \varkappa(t, \bar{y}_1(t), \ldots$$
$$\ldots, \bar{y}_{n-1}(t))), \ldots, \lambda_{n-1}(t)\bar{y}_{n-1}(t) + \hat{F}_{n-1}(t, \bar{y}_1(t), \ldots$$
$$\ldots, \bar{y}_{n-1}(t), \bar{y}_n(t) + \varkappa(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t)))\Big).$$

Звідси безпосередньо випливає, що функції $\widetilde{F}_i(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$, $i = 1, \ldots, n$, є неперервними N-періодичними по t, належать класу $\mathcal{C}^k$ по $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ і дорівнюють нулю разом з усіма частинними похідними по $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ порядку $\leq k$. Крім цього, $\widetilde{F}_n(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}, 0) \equiv 0$, якщо функція $\varkappa(t, \bar{y}_1(t), \ldots, \bar{y}_{n-1}(t))$ є розв'язком рівняння

$$\varkappa\Big(t+1, \lambda_1(t)\bar{y}_1 + \hat{F}_1(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}, \varkappa(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1})), \ldots$$
$$\ldots, \lambda_{n-1}(t)\bar{y}_{n-1} + \hat{F}_{n-1}(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}, \varkappa(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}))\Big) =$$
$$= \lambda_n(t)\varkappa(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}) + \hat{F}_n(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1}, \varkappa(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-1})). \quad (15)$$

Доведення існування розв'язку рівняння (15) можна провести за допомогою методу послідовних наближень, які визначаються співвідношеннями

$$\varkappa_0(t,\bar y_1,\ldots,\bar y_{n-1}) = 0,$$

$$\varkappa_m(t,\bar y_1,\ldots,\bar y_{n-1}) = \lambda_n^{-1}\varkappa_{m-1}\Big(t+1,\lambda_1(t)\bar y_1+\hat F_1(t,\bar y_1,\ldots$$
$$\ldots,\bar y_{n-1},\varkappa_{m-1}(t,\bar y_1,\ldots,\bar y_{n-1}),\ldots,\lambda_{n-1}(t)\bar y_{n-1}+$$
$$+\hat F_{n-1}(t,\bar y_1,\ldots,\bar y_{n-1},\varkappa_{m-1}(t,\bar y_1,\ldots,\bar y_{n-1})))\Big)-$$
$$-\lambda_n^{-1}(t)\hat F_n(t,\bar y_1,\ldots,\bar y_{n-1},\varkappa(t,\bar y_1,\ldots,\bar y_{n-1})),\quad m=1,2,\ldots.$$

Теорему 2 доведено.

Поклавши в (14) $\bar y_n(t) = 0$, ми зведемо дослідження системи рівнянь (14) до дослідження системи

$$\begin{aligned} \bar y_1(t+1) &= \lambda_1(t)\bar y_1(t)+\widetilde F_1(t,\bar y_1(t),\ldots,\bar y_{n-1}(t),0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \bar y_{n-1}(t+1) &= \lambda_{n-1}(t)\bar y_{n-1}(t)+\widetilde F_{n-1}(t,\bar y_1(t),\ldots,\bar y_{n-1}(t),0). \end{aligned} \tag{16}$$

При дослідженні системи рівнянь (16) можливі два випадки: коли виконується або не виконується умова

$$\lambda_1^{-1}(t)\lambda_{n-1}^k(t) < 1.$$

Якщо ця умова не виконується, то до системи (16) знову можна застосувати теорему 2 і звести її дослідження до дослідження системи $(n-2)$-го порядку. Продовжуючи цей процес, ми отримуємо систему p-го порядку

$$\begin{aligned} \widehat y_1(t+1) &= \lambda_1(t)\widehat y_1(t)+\bar{\widetilde F}_1(t,\bar y_1(t),\ldots,\bar y_p(t)),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \widehat y_p(t+1) &= \lambda_p(t)\widehat y_p(t)+\bar{\widetilde F}_p(t,\bar y_1(t),\ldots,\bar y_p(t)), \end{aligned} \tag{17}$$

де $\bar{\widetilde F}_i : \mathbb R\times\mathbb R^p\to\mathbb R^p$, $i=1,\ldots,p$, для якої буде виконуватись умова

$$\lambda_1^{-1}(t)\lambda_p^k(t) < 1.$$

Тоді для системи рівнянь (17) існує взаємно однозначна заміна змінних [8, 9], яка зведе її до лінійного вигляду

$$\bar{\bar y}(t+1) = \Lambda_p(t)\bar{\bar y}(t), \tag{18}$$

де $\bar{\bar y} = (\bar{\bar y}_1,\ldots,\bar{\bar y}_p)$, $\Lambda_p(t) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1(t),\ldots,\lambda_p(t))$.

Звідси безпосередньо випливає, що, беручи до уваги зображення загального неперервного розв'язку системи рівнянь (18) і послідовність перетворень, за допомогою яких дослідження вихідної системи рівнянь (2) було зведено до дослідження системи рівнянь (17), можна побудувати сім'ю (залежить від p неперервних 1-періодичних функцій) неперервних розв'язків системи рівнянь (2).

1. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.
2. *Sternberg S.* On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space // Amer. J. Math. — 1958. — **80**. – P. 623 – 631.
3. *Harris Jr. W. A., Sibuya Y.* General solution of nonlinear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — **115**. — P. 62 – 75.
4. *Takano By. K.* General solution of a nonlinear difference equations of Briot – Bouquet type // Funkc. ekvacioj. — 1971. — **13**, № 3. — P. 179 – 198.
5. *Пелюх Г. П.* О структуре непрерывных решений одного класса нелинейных разностных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1994. — **30**, № 6. — С. 1083 – 1085.
6. *Пелюх Г. П.* К теории линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН. — 1994. — **336**, № 4. — С. 451 – 452.
7. *Пелюх Г. П.* Представление решений разностных уравнений с непрерывным аргументом // Дифференц. уравнения. — 1996. — **32**, № 2. — С. 304 – 312.
8. *Пелюх Г. П.* Общее решение систем нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 7. — С. 936 – 953.
9. *Акбергенов А. А., Пелюх Г. П.* Побудова неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних різницевих рівнянь // Доп. НАН України. — 2012. — № 10. — С. 7 – 12.

Одержано 25.08.14