УДК 517.926.7

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ МАТРИЦАМИ

М. А. Елишевич

Киев. нац. ун-т стр-ва и архитектуры
Украина, 03680, Киев, 37, Воздухофлотский просп., 31

We find sufficient conditions for reduction of a system of linear nonhomogeneous first order differential equations eith rectangular periodic matrices to a canonical from, and construct its general periodic solution.

Встановлено достатні умови зведення системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними періодичними матрицями до канонічної форми, побудовано її загальний періодичний розв'язок.

Постановка задачи. В данной статье для системы

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in R, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — прямоугольные матрицы-функции размерности $m \times n$, $f(t)$ — вектор-функция размерности m, причем $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ бесконечно дифференцируемые периодические с периодом T (т. е. $A(t), B(t), f(t) \in C^{\infty}(R,T)$) действительные или комплексные, рассматривается задача определения условий приводимости к канонической форме[1], условий существования ее периодических с периодом T решений и построения этих решений.

Случай, когда $A(t)$ и $B(t)$ — квадратные матрицы, рассматривался в работах [2–5]. В работе [2] матрица $B(t)$ имеет постоянную жорданову структуру относительно нулевого собственного значения при $t \in R$, в [3, 4] — постоянный ранг. В [5, с. 74–78] система сведена к центральной канонической форме, построено ее периодическое решение с использованием жордановых наборов векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора

$$L(t) = A(t) - B(t)\,\frac{d}{dt} \tag{2}$$

и сопряженной матрицы $B^*(t)$ относительно оператора

$$L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt}B^*(t), \tag{3}$$

формально сопряженного к $L(t)$. Они используются и в данной работе.

[1] Термин взят по аналогии с канонической формой пучка матриц $(A - \lambda B)$ [1, с. 326–330].

Основные определения.

Определение 1. *Элемент* $\varphi^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ *имеет в точке* $t \in R$ *конечную жорданову цепочку векторов матрицы* $B(t)$ *относительно оператора* $L(t)$ *длины* p, $p \geq 1$, *если существуют векторы* $\varphi^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,p}$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\varphi^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\varphi^{(i)}(t) = L(t)\varphi^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,p},$$

$$L(t)\varphi^{(p)}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Определение 2. *Элемент* $\tilde{\varphi}^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ *имеет в точке* $t \in R$ *циклическую жорданову цепочку векторов матрицы* $B(t)$ *относительно оператора* $L(t)$ *длины* $\tilde{p}$, $\tilde{p} \geq 1$, *если существуют векторы* $\tilde{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,\tilde{p}}$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\tilde{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,\tilde{p}},$$

$$L(t)\tilde{\varphi}^{(\tilde{p})}(t) = 0.$$

Определение 3. *Элемент* $\hat{\varphi}^{(1)}(t)$ *имеет в точке* $t \in R$ *вспомогательную цепочку векторов матрицы* $B(t)$ *относительно оператора* $L(t)$ *длины* $\hat{p}$, $\hat{p} \geq 1$, *если существуют векторы* $\hat{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,\hat{p}}$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$B(t)\hat{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\hat{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2,\hat{p}},$$

$$B(t)\hat{\varphi}^{(1)}(t) \notin \operatorname{Im} L(t),$$

$$L(t)\hat{\varphi}^{(\hat{p})}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Аналогично определим цепочки векторов на R. В дальнейшем будем предполагать, что доказываемые утверждения выполняются на R, если не оговорено иное. Рассматривая периодические функции, будем считать, что их период равен T.

В [5, с. 74–78] рассмотрен случай, когда $A(t)$ и $B(t)$ — квадратные матрицы и существуют только конечные цепочки. В данной работе рассматривается случай, когда $A(t)$ и $B(t)$ — прямоугольные матрицы и могут существовать конечные, циклические и вспомогательные цепочки, но их количество и длины постоянны при всех $t \in R$.

Полученный результат. Пусть $\rho = \operatorname{rank} B(t)$, $k = \dim\ker B(t) = n-\rho$, $l = \dim\ker B^*(t) = m-\rho$, $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,l}$, $z_i(t)$, $i = \overline{1,l}$, $\gamma_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, — базисы в $\ker B(t)$, $\ker B^*(t)$, $\operatorname{coker} B(t)$, $\operatorname{coker} B^*(t)$ соответственно такие, что

$$(\varphi_i(t), \gamma_j(t)) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1,k}, \tag{4}$$

$$(z_i(t), \psi_j(t)) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1,l}. \tag{5}$$

Будем полагать, что $\varphi_i(t), \psi_i(t) \in C^\infty(R,T)$; это возможно согласно [6]. Тогда из (4), (5) следует, что $z_i(t), \gamma_i(t) \in C^\infty(R,T)$.

Лемма 1. *Полуобратную матрицу $B^-(t)$ можно построить так, чтобы $B^-(t) \in \in C^\infty(R,T)$ и выполнялись равенства*

$$B^-(t) z_i(t) = 0, \quad i = \overline{1,l}, \tag{6}$$

$$\left[B^-(t)\right]^* \gamma_i(t) = 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{7}$$

$$[B^*(t)]^- = \left[B^-(t)\right]^*. \tag{8}$$

Доказательство. Дополним векторы $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, и $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,l}$, векторами $q_i(t) \in \in C^\infty(R,T)$, $i = \overline{1,\rho}$, и $p_i(t) \in C^\infty(R,T)$, $i = \overline{1,\rho}$, соответственно до полных базисов. Это возможно согласно [7]. Выберем их так, чтобы выполнялись равенства

$$(B(t)q_i(t), p_j(t)) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1,\rho}. \tag{9}$$

Обозначим

$$\begin{gathered}\Phi(t) = [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)], \quad \Psi(t) = [\psi_1(t), \ldots, \psi_l(t)], \quad Z(t) = [z_1(t), \ldots, z_l(t)], \\ \Gamma(t) = [\gamma_1(t), \ldots, \gamma_k(t)], \quad P_0(t) = [p_1(t), \ldots, p_\rho(t)], \quad Q_0(t) = [q_1(t), \ldots, q_\rho(t)],\end{gathered} \tag{10}$$

$\Phi(t)$, $\Psi(t)$, $Z(t)$, $\Gamma(t)$, $P_0(t)$, $Q_0(t) \in C^\infty(R,T)$ — прямоугольные матрицы,

$$P(t) = [P_0(t), \Psi(t)]^*, \quad Q(t) = [Q_0(t), \Phi(t)], \tag{11}$$

$P(t)$, $Q(t) \in C^\infty(R,T)$ — неособенные квадратные матрицы порядков m и n соответственно. Отсюда согласно (4), (5), (9) – (11) следует, что

$$\begin{gathered}P(t)Z(t) = \begin{bmatrix} P_0^*(t)Z(t) \\ E_l \end{bmatrix}, \quad \Gamma^*(t)Q(t) = [\Gamma^*(t)Q_0(t), E_k], \\ P(t)B(t)Q(t) = \begin{bmatrix} E_\rho & 0_{\rho k} \\ 0_{l\rho} & 0_{lk} \end{bmatrix},\end{gathered} \tag{12}$$

где 0_{ij} — нулевой прямоугольный блок размерности $i \times j$. Тогда согласно [8, с. 24 – 25, 41]

$$B^-(t) = Q(t) \begin{bmatrix} E_\rho & X_{12}(t) \\ X_{21}(t) & X_{22}(t) \end{bmatrix} P(t). \tag{13}$$

Здесь $X_{12}(t)$, $X_{21}(t)$, $X_{22}(t)$ — произвольные прямоугольные блоки подходящей размерности. Положив

$$X_{12}(t) = -P_0^*(t)Z(t), \quad X_{21}(t) = -\Gamma^*(t)Q_0(t), \quad X_{22}(t) = \Gamma^*(t)Q_0(t)P_0^*(t)Z(t),$$

$X_{12}(t), X_{21}(t), X_{22}(t) \in C^{\infty}(R,T)$, с учетом (10)–(13) получим (6), (7). При этом

$$B^{-}(t) = [E_n - \Phi(t)\Gamma^*(t)]Q_0(t)P_0^*(t)[E_m - Z(t)\Psi^*(t)],$$

откуда следует (8).

Лемма 1 доказана.

Элементы указанных в определениях 1–3 цепочек векторов могут быть построены следующим образом:

$$\varphi^{(i)}(t) = \left[B^{-}(t)L(t)\right]^{i-1}\varphi^{(1)}(t), \quad i = \overline{2,p}, \tag{14}$$

$$\tilde{\varphi}^{(i)}(t) = \left[B^{-}(t)L(t)\right]^{i-1}\tilde{\varphi}^{(1)}(t), \quad i = \overline{2,\tilde{p}}, \tag{15}$$

$$\hat{\varphi}^{(i)}(t) = \left[B^{-}(t)L(t)\right]^{i-1}\hat{\varphi}^{(1)}(t), \quad i = \overline{2,\hat{p}}. \tag{16}$$

Построим жордановы цепочки векторов матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ и матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ при $t \in R$.

Определим циклические цепочки матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ единичной длины. Пусть мы построили $\breve{r}$, $\breve{r} \geq 0$, линейно независимых векторов $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$.

Аналогично определим циклические цепочки матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ единичной длины. Пусть мы построили $\breve{r}$, $\breve{r} \geq 0$, линейно независимых векторов $\breve{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$.

Определим циклические цепочки матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длины больше 1 в порядке возрастания их длин. Выберем вектор $\tilde{\varphi}_1^{(1)}(t) \in \ker B(t)$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, имеющий цепочку наименьшей из возможных длин $(\tilde{s}_1 + 1)$. Далее выберем вектор $\tilde{\varphi}_2^{(1)}(t) \in \ker B(t)$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_1^{(1)}(t)$, имеющий цепочку наименьшей из возможных длин $(\tilde{s}_2 + 1)$, и т. д. Пусть мы построили $\tilde{r}$, $\tilde{r} \geq 0$, цепочек длин $(\tilde{s}_i + 1)$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $0 < \tilde{s}_1 \leq \ldots \leq \tilde{s}_{\tilde{r}}$, состоящих из векторов $\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$.

Аналогично определим циклические цепочки матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длины больше 1 в порядке возрастания их длин. Пусть мы построили $\hat{r}$, $\hat{r} \geq 0$, цепочек длин $(\hat{s}_i + 1)$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, $0 < \hat{s}_1 \leq \ldots \leq \hat{s}_{\hat{r}}$, состоящих из векторов $\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\hat{s}_i + 1}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$.

Определим конечные цепочки матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ в порядке убывания их длин. Выберем вектор $\varphi_1^{(1)}(t) \in \ker B(t)$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, имеющий цепочку наибольшей из возможных длин s_1. Далее выберем вектор $\varphi_2^{(1)}(t) \in \ker B(t)$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $\varphi_1^{(1)}(t)$, имеющий цепочку наибольшей из возможных длин s_2, и т. д. Пусть мы построили r, $r \geq 0$, цепочек длин s_i, $i = \overline{1,r}$, $s_1 \geq \ldots \geq s_r > 0$, состоящих из векторов $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,s_i}$, $i = \overline{1,r}$.

Согласно [9] существуют также:

r конечных цепочек матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длин s_i, $i = \overline{1,r}$, состоящих из векторов $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,s_i}$, $i = \overline{1,r}$;

$\hat{r}$ вспомогательных цепочек матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$ длин $\hat{s}_i$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, состоящих из векторов $\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\hat{s}_i}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$;

$\tilde{r}$ вспомогательных цепочек матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$ длин $\tilde{s}_i$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, состоящих из векторов $\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\tilde{s}_i}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$;

$\check{r}$ векторов $\check{\varphi}_i(t) \notin \operatorname{Im} B(t) \bigcup \operatorname{Im} L(t)$, $i = \overline{1,\check{r}}$;

$\check{r}$ векторов $\check{\psi}_i(t) \notin \operatorname{Im} B^*(t) \bigcup \operatorname{Im} L^*(t)$, $i = \overline{1,\check{r}}$.

Положим в (4), (5) $k = r + \tilde{r} + \check{r}$, $l = r + \hat{r} + \check{r}$,

$$\varphi_i(t) = \varphi_i^{(1)}(t),\ \ i = \overline{1,r},\ \ \varphi_{r+i}(t) = \tilde{\varphi}_i^{(1)}(t),\ \ i = \overline{1,\tilde{r}},\ \ \varphi_{r+\tilde{r}+i}(t) = \check{\varphi}_i(t),\ \ i = \overline{1,\check{r}},$$

$$\psi_i(t) = \psi_i^{(1)}(t),\ \ i = \overline{1,r},\ \ \psi_{r+i}(t) = \tilde{\psi}_i^{(1)}(t),\ \ i = \overline{1,\hat{r}},\ \ \psi_{r+\hat{r}+i}(t) = \check{\psi}_i(t),\ \ i = \overline{1,\check{r}},$$

$$z_i(t) = L(t)\varphi_i^{(s_i)}(t),\ \ i = \overline{1,r},\quad z_{r+i}(t) = L(t)\hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)}(t),\ \ i = \overline{1,\hat{r}},\ \ z_{r+\hat{r}+i}(t) = \check{\varphi}_i(t),\ \ i = \overline{1,\check{r}},$$

$$\gamma_i(t) = L^*(t)\psi_i^{(s_i)}(t),\ \ i = \overline{1,r},\ \ \gamma_{r+i}(t) = L^*(t)\hat{\psi}_i^{(\tilde{s}_i)}(t),\ \ i = \overline{1,\tilde{r}},\ \ \gamma_{r+\tilde{r}+i}(t) = \check{\psi}_i(t),\ \ i = \overline{1,\check{r}},$$

а присоединенные векторы цепочек определим по формулам (14) – (16).

Замечание 1. Согласно [9], лемме 1 и (14) – (16) элементы каждого из следующих множеств принадлежат $C^\infty(R,T)$ и линейно независимы:

1) $\check{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1,\check{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\tilde{s}_i+1}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,s_i}$, $i = \overline{1,r}$, $\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\hat{s}_i}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$;

2) $\check{\varphi}_i(t)$, $i = \overline{1,\check{r}}$, $L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\tilde{s}_i}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $L(t)\varphi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,s_i}$, $i = \overline{1,r}$, $B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, $L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\hat{s}_i}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$;

3) $\check{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1,\check{r}}$, $\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\hat{s}_i+1}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, $\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,s_i}$, $i = \overline{1,r}$, $\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\tilde{s}_i}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$;

4) $\check{\psi}_i(t)$, $i = \overline{1,\check{r}}$, $L^*(t)\tilde{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\hat{s}_i}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, $L^*(t)\psi_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,s_i}$, $i = \overline{1,r}$, $B^*(t)\hat{\psi}_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $L^*(t)\hat{\psi}_i^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,\tilde{s}_i}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$;

пары множеств 1 и 4, 2 и 3 соответственно представляют собой биортогональные системы

$$\big(\check{\varphi}_i(t), \check{\psi}_k(t)\big) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\check{r}},$$

$$\Big(\check{\varphi}_i(t), \check{\psi}_k(t)\Big) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\check{r}},$$

$$\Big(\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), L^*(t)\hat{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \Big(L(t)\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), \hat{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \delta_{ik}\delta_{l+j,\tilde{s}_i+1}, \quad j,l = \overline{1,\tilde{s}_i}, \quad i,k = \overline{1,\tilde{r}},$$

$$\Big(\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1)}(t), B^*(t)\hat{\psi}_k^{(1)}(t)\Big) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\tilde{r}},$$

$$\Big(\hat{\varphi}_i^{(j)}(t), L^*(t)\tilde{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \Big(L(t)\hat{\varphi}_i^{(j)}(t), \tilde{\psi}_k^{(l)}(t)\Big) = \delta_{ik}\delta_{l+j,\hat{s}_i+1}, \quad j,l = \overline{1,\hat{s}_i}, \quad i,k = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\Big(B(t)\hat{\varphi}_i^{(1)}(t), \tilde{\psi}_k^{(\hat{s}_i+1)}(t)\Big) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\Big(\varphi_i^{(j)}(t), L^*(t)\psi_k^{(l)}(t)\Big) = \Big(L(t)\varphi_i^{(j)}(t), \psi_k^{(l)}(t)\Big) = \delta_{ik}\delta_{l+j,s_i+1}, \quad j,l = \overline{1,s_i}, \quad i,k = \overline{1,r},$$

все остальные скалярные произведения векторов из соответствующих пар множеств равны 0.

Обозначим

$$s=\sum_{i=1}^{r}s_i,\quad \tilde s=\sum_{i=1}^{\tilde r}\tilde s_i,\quad \hat s=\sum_{i=1}^{\hat r}\hat s_i,\quad \alpha=n-\check r-\tilde r-\tilde s-s-\hat s=m-\check r-\hat r-\hat s-s-\tilde s.$$

Дополним элементы множеств 1 и 3 векторами $q_i(t)\in C^\infty(R,T)$, $i=\overline{1,\alpha}$, и $p_i(t)\in \in C^\infty(R,T)$, $i=\overline{1,\alpha}$, соответственно до полных базисов; это возможно согласно [7]. Выберем их так, чтобы они были ортогональны всем элементам множеств 4 и 2 соответственно и выполнялись равенства

$$(B(t)q_i(t),p_j(t))=\delta_{ij},\quad i,j=\overline{1,\alpha}.$$

Тогда согласно [10] элементы каждого из следующих множеств линейно независимы:

5) $q_i(t)$, $i=\overline{1,\alpha}$, $\check\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,\check r}$, $\tilde\varphi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,\tilde s_i+1}$, $i=\overline{1,\tilde r}$, $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, $\hat\varphi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,\hat s_i}$, $i=\overline{1,\hat r}$;

6) $B(t)q_i(t)$, $i=\overline{1,\alpha}$, $\check\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,\check r}$, $L(t)\tilde\varphi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,\tilde s_i}$, $i=\overline{1,\tilde r}$, $L(t)\varphi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, $B(t)\hat\varphi_i^{(1)}(t)$, $i=\overline{1,\hat r}$, $L(t)\hat\varphi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,\hat s_i}$, $i=\overline{1,\hat r}$;

7) $p_i(t)$, $i=\overline{1,\alpha}$, $\check\psi_i(t)$, $i=\overline{1,\check r}$, $\tilde\psi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,\hat s_i+1}$, $i=\overline{1,\hat r}$, $\psi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, $\hat\psi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,\tilde s_i}$, $i=\overline{1,\tilde r}$;

8) $B^*(t)p_i(t)$, $i=\overline{1,\alpha}$, $\check\psi_i(t)$, $i=\overline{1,\check r}$, $L^*(t)\tilde\psi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,\hat s_i}$, $i=\overline{1,\hat r}$, $L^*(t)\psi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, $B^*(t)\hat\psi_i^{(1)}(t)$, $i=\overline{1,\tilde r}$, $L^*(t)\hat\psi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,\tilde s_i}$, $i=\overline{1,\tilde r}$;

пары множеств 5 и 8, 6 и 7 соответственно представляют собой биортогональные системы.

Перейдем непосредственно к системе (1).

Теорема 1. *Пусть $A(t),B(t),f(t)$ принадлежат $C^\infty(R,T)$, при всех $t\in R$ существуют жордановы цепочки векторов:*

матрицы $B(t)$ относительно оператора $L(t)$:

r, $r\ge 0$, конечных длин s_i, $s_i>0$, $i=\overline{1,r}$;

$\tilde r$, $\tilde r\ge 0$, циклических длин $(\tilde s_i+1)$, $\tilde s_i>0$, $i=\overline{1,\tilde r}$;

$\check r$, $\check r\ge 0$, циклических длины 1;

матрицы $B^*(t)$ относительно оператора $L^*(t)$:

$\hat r$, $\hat r\ge 0$, циклических длин $(\hat s_i+1)$, $\hat s_i>0$, $i=\overline{1,\hat r}$;

$\check r$, $\check r\ge 0$, циклических длины 1.

Тогда существуют неособенные при всех $t\in R$ квадратные матрицы $P(t),Q(t)\in \in C^\infty(R,T)$ порядков m и n соответственно такие, что умножением слева на $P(t)$ и заменой

$$x(t)=Q(t)y(t) \tag{17}$$

система (1) сводится к канонической форме

$$\begin{bmatrix}\operatorname{diag}\left[E_\alpha,J,\tilde J,\hat J\right] & 0_{m-\check r,\check r}\\ 0_{\check r,n-\check r} & 0_{\check r\check r}\end{bmatrix}\frac{dy}{dt}=\begin{bmatrix}\operatorname{diag}\left[M(t),E_s,\tilde K,\hat K\right] & 0_{m-\check r,\check r}\\ 0_{\check r,n-\check r} & 0_{\check r\check r}\end{bmatrix}y+g(t), \tag{18}$$

где $J = \mathrm{diag}\,[J_1, \ldots, J_r]\,,\ \tilde{J} = \mathrm{diag}\,\left[\tilde{J}_1, \ldots, \tilde{J}_{\tilde{r}}\right],\ \tilde{K} = \mathrm{diag}\,\left[\tilde{K}_1, \ldots, \tilde{K}_{\tilde{r}}\right],\ \hat{J} = \mathrm{diag}\,\left[\hat{J}_1, \ldots, \hat{J}_{\hat{r}}\right],$ $\hat{K} = \mathrm{diag}\,\left[\hat{K}_1, \ldots, \hat{K}_{\hat{r}}\right],\ J_i = I_{s_i},\ i = \overline{1,r},$ *— нильпотентный блок Жордана размерности* $s_i,\ \tilde{J}_i = [E_{\tilde{s}_i}, 0_{\tilde{s}_i 1}]\,,\ \tilde{K}_i = [0_{\tilde{s}_i 1}, E_{\tilde{s}_i}]\,,\ i = \overline{1,\tilde{r}},\ \hat{J}_i = [E_{\hat{s}_i}, 0_{\hat{s}_i 1}]^T,\ \hat{K}_i = [0_{\hat{s}_i 1}, E_{\hat{s}_i}]^T,\ i = \overline{1,\hat{r}},$ $M(t) \in C^\infty(R,T)$ *— квадратная матрица порядка* α, $g(t) \in C^\infty(R,T)$ *— вектор размерности* m.

Доказательство. Построим матрицы

$$Q(t) = \left[Q_0(t), \Phi(t), \tilde{\Phi}(t), \hat{\Phi}(t), \breve{\Phi}(t)\right],$$

$$P(t) = \left[P_0(t), \Psi(t), \hat{\Psi}(t), \tilde{\Psi}(t), \breve{\Psi}(t)\right]^*,$$

$$Q_0(t) = [q_1(t), \ldots, q_\alpha(t)]\,,$$

$$\Phi(t) = [\Phi_1(t), \ldots, \Phi_r(t)]\,, \quad \Phi_i(t) = \left[\varphi_i^{(1)}(t), \ldots, \varphi_i^{(s_i)}(t)\right], \quad i = \overline{1,r},$$

$$\tilde{\Phi}(t) = \left[\tilde{\Phi}_{1,\tilde{s}_1+1}(t), \ldots, \tilde{\Phi}_{\tilde{r},\tilde{s}_{\tilde{r}}+1}(t)\right],\ \ \tilde{\Phi}_{ij}(t) = \left[\tilde{\varphi}_i^{(j)}(t), \ldots, \tilde{\varphi}_i^{(1)}(t)\right],\ \ j = \tilde{s}_i, \tilde{s}_i + 1,\ \ i = \overline{1,\tilde{r}},$$

$$\hat{\Phi}(t) = \left[\hat{\Phi}_1(t), \ldots, \hat{\Phi}_{\hat{r}}(t)\right], \quad \hat{\Phi}_i(t) = \left[\hat{\varphi}_i^{(1)}(t), \ldots, \hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)}(t)\right], \quad i = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\breve{\Phi}(t) = [\breve{\varphi}_1(t), \ldots, \breve{\varphi}_{\breve{r}}(t)]\,,$$

$$P_0(t) = [p_1(t), \ldots, p_\alpha(t)]\,,$$

$$\Psi(t) = [\Psi_1(t), \ldots, \Psi_r(t)]\,, \quad \Psi_i(t) = \left[\psi_i^{(s_i)}(t), \ldots, \psi_i^{(1)}(t)\right], \quad i = \overline{1,r},$$

$$\tilde{\Psi}(t) = \left[\tilde{\Psi}_{1,\hat{s}_1+1}(t), \ldots, \tilde{\Psi}_{\hat{r},\hat{s}_{\hat{r}}+1}(t)\right],\ \ \tilde{\Psi}_{ij}(t) = \left[\tilde{\psi}_i^{(j)}(t), \ldots, \tilde{\psi}_i^{(1)}(t)\right],\ \ j = \hat{s}_i, \hat{s}_i + 1,\ \ i = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\hat{\Psi}(t) = \left[\hat{\Psi}_1(t), \ldots, \hat{\Psi}_{\tilde{r}}(t)\right], \quad \hat{\Psi}_i(t) = \left[\hat{\psi}_i^{(1)}(t), \ldots, \hat{\psi}_i^{(\tilde{s}_i)}(t)\right], \quad i = \overline{1,\tilde{r}},$$

$$\breve{\Psi}(t) = \left[\breve{\psi}_1(t), \ldots, \breve{\psi}_{\breve{r}}(t)\right].$$

Выполнив в (1) замену (17) и умножив слева на матрицу $P(t)$, обозначив

$$M(t) = P_0^*(t)L(t)Q_0(t), \qquad g(t) = P(t)f(t), \tag{19}$$

при этом $P(t), Q(t)$ неособенные, $P(t), Q(t), M(t), g(t) \in C^\infty(R,T)$, согласно [10] получим (18).

Теорема 1 доказана.

Согласно [10] столбцы матриц

$$X_\alpha(t) = Q_0(t)X(t) \tag{20}$$

и

$$Y_\alpha(t) = P_0(t)\left[X^{-1}(t)\right]^*, \tag{21}$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы

$$\frac{dx_0}{dt} = M(t)x_0, \tag{22}$$

$M(t)$ — матрица (19), являются линейно независимыми решениями однородной системы

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{23}$$

и сопряженной к ней

$$\frac{d}{dt}\left[B^*(t)y\right] = -A^*(t)y \tag{24}$$

соответственно.

Обозначим через c_i произвольный постоянный вектор размерности i,

$$\Omega = Y_\alpha^*(0)B(0)X_\alpha(T),$$

$$\mu = \dim\ker(\Omega - E_\alpha).$$

Из замечания 1, (20), (21) следует, что

$$\Omega = X^{-1}(0)X(T)$$

— матрица монодромии системы (22).

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы 1, то общее периодическое решение системы (23) имеет вид*

$$x(t) = X_\mu(t)c_\mu + \sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{k=0}^{\tilde s_i}\left[\frac{d^k}{dt^k}\tilde\beta_i(t)\right]\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-k+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t), \quad x(t)\in C^\infty(R,T), \tag{25}$$

где $X_\mu(t)$ — матрица, μ столбцов которой являются линейными комбинациями столбцов матрицы $X_\alpha(t)$ и представляют собой линейно независимые периодические решения системы (23), $\tilde\beta_i(t)\in C^\infty(R,T)$, $i=\overline{1,\tilde r}$, и $\breve\beta_i(t)\in C^\infty(R,T)$, $i=\overline{1,\breve r}$, — произвольные скалярные функции.

Доказательство. Согласно [10] система (23) разрешима, ее общее решение имеет вид

$$x(t) = X_\alpha(t)c_\alpha + \sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{k=0}^{\tilde s_i}\left[\frac{d^k}{dt^k}\tilde\beta_i(t)\right]\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-k+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve r}\breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t), \tag{26}$$

где $\tilde{\beta}_i(t) \in C^\infty(R)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\breve{\beta}_i(t) \in C^\infty(R)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, — произвольные скалярные функции, т. е. $x(t)$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $X_\alpha(t)$ и части векторов множества 1. Из замечания 1, (20) и (26) следует, что $x(t) \in C^\infty(R,T)$ тогда и только тогда, когда $x_0(t) \in C^\infty(R,T)$, $\tilde{\beta}_i(t) \in C^\infty(R,T)$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\breve{\beta}_i(t) \in C^\infty(R,T)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, где

$$x_0(t) = X(t)c_\alpha$$

— общее решение системы (22). Согласно [11, с. 89] ее общее периодическое решение имеет вид

$$x_0(t) = X(t)Dc_\mu,$$

где D — постоянная матрица размерности $\alpha \times \mu$, столбцы которой являются элементами базиса $\ker(\Omega - E_\alpha)$. Обозначив

$$X_\mu(t) = X_\alpha(t)D \tag{27}$$

и подставив (27) в (26), получим (25).

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Общее периодическое решение системы (24) имеет вид*

$$y(t) = Y_\mu(t)c_\mu + \sum_{i=1}^{\hat{r}} \sum_{k=0}^{\hat{s}_i} \left[\frac{d^k}{dt^k}\,\hat{\beta}_i(t)\right] \tilde{\psi}_i^{(\hat{s}_i-k+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{\beta}_i(t)\breve{\psi}_i(t), \quad y(t) \in C^\infty(R,T),$$

где

$$Y_\mu(t) = Y_\alpha(t)H, \tag{28}$$

H *— постоянная матрица размерности* $\alpha \times \mu$, *столбцы которой являются элементами базиса* $\ker(\Omega - E_\alpha)^*$ *(согласно [11, с. 21]* $\dim\ker(\Omega - E_\alpha)^* = \mu$*),* $\hat{\beta}_i(t) \in C^\infty(R,T)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $\breve{\beta}_i(t) \in C^\infty(R,T)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, *— произвольные скалярные функции.*

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы 1, то система (1) имеет периодические решения в том и только том случае, когда выполняются условия*

$$\sum_{k=0}^{\hat{s}_i} \frac{d^k}{dt^k}\left(f(t), \tilde{\psi}_i^{(\hat{s}_i-k+1)}(t)\right) = 0, \quad i = \overline{1, \hat{r}}, \tag{29}$$

$$\left(f(t), \breve{\psi}_i(t)\right) = 0, \quad i = \overline{1, \breve{r}}, \tag{30}$$

$$\int_0^T Y_\mu^*(t)f(t)dt = 0. \tag{31}$$

Ее общее периодическое решение имеет вид

$$x(t) = X_\mu(t)c_\mu - X_\alpha(t)(\Omega - E_\alpha)^{-}\Omega \int\limits_0^T Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)d\tau + \int\limits_0^t X_\alpha(t)Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$- \sum_{i=1}^{r} \Phi_i(t) \sum_{k=0}^{s_i-1} I_{s_i}^k \frac{d^k}{dt^k} [\Psi_i^*(t)f(t)] - \sum_{i=1}^{\tilde r} \tilde\Phi_{i\tilde s_i}(t) \sum_{k=0}^{\tilde s_i-1} \left(I_{\tilde s_i}^T\right)^k \frac{d^k}{dt^k} \left[\hat\Psi_i^*(t)f(t)\right] -$$

$$- \sum_{i=1}^{\hat r} \hat\Phi_i(t) \sum_{k=0}^{\hat s_i-1} I_{\hat s_i}^k \frac{d^k}{dt^k} \left[\tilde\Psi_{i\hat s_i}^*(t)f(t)\right] + \sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{k=0}^{\tilde s_i} \left[\frac{d^k}{dt^k}\tilde\beta_i(t)\right] \tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-k+1)}(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\breve r} \breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t), \quad x(t) \in C^\infty(R,T), \tag{32}$$

где $\tilde\beta_i(t) \in C^\infty(R,T)$, $i = \overline{1,\tilde r}$, $\breve\beta_i(t) \in C^\infty(R,T)$, $i = \overline{1,\breve r}$, *— произвольные скалярные функции.*

Доказательство. Согласно [10] система (1) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия (29), (30). Ее общее решение имеет вид

$$x(t) = X_\alpha(t)c_\alpha + \int\limits_0^t X_\alpha(t)Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)d\tau - \sum_{i=1}^{r} \Phi_i(t) \sum_{k=0}^{s_i-1} I_{s_i}^k \frac{d^k}{dt^k} [\Psi_i^*(t)f(t)] -$$

$$- \sum_{i=1}^{\tilde r} \tilde\Phi_{i\tilde s_i}(t) \sum_{k=0}^{\tilde s_i-1} \left(I_{\tilde s_i}^T\right)^k \frac{d^k}{dt^k} \left[\hat\Psi_i^*(t)f(t)\right] - \sum_{i=1}^{\hat r} \hat\Phi_i(t) \sum_{k=0}^{\hat s_i-1} I_{\hat s_i}^k \frac{d^k}{dt^k} \left[\tilde\Psi_{i\hat s_i}^*(t)f(t)\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{k=0}^{\tilde s_i} \left[\frac{d^k}{dt^k}\tilde\beta_i(t)\right] \tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-k+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\breve r} \breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t), \tag{33}$$

где $\tilde\beta_i(t) \in C^\infty(R), i = \overline{1,\tilde r}, \breve\beta_i(t) \in C^\infty(R), i = \overline{1,\breve r}$, — произвольные скалярные функции. Далее, как и при доказательстве теоремы 2, убеждаемся, что $x(t) \in C^\infty(R,T)$ тогда и только тогда, когда $x_0(t) \in C^\infty(R,T)$, $\tilde\beta_i(t) \in C^\infty(R,T)$, $i = \overline{1,\tilde r}$, $\breve\beta_i(t) \in C^\infty(R,T)$, $i = \overline{1,\breve r}$, где

$$x_0(t) = X(t)c_\alpha + \int\limits_0^t X(t)X^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau \tag{34}$$

— общее решение системы

$$\frac{dx_0}{dt} = M(t)x_0 + P_0^*(t)f(t).$$

Здесь $M(t)$ — матрица (19). Согласно [11, с. 91], для того чтобы оно было периодическим, необходимо и достаточно выполнения условия

$$x_0(T) = x_0(0). \tag{35}$$

Подставив (34) в (35), получим систему

$$-(\Omega - E_\alpha)c_\alpha = \Omega \int\limits_0^T X^{-1}(\tau)P_0^*(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Согласно (21), (28) она разрешима, если выполняется условие (31), при этом

$$c_\alpha = -(\Omega - E_\alpha)^{-}\Omega \int\limits_0^T Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)d\tau + Dc_\mu. \tag{36}$$

Подставив (36) в (33), с учетом (27) получим (32).

Теорема 3 доказана.

Следствие 2. *Если $\mu = 0$, то условие (31) отсутствует, общее периодическое решение системы (1) имеет вид*

$$\begin{aligned} x(t) = &-X_\alpha(t)(\Omega - E_\alpha)^{-1}\Omega \int\limits_0^T Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)d\tau + \int\limits_0^t X_\alpha(t)Y_\alpha^*(\tau)f(\tau)d\tau - \\ &- \sum_{i=1}^{r} \Phi_i(t) \sum_{k=0}^{s_i-1} I_{s_i}^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi_i^*(t)f(t)\right] - \sum_{i=1}^{\tilde r} \tilde\Phi_{i\tilde s_i}(t) \sum_{k=0}^{\tilde s_i-1} \left(I_{\tilde s_i}^T\right)^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\hat\Psi_i^*(t)f(t)\right] - \\ &- \sum_{i=1}^{\hat r} \hat\Phi_i(t) \sum_{k=0}^{\hat s_i-1} I_{\hat s_i}^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\tilde\Psi_{i\hat s_i}^*(t)f(t)\right] + \sum_{i=1}^{\tilde r}\sum_{k=0}^{\tilde s_i}\left[\frac{d^k}{dt^k}\tilde\beta_i(t)\right]\tilde\varphi_i^{(\tilde s_i-k+1)}(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\breve r} \breve\beta_i(t)\breve\varphi_i(t). \end{aligned} \tag{37}$$

Пример. Пусть в (1) $m = n = 2$,

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

$a_{ij}(t) \in C^\infty(R,T)$, $i,j = 1,2$, $f_i(t) \in C^\infty(R,T)$, $i = 1,2$, — действительные скалярные функции. Рассмотрим следующие случаи [9, 10]:

1) $a_{22}(t) \neq 0\ \forall t \in R$. Имеем $r = 1$, $s_1 = 1$, $\breve r = \check r = \tilde r = \hat r = 0$, $\alpha = 1$,

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) = \varphi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Psi(t) = \Psi_1(t) = \psi_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$Q_0(t) = q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad P_0(t) = p_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = [Q_0(t), \Phi_1(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) & 1 \end{bmatrix},$$

$$P(t) = [P_0(t), \Psi_1(t)]^* = \begin{bmatrix} 1 & -a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t) \\ \\ 0 & a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$M(t) = m_{11}(t) = a_{11}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t).$$

Система (18) имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} m_{11}(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} f_1(t) - a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \\ \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \exp\left[\int_0^T m_{11}(t)dt\right].$$

Если $\Omega = 1$, то $\mu = 1$, $D = H = 1$, условие (31) принимает вид

$$\int_0^T \exp\left[-\int_0^t m_{11}(\tau)d\tau\right]\left[f_1(t) - a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t)f_2(t)\right]dt = 0.$$

При его выполнении общее периодическое решение (32) системы (1) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left[\int_0^t m_{11}(z)dz\right] c_1 + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \exp\left[\int_0^t m_{11}(z)dz\right] \exp\left[-\int_0^\tau m_{11}(z)dz\right] \times$$

$$\times \left[f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right]d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}.$$

Если $\Omega \neq 1$, то $\mu = 0$, общее периодическое решение (37) системы (1) таково:

$$x(t) = -\left[\begin{array}{c} 1 \\ \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{array}\right] \exp\left[\int\limits_0^t m_{11}(z)dz\right] \left\{\exp\left[\int\limits_0^T m_{11}(z)dz\right] - 1\right\}^{-1} \times$$

$$\times \exp\left[\int\limits_0^T m_{11}(z)dz\right] \int\limits_0^T \exp\left[-\int\limits_0^\tau m_{11}(z)dz\right] \left[f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \left[\begin{array}{c} 1 \\ \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{array}\right] \exp\left[\int\limits_0^t m_{11}(z)dz\right] \exp\left[-\int\limits_0^\tau m_{11}(z)dz\right] \times$$

$$\times \left[f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)\right] d\tau - \left[\begin{array}{c} 0 \\ \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{array}\right].$$

2) $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \neq 0$, $a_{21}(t) \neq 0$ $\forall t \in R$. Имеем $r = 1$, $s_1 = 2$, $\breve{r} = \check{r} = \tilde{r} = \hat{r} = 0$, $\alpha = 0$,

$$\varphi_1^{(1)}(t) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right], \quad \varphi_1^{(2)}(t) = \left[\begin{array}{c} a_{12}(t) \\ \\ a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\,a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{array}\right],$$

$$\psi_1^{(1)}(t) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \\ a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t) \end{array}\right], \quad \psi_1^{(2)}(t) = \left[\begin{array}{c} a_{12}^{-1}(t) \\ \\ 0 \end{array}\right],$$

$$Q(t) = \Phi(t) = \Phi_1(t) = \left[\begin{array}{cc} 0 & a_{12}(t) \\ \\ 1 & a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\,a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{array}\right],$$

$$P(t) = \Psi^*(t) = \Psi_1^*(t) = \left[\begin{array}{cc} a_{12}^{-1}(t) & 0 \\ \\ 0 & a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t) \end{array}\right].$$

Система (18) принимает вид

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \frac{dy}{dt} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] y + \left[\begin{array}{c} a_{12}^{-1}(t)f_1(t) \\ \\ a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \end{array}\right],$$

$\mu = 0$, общее периодическое решение (37) системы (1) имеет вид

$$x(t) = \left[\begin{array}{c} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ \\ a_{12}^{-1}(t)\left\{a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \dfrac{d}{dt}[a_{21}^{-1}(t)f_2(t)]\right\} \end{array}\right].$$

3) $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \neq 0$, $a_{21}(t) \equiv 0 \; \forall t \in R$. Имеем $\tilde{r} = 1$, $\tilde{s}_1 = 1$, $\check{r} = 1$, $\check{r} = r = \hat{r} = 0$, $\alpha = 0$,

$$\tilde{\varphi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\, a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix},$$

$$\check{\Psi}(t) = \check{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Psi}(t) = \hat{\Psi}_1(t) = \hat{\psi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = \tilde{\Phi}(t) = \tilde{\Phi}_{12}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) & 0 \\ a_{12}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\, a_{12}(t) - a_{11}(t) & 1 \end{bmatrix},$$

$$P(t) = \left[\hat{\Psi}(t), \check{\Psi}(t)\right]^* = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Система (18) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

$\mu = 0$, условие (30) разрешимости системы (1) таково:

$$f_2(t) \equiv 0.$$

При его выполнении общее периодическое решение (37) системы (1) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t)\tilde{\beta}_1(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\tilde{\beta}_1(t)\dfrac{d}{dt}\, a_{12}(t) - a_{11}(t)\tilde{\beta}_1(t) - a_{12}^{-1}(t) f_1(t) + \dfrac{d}{dt}\,\tilde{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

4) $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \neq 0 \; \forall t \in R$. Имеем $\check{r} = 1$, $\hat{r} = 1$, $\hat{s}_1 = 1$, $\tilde{r} = r = \check{r} = 0$, $\alpha = 0$,

$$\check{\Phi}(t) = \check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi}_1^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}(t) \\ -a_{11}(t) - a_{21}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\, a_{21}(t) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Phi}(t) = \hat{\Phi}_1(t) = \hat{\varphi}_1^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = [\hat{\Phi}(t), \breve{\Phi}(t)] = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}(t) & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P(t) = \tilde{\Psi}^*(t) = \tilde{\Psi}_{12}^*(t) = \begin{bmatrix} a_{21}(t) & -a_{11}(t) - a_{21}^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\, a_{21}(t) \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Система (18) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} a_{21}(t)f_1(t) - a_{11}(t)f_2(t) - a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\dfrac{d}{dt}\, a_{21}(t) \\ \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

$\mu = 0$, условие (29) разрешимости системы (1) таково:

$$a_{21}(t)f_1(t) - a_{11}(t)f_2(t) - a_{21}^{-1}(t)f_2(t)\frac{d}{dt}\, a_{21}(t) + \frac{d}{dt}\, f_2(t) \equiv 0.$$

При его выполнении общее периодическое решение (37) системы (1) имеет вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

5) $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \equiv 0\ \forall t \in R$. Имеем $\breve{r} = 1$, $\check{r} = 1$, $\tilde{r} = r = \hat{r} = 0$, $\alpha = 1$,

$$\breve{\Phi}(t) = \breve{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \breve{\Psi}(t) = \breve{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q_0(t) = q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_0(t) = p_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = [Q_0(t), \breve{\Phi}(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P(t) = [P_0(t), \breve{\Psi}(t)]^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M(t) = a_{11}(t).$$

Система (18) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & 0 \\ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \exp\left[\int\limits_0^T a_{11}(t)dt\right].$$

Условие (30) разрешимости системы (1) таково:

$$f_2(t) \equiv 0.$$

При его выполнении, если $\Omega = 1$, то $\mu = 1$, $D = H = 1$, и условие (31) имеет вид

$$\int_0^T \exp\left[-\int_0^\tau a_{11}(\tau)d\tau\right] f_1(t)dt = 0.$$

При его выполнении общее периодическое решение (32) системы (1) принимает вид

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int_0^t a_{11}(z)dz\right] c_1 + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int_0^t a_{11}(z)dz\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\int_0^\tau a_{11}(z)dz\right] f_1(\tau)d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

Если $\Omega \neq 1$, то $\mu = 0$, общее периодическое решение (37) системы (1) имеет вид

$$x(t) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int_0^t a_{11}(z)dz\right] \left\{\exp\left[\int_0^T a_{11}(z)dz\right] - 1\right\}^{-1} \exp\left[\int_0^T a_{11}(z)dz\right] \times$$

$$\times \int_0^T \exp\left[-\int_0^\tau a_{11}(z)dz\right] f_1(\tau)d\tau + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp\left[\int_0^t a_{11}(z)dz\right] \exp \times$$

$$\times \left[-\int_0^\tau a_{11}(z)dz\right] f_1(\tau)d\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ \breve{\beta}_1(t) \end{bmatrix}.$$

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 2004. — 576 с.

2. *Шлапак Ю. Д.* Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной // Укр. мат. журн. — 1975. — **27**, № 1. — С. 137 – 140.

3. *Еременко В. А.* О некоторых свойствах периодических матриц // Укр. мат. журн. — 1980. — **32**, № 1. — С. 19 – 36.

4. *Еременко В. А.* О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных // Укр. мат. журн. — 1980. — **32**, № 2. — С. 168 – 174.

5. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 295 с.

6. *Sibuya Y.* Some global properties of matrixes of functions of one variable // Math. Anal. — 1965. — **161**, № 1. — P. 67 – 77.

7. *Самойленко А. М.* Квазипериодические решения системы линейных алгебраических уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. — С. 5–26.

8. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 319 с.

9. *Елишевич М. А.* Некоторые свойства жордановых наборов векторов матрицы относительно оператора, содержащего дифференцирование // Журн. обчислюв. та прикл. математики. — 2012. — № 2 (108). — С. 119–134.

10. *Елишевич М. А.* Задача Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 2. — С. 173–190.

11. *Якубович В. А. Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 718 с.

Получено 15.03.13