УДК 517.51+511.7

СИНГУЛЯРНІСТЬ ІНВЕРСОРА ЦИФР Q_3-ЗОБРАЖЕННЯ ДРОБОВОЇ ЧАСТИНИ ДІЙСНОГО ЧИСЛА, ЙОГО ФРАКТАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ

І. В. Замрій, М. В. Працьовитий

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
Україна, 01601, Київ, вул. Пирогова, 9
e-mail: irina-zamrij@yandex.ru
prats4@yandex.ru

We introduce and study a continuous function I, the so-called inversor of digits of Q_3-representation for fractional part of a real number. This representation is determined by a stochastic vector (q_0, q_1, q_2) with positive entries and generalizes the classic ternary representation because it coincides with the latter, if $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$.

The values of this function are obtained from the Q_3-representation of the argument by change of digits: 0 to 2, 1 to 1, 2 to 0. Differential, integral, and fractal properties of inversor are described. We prove that I is a singular function if $q_0 \neq q_2$.

Вводится и исследуется непрерывная функция I, названная инверсором цифр Q_3-изображения дробной части действительного числа, которое определяется вероятностным вектором (q_0, q_1, q_2) с положительными координатами и является обобщением классического троичного изображения, так как совпадает с ним при $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$.

Значение этой функции получается из Q_3-изображения аргумента заменой цифр: 0 на 2, 1 на 1, 2 на 0. Описываются дифференциальные, интегральные и фрактальные свойства инверсора. Доказано, что I является сингулярной функцией, если $q_0 \neq q_2$.

Вступ. Добре відомі три класичні змістовні теорії дійсних чисел, запропоновані німецькими математиками К. Вейєрштрассом, Г. Кантором і Р. Дедекіндом у другій половині XIX ст. Пізніше було створено загальну аксіоматичну теорію дійсних чисел. Цікавою є теорія, на рівні ідей запропонована А. М. Колмогоровим [6], а реалізована Н. І. Кавун [5], яка, як і теорія Вейєрштрасса, не передбачає наперед створеної теорії раціональних чисел. Усвідомлення того, що таких теорій можна побудувати багато, прийшло відносно недавно.

Існують різні способи кодування (зображення) дійсних чисел із використанням скінченного алфавіту $\{0, 1, \ldots, s-1\} \equiv A_s$, $1 < s \in \mathbb{N}$. Внаслідок різних причин двосимвольне кодування заслуговує окремої уваги. На увагу заслуговує і трійкова система, оскільки вона є найбільш економною в певному сенсі. У роботі [11] вказано сильні та слабкі сторони цих систем.

Кодуванням чисел з $[0, 1]$ засобами алфавіту A (скінченного або нескінченного) називається сюр'єктивне відображення

$$\varphi : A \times A \times \ldots \times A \times \ldots \equiv L \to [0, 1].$$

При цьому символічний запис числа $x = \varphi((a_n))$, що є образом послідовності (a_n), у фор-

© І. В. Замрій, М. В. Працьовитий, 2015

мі $\Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ називається його *φ-зображенням* (або *φ-кодом*).

Одним із найпростіших способів кодування чисел $x \in [0,1]$ засобами алфавіту A_s, $2 \leq s \in N$, є s-кове зображення числа:

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \ldots \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

У традиційному розумінні геометрія чисел займається розв'язанням теоретико-числових проблем із використанням геометричних засобів. В останні роки з'явилась нова гілка дosліжень — геометрія різних зображень дійсних чисел, яка вивчає геометричний зміст цифр, метричні співвідношення, тополого-метричні властивості множин чисел, визначених умовами на їх зображення, тощо та застосування до конструювання різних математичних об'єктів і складну (неоднорідну) локальну структуру [3].

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — фіксований впорядкований набір елементів алфавіту A.

Означення 1. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ у кодуванні φ називається множина $\Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m}$ всіх чисел $x \in [0,1]$, які мають таке φ-зображення:*

$$x = \Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{m+k}\ldots}, \quad \alpha_{m+i} \in A.$$

Сам відрізок $[0,1]$ називається циліндром нульового рангу і позначається Δ.

Безпосередньо з даного означення випливають наступні властивості циліндрів:
1) $\Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i\in A} \Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m i}$;
2) $\Delta = \bigcup\limits_{i_1\in A}\bigcup\limits_{i_2\in A}\ldots\bigcup\limits_{i_n\in A} \Delta^{\varphi}_{i_1i_2\ldots i_n}$ для довільного n.

Для s-кового зображення чисел циліндрами є відрізки, а саме:

$$\Delta^s_{c_1c_2\ldots c_m} = \left[\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{s^i};\ \frac{1}{s^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{c_n}{s^n}\right].$$

Кажуть, що система кодування має *нульову надлишковість*, якщо всі числа або переважна більшість чисел мають єдине зображення і лише незначна їх частина має два зображення.

Прикладами кодування чисел засобами нескінченного алфавіту є L-, E- та S-зображення, які ґрунтуються на розкладах чисел у знакододатні ряди Люрота [2, 1, 4], Енгеля [9], Сильвестера [7] відповідно. Як і s-кове зображення, всі вони мають нульову надлишковість, оскільки кожне число з $(0,1]$ має єдине L-, E- та S-зображення.

Кодування називається *неперервним*, якщо циліндр є проміжком (відрізком, піввідрізком або півінтервалом) і при цьому для будь-якої послідовності (a_n), $a_n \in A$, переріз $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_m} \equiv \Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_m\ldots}$ є числом (точкою), причому

$$\Delta^{\varphi}_{a_1a_2\ldots a_m\ldots} = x \to x' = \Delta^{\varphi}_{a'_1a'_2\ldots a'_m\ldots} \equiv m \to \infty,$$

де $a_m \neq a'_m$, але $a_i = a'_i$ при $i < m$.

Неперервне φ-зображення називається *Q-зображенням*, якщо алфавіт A є скінченним і для кожного $i \in A \equiv A_s$ виконується $\sup \Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m i} = \inf \Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ і метричне відношення

$$\frac{|\Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^{\varphi}_{c_1c_2\ldots c_m}|} \equiv q_i = \text{const},$$

яке називається *основним* (найважливішим у метричній теорії).

Змістовне введення Q-зображення дає наступне твердження [8]: для будь-якого $x \in \in [0,1]$ існує послідовність (α_n), $\alpha_n \in A_s$, така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{1}$$

де $\beta_0 = 0, \beta_i = q_0 + q_1 + \ldots + q_{i-1}, 0 < i \leq s$.

Для Q-зображення мають місце такі співвідношення:

3) $q_0 + q_1 + \ldots + q_{s-1} = 1$;

4) $|\Delta^Q_{c_1c_2\ldots c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i} \to 0, m \to \infty$.

Класичне s-кове зображення є Q-зображенням, і для нього виконується рівність $q_0 = = q_1 = \ldots = q_{s-1} = \dfrac{1}{s}$.

Період у Q-зображенні числа (якщо він існує) позначають у круглих дужках. Існують числа, які мають два Q-зображення. Це числа з періодом (0) або $(s-1)$, причому $\Delta^Q_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(0)} = \Delta^Q_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m-1](s-1)}$. Такі числа називаються *Q-раціональними*, їх множина є зліченною. Решту чисел називають Q-ірраціональними.

Якщо $s = 3$, то Q-зображення називається Q_3-зображенням. Далі $\alpha_k(x)$ — це k-та цифра (символ) Q_3-зображення числа x.

1. Інверсор цифр Q_3-зображення чисел з $[0, 1]$.

Означення 2. *Інверсором цифр Q_3-зображення числа $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = x \in [0,1]$ (далі інверсором) називають функцію I, визначену на $[0,1]$ рівністю*

$$I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots}.$$

Оскільки Q_3-раціональні числа мають по два зображення, то виникає необхідність обґрунтування коректності означення інверсора.

Розглянемо два різних зображення Q_3-раціонального числа x, тобто

$$x \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](2)} \equiv x', \quad \alpha_k \neq 0,$$

і перевіримо виконання рівності $I(x) = I(x')$. Для цього розглянемо різницю

$$I(x) - I(x') = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_k](2)} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[3-\alpha_k](0)} =$$

$$= \left(\beta_{[2-\alpha_k]} + \frac{\beta_2 q_{[2-\alpha_k]}}{1-q_2} - \beta_{[3-\alpha_k]} \right) \prod_{i=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_i]}.$$

Якщо $\alpha_k = 1$, то $\beta_1 + \dfrac{\beta_2 q_1}{1-q_2} - \beta_2 = q_0 + \dfrac{(q_0+q_1)q_1}{q_0+q_1} - q_0 - q_1 = 0$. Якщо $\alpha_k = 2$, то $\beta_0 + \dfrac{\beta_2 q_0}{1-q_2} - \beta_1 = \dfrac{(q_0+q_1)q_0}{q_0+q_1} - q_0 = 0$.

Таким чином, для довільного Q_3-раціонального числа виконується $I(x) = I(x')$, а отже, інверсор цифр Q_3-зображення числа є коректно визначеною функцією.

Теорема 1. *Для інверсора I символів Q_3-зображення чисел відрізка $[0,1]$ має місце рівність*

$$\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} + \Delta^{Q'_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots} = 1,$$

де $Q'_3 = \{q'_0 = q_2; q'_1 = q_1; q'_2 = q_0\}$.

Доведення. Для чисел $0 = \Delta^{Q_3}_{(0)}$ і $1 = \Delta^{Q_3}_{(2)}$ твердження є очевидним.

Нехай $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — довільне число з інтервалу $(0;1)$, $1 - x \equiv x'$. Введемо перепозначення циліндрів $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \Delta^{Q'_3}_{c'_1c'_2\ldots c'_m}$, де $c'_i = 2 - c_i$. Оскільки x належить системі вкладених циліндрів $\Delta^{Q_3}_{\alpha_1}, \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \ldots$, то $x' = 1 - x$ належить системі вкладених циліндрів $\Delta^{Q'_3}_{\alpha'_1}, \Delta^{Q'_3}_{\alpha'_1\alpha'_2}, \ldots, \Delta^{Q'_3}_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n}, \ldots$.

Отже,

$$x' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{Q'_3}_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{Q'_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]} = \Delta^{Q'_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots},$$

що й слід було довести.

Наслідок 1. $I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = 1 - \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

Наслідок 2. $I(x) = 1 - x$ *для всіх* $x \in [0,1]$ *тоді і тільки тоді, коли* $q_0 = q_2$.

Доведення. Справді, якщо $q_0 = q_2$, то $Q_3 = Q'_3$ і $\Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, а отже,

$$I(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = 1 - \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = 1 - x.$$

Якщо ж $q_0 \neq q_2$, то розглянемо число $x = \Delta^{Q_3}_{1(0)}$ і

$$I(x) = I(\Delta^{Q_3}_{1(0)}) = \beta_1 + \beta_2 q_1 + \beta_2 q_1 q_2 + \ldots = \beta_1 + \frac{\beta_2 q_1}{1-q_2} = q_0 + \frac{(q_0+q_1)q_0}{q_0+q_1} = q_0 + q_1,$$

$$1 - x = 1 - \Delta^{Q_3}_{1(0)} = 1 - q_0 = q_1 + q_2 \neq I(x).$$

Наслідок 2 доведено.

Лема 1. *Для приросту* $\mu_I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}) \equiv I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(2)}) - I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(0)})$ *функції I на циліндрі* $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n} = [\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(0)}; \Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n(2)}]$ *має місце рівність*

$$\mu_I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_n}) = -\prod_{j=1}^{n} q_{[2-c_j]}.$$

Доведення. Розглянемо можливі випадки. При $c_n = 0$ маємо

$$\mu_I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}0}) = I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}0(2)}) - I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}0(0)}) =$$

$$= \Delta^{Q_3}_{[2-c_1][2-c_2]\ldots[2-c_{n-1}]2(0)} - \Delta^{Q_3}_{[2-c_1][2-c_2]\ldots[2-c_{n-1}]2(2)} =$$

$$= -\beta_2 \prod_{j=1}^{n-1} q_{[2-c_j]}(q_2 + q_2^2 + \ldots + q_2^k + \ldots) = -q_2 \prod_{j=1}^{n-1} q_{[2-c_j]}.$$

При $c_n = 1$ маємо

$$\mu_I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}1}) = I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}1(2)}) - I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}1(0)}) =$$

$$= -\prod_{j=1}^{n-1} q_{[2-c_j]} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_2 q_1 \prod_{k=1}^{j-1} q_2 \right) = -q_1 \prod_{j=1}^{n-1} q_{[2-c_j]}.$$

Якщо $c_n = 2$, то

$$\mu_I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}2}) = I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}2(2)}) - I(\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}2(0)}) = -q_0 \prod_{j=1}^{n-1} q_{[2-c_j]}.$$

Лему 1 доведено.

2. Неперервність і монотонність інверсора.

Теорема 2. *Інверсор* I *цифр* Q_3*-зображення чисел* $[0,1]$ *є неперервною монотонно строго спадною на відрізку* $[0;1]$ *функцією.*

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка з $[0;1]$. Для доведення неперервності інверсора I цифр Q_3-зображення в точці x_0 досить показати, що $\lim_{x\to x_0} |I(x) - I(x_0)| = 0$.

Розглянемо випадок, коли x_0 є Q_3-ірраціональною точкою. Тоді для довільного числа $x \in [0;1]$ існує такий номер $k = k(x)$, що $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ при $i = \overline{1, k-1}$ і $\alpha_k(x) \neq \alpha_k(x_0)$. Оскільки умова $x \to x_0$ рівносильна $k \to \infty$, то

$$|I(x) - I(x_0)| = |\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1(x)]\ldots[2-\alpha_{k-1}(x)][2-\alpha_k(x)]\ldots} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1(x_0)]\ldots[2-\alpha_{k-1}(x_0)][2-\alpha_k(x_0)]\ldots}| =$$

$$= \left| \sum_{i=k}^{\infty} \beta_{[2-\alpha_i(x)]} \prod_{j=1}^{i-1} q_{[2-\alpha_j(x)]} - \sum_{i=k}^{\infty} \beta_{[2-\alpha_i(x_0)]} \prod_{j=1}^{i-1} q_{[2-\alpha_j(x_0)]} \right| \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} \leq (\max\{q_0, q_1, q_2\})^{k-1} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Отже, інверсор I є неперервною функцією в Q_3-ірраціональних точках.

Нехай x_0 є Q_3-раціональною точкою, тобто $x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)} \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](2)}$. Для доведення неперервності функції I зліва треба використати Q_3-зображення точки, що містить період (0), тобто $x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}$, а справа — Q_3-зображення точки, що містить період (2), застосувавши міркування, що і для Q_3-ірраціональних точок.

Доведемо, що функція є монотонно спадною на відрізку $[0; 1]$.

Розглянемо два таких числа, що $x_1 = \Delta^{Q_3}_{\alpha^{(1)}_1\alpha^{(1)}_2\ldots\alpha^{(1)}_n\ldots}$, $x_2 = \Delta^{Q_3}_{\alpha^{(2)}_1\alpha^{(2)}_2\ldots\alpha^{(2)}_n\ldots}$, $x_1 < x_2$. Тоді існує таке натуральне число k, що

$$\alpha^{(1)}_1 = \alpha^{(2)}_1 = \alpha_1, \quad \alpha^{(1)}_2 = \alpha^{(2)}_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha^{(1)}_{k-1} = \alpha^{(2)}_{k-1} = \alpha_{k-1},$$

але $\alpha^{(1)}_k < \alpha^{(2)}_k$. Тоді $2 - \alpha^{(1)}_k > 2 - \alpha^{(2)}_k$ і

$$\begin{aligned} I(x_1) - I(x_2) &= \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha^{(1)}_1][2-\alpha^{(1)}_2]\ldots[2-\alpha^{(1)}_n]\ldots} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha^{(2)}_1][2-\alpha^{(2)}_2]\ldots[2-\alpha^{(2)}_n]\ldots} = \\ &= \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_{k-1}][2-\alpha^{(1)}_k]\ldots} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_{k-1}][2-\alpha^{(2)}_k]\ldots} = \\ &= \beta_{[2-\alpha_1]} + \beta_{[2-\alpha_2]}q_{[2-\alpha_1]} + \ldots + \beta_{[2-\alpha_{k-1}]}\prod_{j=1}^{k-2} q_{[2-\alpha_j]} + \beta_{[2-\alpha^{(1)}_k]}\prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} + \ldots \\ &\quad \ldots + \left(\beta_{[2-\alpha_1]} + \beta_{[2-\alpha_2]}q_{[2-\alpha_1]} + \ldots + \beta_{[2-\alpha_{k-1}]}\prod_{j=1}^{k-2} q_{[2-\alpha_j]} + \right. \\ &\quad \left. + \beta_{[2-\alpha^{(2)}_k]}\prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} + \ldots\right) = \left(\beta_{[2-\alpha^{(1)}_k]} - \beta_{[2-\alpha^{(2)}_k]}\right)\prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} + \\ &\quad + \left(\beta_{[2-\alpha^{(1)}_{k+1}]}q_{[2-\alpha^{(1)}_k]} - \beta_{[2-\alpha^{(2)}_{k+1}]}q_{[2-\alpha^{(2)}_k]}\right)\prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} + \ldots > 0. \end{aligned}$$

Отже, якщо $x_1 < x_2$, то $I(x_1) > I(x_2)$, тобто інверсор I цифр Q_3-зображення є монотонно спадною функцією на відрізку $[0; 1]$.

Теорему 2 доведено.

Наслідок 3. *Рівність* $I(x) = x$ *має місце тоді і тільки тоді, коли* $x = \Delta^{Q_3}_{(1)}$.

3. Сингулярність інверсора. Властивість Φ елемента x з множини K називається *нормальною*, якщо переважна більшість елементів цієї множини (майже всі) її мають.

Такі поняття, як потужність, міра, розмірність Хаусдорфа – Безиковича, категорії Бера та ін. [8], дозволяють однозначно трактувати слова „майже всі".

Нехай $N_i(x, k)$ — кількість цифр i в Q_3-зображенні x до k-го місця включно. Тоді границя (якщо вона існує) $\lim_{k\to\infty} \dfrac{N_i(x, k)}{k} \equiv \nu_i(x) \equiv \nu^{Q_3}_i(x)$ називається *частотою (асимптотичною частотою) цифри* i в Q_3-зображенні числа x.

Означення 3. *Число* $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$, *для частот якого справджуються рівності*

$$\nu^{Q_3}_0(x) = q_0, \quad \nu^{Q_3}_1(x) = q_1, \quad \nu^{Q_3}_2(x) = q_2,$$

називається Q_3-нормальним.

Теорема 3. *Міра Лебега множини всіх Q_3-нормальних чисел відрізка* $[0,1]$ *дорівнює 1.*

Доведення. Покажемо, що для майже всіх (в розумінні міри Лебега) точок $x \in [0,1]$

$$\frac{N_i(x,k)}{k} \to q_i \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{2}$$

тобто множина всіх x, для яких умова (2) не виконується, має міру Лебега, що дорівнює нулю.

Нехай i — фіксований символ, $i \in \{0,1,2\}$. Розглянемо функцію $f(x)$ таку, що

$$x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots} \xrightarrow{f(x)} \Delta^{Q_2'}_{\alpha_{1,i}(x)\ldots\alpha_{k,i}(x)\ldots}, \quad \text{де} \quad \alpha_{k,i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_k \neq i, \\ 1, & \text{якщо} \quad \alpha_k = i, \end{cases}$$

і $Q_2' = \{q_0', q_1'\}$, $q_1' = q_i$, $q_0' = q_j + q_k$, $j \neq i \neq k$.

Тоді, очевидно, що $N_i(x,k) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{j,i}(x)$. Тому умова (2) набирає вигляду

$$\frac{1}{k}\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x) = q_i.$$

Розглянемо інтеграл

$$I_k^i = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x) - q_i\right)^2 dx = \frac{1}{k^2}\int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{k}(\alpha_{j,i}(x) - q_i)^2 dx.$$

Піднесемо суму, що стоїть під інтегралом, до квадрату і зінтегруємо кожен доданок. Враховуючи, що $\alpha_{j,i}(x) = \alpha_{j,i}^2(x)$, бо $\alpha_{j,i}(x) \in \{0,1\}$, отримуємо інтеграли двох видів: перший

$$\int\limits_0^1 (\alpha_{j,i}(x) - q_i)^2 dx = \int\limits_0^1 (\alpha_{j,i}(x)(1-2q_i) + q_i^2)dx = (1-2q_i)\int\limits_0^1 \alpha_{j,i}(x)dx + q_i^2 =$$

$$= (1-2q_i)\lambda(\{x : \alpha_{j,i}(x) = i\}) + q_i^2 = (1-2q_i)q_i + q_i^2 = q_i(1-q_i).$$

Кількість таких інтегралів дорівнює k.

Розглянемо інтеграли другого типу, враховуючи, що $j \neq t$:

$$\int\limits_0^1 (\alpha_{j,i}(x) - q_i)(\alpha_{t,i}(x) - q_i)dx = 0.$$

Оскільки $\int_0^1 \alpha_{j,i}(x)\alpha_{t,i}(x)dx = q_i^2$, то $I_k^i = \dfrac{q_i(1-q_i)}{k}$.

Отже, $\lim_{k\to\infty} I_k^i = 0$, тобто $\dfrac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x)$ збігається до q_i в середньому квадратичному, але зауважимо, що із збіжності в середньому квадратичному не випливає збіжність майже скрізь.

Візьмемо тепер довільне досить мале додатне число ε і позначимо через $F_k^i(\varepsilon)$ множину чисел відрізка $[0,1]$, для яких

$$\left|\sum_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x)k - q_i\right| > \varepsilon. \tag{3}$$

Оцінимо останній інтеграл:

$$I_k^i = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x) - q_i\right)^2 dx \geq \int\limits_{F_k^i(\varepsilon)} \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x) - q_i\right)^2 dx \geq \int\limits_{F_k^i(\varepsilon)} \varepsilon^2 dx = \varepsilon^2\lambda[F_k^i(\varepsilon)].$$

Тоді отримаємо

$$\lambda[F_k^i(\varepsilon)] \leq \frac{I_k^i}{\varepsilon^2} = \frac{q_i(1-q_i)}{k^2\varepsilon^2}. \tag{4}$$

Таким чином, якщо ε є фіксованим і k необмежено зростає, то міра множини точок, для яких має місце (3), прямує до нуля. Але з цього безпосередньо ще не випливає, що для майже всіх $x \in [0,1]$ буде $\dfrac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x) \to q_i$, $k \to \infty$.

Розглянемо послідовність множин $F_1^i(\varepsilon), F_4^i(\varepsilon), F_9^i(\varepsilon), \ldots, F_{n^2}^i(\varepsilon), \ldots$ і позначимо через $G_k^i(\varepsilon)$ множину чисел, що належить хоча б одній із множин $F_{k^2}^i(\varepsilon), F_{(k+1)^2}^i(\varepsilon), \ldots$.

Тоді з (4) отримаємо

$$\lambda[G_k^i(\varepsilon)] = \lambda\left[F_{k^2}^i(\varepsilon)\bigcup F_{(k+1)^2}^i(\varepsilon)\bigcup\ldots\right] \leq \sum_{i=0}^{2}\lambda\left[F_{(k+i)^2}^i(\varepsilon)\right] \leq$$

$$\leq \frac{q_i(1-q_i)}{k^2\varepsilon^2}\sum_{i=0}^{2}\frac{1}{(k+i)^2} \to 0 \quad \text{при} \quad (k\to\infty).$$

Оскільки $G_{k+1}^i(\varepsilon) \subset G_k^i(\varepsilon)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ і міра Лебега множини $G_k^i(\varepsilon)$ прямує до нуля при $k \to \infty$, спільна частина всіх цих множин має міру нуль. Тоді всі числа, крім чисел з множини міри нуль, можуть належати лише скінченному об'єднанню цих множин. Але якщо точка x належить лише скінченній кількості множин $G_k^i(\varepsilon)$, то при достатньо великому k вона не належить множині $G_k^i(\varepsilon)$, а отже, не належить кожній з множин $F_{k^2}^i(\varepsilon), F_{(k+1)^2}^i(\varepsilon), \ldots$. Тому для такого числа при k, більшому за деяке k_0, маємо $\left|\dfrac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{k^2}\alpha_{j,i}(x) - q_i\right| \leq \varepsilon$. Майже всі числа, яким би не було ε, мають цю властивість. Тоді $\dfrac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{k^2}\alpha_{j,i}(x) \to q_i$ при $k \to \infty$.

Таким чином, твердження доведено при умові, що числа k зростають по повних квадратах. Якщо ж k зростає як завгодно, то можна знайти таке число t, що

$$t^2 \le k \le (t+1)^2, \quad 0 \le k - t^2 \le 2t+1.$$

Тому

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x) = \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{t^2}\alpha_{j,i}(x) + \sum_{i=t^2+1}^{k}\alpha_{j,i}(x)\right) = \frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{t^2}\alpha_{j,i}(x)\frac{t^2}{k} + \frac{1}{k}\sum_{j=t^2+1}^{k}\alpha_{j,i}(x).$$

За доведеним майже скрізь $\frac{1}{t^2}\sum_{j=1}^{t^2}\alpha_{j,i}(x) \to q_i$ при $k \to \infty$ і скрізь $\frac{t^2}{(t+1)^2} < \frac{t^2}{k} \le$ ≤ 1, тому $\frac{1}{k}\sum_{j=t^2+1}^{k}\alpha_{j,i}(x) \le \frac{k-t^2}{k} < \frac{2t+1}{t^2}$. Тоді при $k \to \infty$ отримуємо $\frac{t^2}{k} \to 1$ і $\frac{1}{k}\sum_{j=t^2+1}^{k}\alpha_{j,i}(x) \to 0$.

Отже, майже скрізь $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x) \to q_i$ при $k \to \infty$, тобто величина $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{j,i}(x) - q_i$ майже скрізь є нескінченно малою для довільного i.

Теорему 3 доведено.

Лема 2. *Якщо $I'(x)$ існує, то*

$$I'(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_I\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right)}{|\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}|} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\frac{N_2(x,n)}{n} - \frac{N_0(x,n)}{n}}\right)^{n}. \qquad (5)$$

Доведення. Очевидно, що похідна дорівнює $I'(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_I\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right)}{|\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}|}$.

Тоді

$$I'(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_I\left(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}\right)}{|\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n} q_{[2-\alpha_i]}}{\prod_{i=1}^{n} q_{\alpha_i}} = \lim_{n\to\infty}\frac{q_0^{N_2(x,n)}q_1^{N_1(x,n)}q_2^{N_0(x,n)}}{q_0^{N_0(x,n)}q_1^{N_1(x,n)}q_2^{N_2(x,n)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{N_2(x,n)-N_0(x,n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\frac{N_2(x,n)-N_0(x,n)}{n}}\right)^{n},$$

що і слід було довести.

Теорема 4. *Якщо $q_0 \neq q_2$, то інверсор I є сингулярною функцією.*

Доведення. Оскільки функція I є неперервною і спадною, то згідно з відомою теоремою Лебега вона має майже скрізь (у розумінні міри Лебега λ) скінченну похідну. Нехай A — множина точок $x \in [0,1]$ таких, що існує $I'(x)$, B — множина нормальних чисел у Q_3-зображенні. Оскільки міра Лебега $\lambda(A) = \lambda(B) = 1$, то $\lambda(A \bigcap B) = 1$. Покажемо, що $I'(x) = 0$ для будь-якого $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \in A \bigcap B$. Оскільки $x \in B$, то $\nu_0(x) = q_0$, $\nu_1(x) = q_1$, $\nu_2(x) = q_2$.

Взявши до уваги (5), обчислимо похідну

$$I'(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\frac{N_2(x,n)}{n}-\frac{N_0(x,n)}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\nu_2(x)-\nu_0(x)}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{q_2-q_0}\right)^n.$$

Оцінимо значення виразу $\left(\dfrac{q_0}{q_2}\right)^{q_2-q_0}$:

якщо $q_0 < q_2$, то $\dfrac{q_0}{q_2} < 1$, $q_2 - q_0 > 0$ і $\left(\dfrac{q_0}{q_2}\right)^{q_2-q_0} < 1$;

якщо ж $q_0 > q_2$, то $\dfrac{q_0}{q_2} > 1$, $q_2 - q_0 < 0$ і $\left(\dfrac{q_0}{q_2}\right)^{q_2-q_0} < 1$.

Тоді

$$I'(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{q_2-q_0}\right)^n = 0. \tag{6}$$

Отже, похідна функції I на відрізку $[0;1]$ дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега, тобто вона є сингулярною функцією.

Теорему 4 доведено.

4. Диференціальні властивості інверсора Q_3-цифр.

Теорема 5. *Якщо* $q_0 \neq q_2$, *то інверсор* I *цифр* Q_3*-зображення не має похідної в жодній* Q_3*-раціональній точці.*

Доведення. Розглянемо Q_3-раціональну точку x_0 з відрізка $[0;1]$:

$$x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}-1(2)} \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}(0)} = x_0'.$$

Цифра α_{n+1} може дорівнювати лише 1 або 2. Якщо $\alpha_{n+1} = 1$, то виберемо послідовність (x_m) таку, що $x_m = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0\underbrace{2\ldots2}_{m}(0)}$. Очевидно, що $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$. Тоді

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I(x_0)-I(x_m)}{x_0-x_m} = \lim_{m\to\infty}\frac{\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]2(0)} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]2\underbrace{0\ldots0}_{m}(2)}}{q_0q_2^m\prod_{i=1}^n q_{\alpha_i}(\beta_2+\beta_2q_2+\beta_2q_2^2+\ldots)} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{-q_2q_0^m\prod_{i=1}^n q_{[2-\alpha_i]}}{\frac{\beta_2}{1-q_2}q_0q_2^m\prod_{i=1}^n q_{\alpha_i}} = -\lim_{m\to\infty}\frac{q_2}{q_0}\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^m\prod_{i=1}^n\frac{q_{[2-\alpha_i]}}{q_{\alpha_i}} = z.$$

Виберемо послідовність (x'_m) таку, що $x'_m = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1\underbrace{0\ldots0}_{m}(2)}$. Очевидно, що $x'_m \to \to x'_0$ при $m \to \infty$ і

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I(x'_0)-I(x'_m)}{x'_0-x'_m} = \lim_{m\to\infty}\frac{q_1q_2^m(\beta_2+\beta_2q_2+\beta_2q_2^2+\ldots)\prod_{i=1}^n q_{[2-\alpha_i]}}{-q_1q_0^m\prod_{i=1}^n q_{\alpha_i}} =$$

$$= -\lim_{m\to\infty}\left(\frac{q_2}{q_0}\right)^m\prod_{i=1}^n\frac{q_{[2-\alpha_i]}}{q_{\alpha_i}} = z_1.$$

Якщо $q_0q_2^{-2} < 1$, то $z = 0$, а $z_1 = \infty$; якщо ж $q_0q_2^{-2} > 1$, то, навпаки, $z = \infty$ і $z_1 = 0$. Оскільки $x'_0 = x_0$, то не існує похідної $I'(x_0)$.

При $\alpha_{n+1} = 2$ висновок отримаємо аналогічними міркуваннями.

Отже, функція I не має похідної в жодній Q_3-раціональній точці.

Теорему 5 доведено.

Теорема 6. *Якщо* $q_0 \neq q_2$ *і* $x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}$, *то* $I'(x_0)$ *не існує.*

Доведення. Нехай $x_k = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\underbrace{1\ldots1}_{k}(0)}$, $y_k = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\underbrace{1\ldots1}_{k}(2)}$, тоді

$$\lim_{k\to\infty}\frac{I(x_0)-I(x_k)}{x_0-x_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n](1)} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n]\underbrace{1\ldots1}_{k}(2)}}{\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)} - \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\underbrace{1\ldots1}_{k}(0)}} =$$

$$= -\lim_{k\to\infty}\frac{\beta_1+q_1\beta_1+q_1^2\beta_1+\ldots+(\beta_2+q_2\beta_2+q_2^2\beta_2+\ldots)}{\beta_1+q_1\beta_1+q_1^2\beta_1+\ldots}\,\frac{q_1^k\prod_{i=1}^n q_{[2-\alpha_i]}}{q_1^k\prod_{i=1}^n q_{\alpha_i}} =$$

$$= -\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{q_0}{1-q_1}-\frac{q_0+q_1}{1-q_2}}{\frac{q_0}{1-q_1}}\prod_{i=1}^n\frac{q_{[2-\alpha_i]}}{q_{\alpha_i}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{q_2}{q_0}\right)\prod_{i=1}^n\frac{q_{[2-\alpha_i]}}{q_{\alpha_i}}. \tag{7}$$

З іншого боку,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{I(x_0)-I(y_k)}{x_0-y_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n](1)} - \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1]\ldots[2-\alpha_n]\underbrace{1\ldots1}_{k}(0)}}{\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)} - \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\underbrace{1\ldots1}_{k}(2)}} =$$

$$= -\lim_{k\to\infty}\frac{\beta_1+q_1\beta_1+q_1^2\beta_1+\ldots}{\beta_1+q_1\beta_1+q_1^2\beta_1+\ldots-(\beta_2+q_2\beta_2+q_2^2\beta_2+\ldots)}\,\frac{q_1^k\prod_{i=1}^n q_{[2-\alpha_i]}}{q_1^k\prod_{i=1}^n q_{\alpha_i}} =$$

$$= -\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{q_0}{1-q_1}}{\frac{q_0}{1-q_1}-\frac{q_0+q_1}{1-q_2}}\prod_{i=1}^n\frac{q_{[2-\alpha_i]}}{q_{\alpha_i}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{q_0}{q_2}\right)\prod_{i=1}^n\frac{q_{[2-\alpha_i]}}{q_{\alpha_i}}. \tag{8}$$

З огляду на (7) і (8) очевидно, що при $q_0 \neq q_2$ не існує $I'(x_0)$.

Теорему 6 доведено.

Теорема 7. *Якщо існують частоти* ν_0 *і* ν_2 *цифр* 0 *та* 2 *в* Q_3*-зображенні числа* x_0*, причому* $(\nu_2(x_0)-\nu_0(x_0))(q_0-q_2)<0$*, то* $I'(x_0)$ *не існує.*

Доведення. Припустимо, що похідна $I'(x_0)$ в точці $x_0=\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ існує. Тоді, враховуючи лему 2, маємо

$$I'(x_0)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\frac{N_2(x_0,n)}{n}-\frac{N_0(x_0,n)}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\nu_2(x_0)-\nu_0(x_0)}\right)^n=\infty,$$

оскільки з умови $(\nu_2(x_0)-\nu_0(x_0))(q_0-q_2)<0$ випливає $\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\nu_2(x_0)-\nu_0(x_0)}>1.$

Отже, скінченної похідної в точці x_0 функція I не має.

Теорему 7 доведено.

5. Фрактальні властивості функції.

Теорема 8. *Інверсор* I *зберігає розмірність Хаусдорфа – Безиковича, тобто множина і її образ мають однакову розмірність тоді і тільки тоді, коли* $q_0=q_2$.

Доведення. Оскільки при $q_0=q_2$ має місце $I(x)=1-x$, то очевидно, що у цьому випадку інверсор I зберігає розмірність Хаусдорфа – Безиковича.

Розглянемо множину Безиковича – Егглстона [8]

$$E[\nu_0,\nu_1,\nu_2]=\{x:\nu_0^{Q_3}(x)=\nu_0,\nu_1^{Q_3}(x)=\nu_1,\nu_2^{Q_3}(x)=\nu_2\}$$

при $\nu_0\neq\nu_2$. В роботі [8] доведено, що її розмірність Хаусдорфа – Безиковича дорівнює

$$\alpha_0(E)=\frac{\ln\nu_0^{\nu_0}\nu_1^{\nu_1}\nu_2^{\nu_2}}{\ln q_0^{\nu_0}q_1^{\nu_1}q_2^{\nu_2}}.$$

Образом $E[\nu_0,\nu_1,\nu_2]$ під дією інверсора I є множина $E'[\nu_2,\nu_1,\nu_0]$, розмірність якої

$$\alpha_0(E')=\frac{\ln\nu_2^{\nu_2}\nu_1^{\nu_1}\nu_0^{\nu_0}}{\ln q_0^{\nu_2}q_1^{\nu_1}q_2^{\nu_0}}.$$

Очевидно, що $\alpha_0(E)=\alpha_0(E')$ при $\ln q_0^{\nu_0}q_1^{\nu_1}q_2^{\nu_2}=\ln q_0^{\nu_2}q_1^{\nu_1}q_2^{\nu_0}$, що рівносильно

$$1=\frac{q_0^{\nu_0}q_2^{\nu_2}}{q_0^{\nu_2}q_2^{\nu_0}}=\left(\frac{q_0}{q_2}\right)^{\nu_0-\nu_2}.$$

Отже, інверсор I зберігає фрактальну розмірність Хаусдорфа – Безиковича тоді і тільки тоді, коли $q_0=q_2$.

Теорему 8 доведено.

Теорема 9. *Якщо* $q_0 \neq q_2$ *і* H — *множина точок* x, *в яких не існує скінченної похідної* $I'(x)$, *то її розмірність Хаусдорфа – Безиковича задовольняє нерівність*

$$\alpha_0(H) \geq \log_{q_0 q_2} \frac{1}{4}.$$

Доведення. Нехай $q_0 > q_2$. Згідно з теоремою 5 множина Безиковича – Егглстона $E\left[\frac{1}{2} - \varepsilon; 0; \frac{1}{2} + \varepsilon\right]$ належить множині H недиференційовності функції I при довільному $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Тоді згідно з властивостями монотонності та стабільної зліченності розмірності Хаусдорфа – Безиковича [8] маємо

$$\alpha_0(H) \geq \sup_{\varepsilon} \alpha_0 \left(E\left[\frac{1}{2} - \varepsilon; 0; \frac{1}{2} + \varepsilon\right]\right) = \sup_{\varepsilon} \frac{\ln \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)} \cdot 0^0 \cdot \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}}{\ln q_0^{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)} q_1^0 q_2^{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}} = \frac{2 \ln \frac{1}{2}}{\ln q_0 q_2},$$

$$\alpha_0(H) \geq \log_{q_0 q_2} \frac{1}{4}.$$

Якщо $q_0 < q_2$, то згідно з теоремою 5 множина Безиковича – Егглстона $E\left[\frac{1}{2} + \varepsilon; 0; \frac{1}{2} - \varepsilon\right]$ належить множині H недиференційовності функції I при довільному $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ і

$$\alpha_0(H) \geq \sup_{\varepsilon} \alpha_0 \left(E\left[\frac{1}{2} + \varepsilon; 0; \frac{1}{2} - \varepsilon\right]\right) = \sup_{\varepsilon} \frac{\ln \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)} \cdot 0^0 \cdot \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}}{\ln q_0^{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)} q_1^0 q_2^{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}} = \log_{q_0 q_2} \frac{1}{4}.$$

Теорему 9 доведено.

6. Самоафінність графіка. За наслідком 1 має місце $\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots} = 1 - \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

Розглянемо функцію-перетворювач цифр $g(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n(x)$ — n-та трійкова цифра числа x, $Q'_3 = \{q'_0 = q_2; q'_1 = q_1; q'_2 = q_0\}$.

Лема 3. *Графік* $\Gamma_g = \{(x, g(x)) : x \in [0, 1]\}$ *функції* g *є самоафінною множиною.*

Доведення. Розглянемо такі афінні перетворення:

$$\varphi_0 : \begin{cases} x' = q_0 x, \\ y' = q_2 y, \end{cases} \qquad \varphi_1 : \begin{cases} x' = q_1 x + q_0, \\ y' = q_1 y + q_2, \end{cases} \qquad \varphi_2 : \begin{cases} x' = q_2 x + q_0 + q_1, \\ y' = q_0 y + q_1 + q_2. \end{cases}$$

Нехай $\Phi \equiv \varphi_0(\Gamma_g) \cup \varphi_1(\Gamma_g) \cup \varphi_2(\Gamma_g)$. Покажемо, що $\Phi \subset \Gamma_g$. Для довільної точки $M(x'_M, y'_M) \in \Phi$ існує таке i, що $M \in \varphi_i(\Gamma_g)$, тобто

$$x' = q_{\gamma(i)}x + \beta_{\gamma(i)},$$
$$y' = q_{[2-\gamma(i)]}y + 1 - \beta_{[3-\gamma(i)]},$$

де $\gamma(i) \in A_3$. Легко бачити, що $y'_M = g(x'_M)$.

Покажемо, що $\Gamma_g \subset \Phi$. Нехай $M(x, f(x)) \in \Gamma_g$, тоді $x_M = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = q_{\gamma(i)}x + \beta_{\gamma(i)}$, тобто $f(x) = y$, а отже, $M \in \Phi$.

Очевидно, що $\Phi = \Gamma_g$ і графік функції Γ_g є самоафінною множиною.

Лему 3 доведено.

Теорема 10. *Графік* $\Gamma_I = \{(x, I(x)) : x \in [0,1]\}$ *функції* I *є самоафінною множиною, а саме*

$$\Gamma_I = \bigcup_{i=0}^{2} \phi_i(\Gamma_I) \equiv \phi(\Gamma_I),$$

де ϕ_i *— афінні перетворення.*

Доведення. Побудуємо множину $\phi = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$, яка складається з трьох афінних перетворень і $\phi(\Gamma_I) = \Gamma_I$. Очевидно, що цими афінними перетвореннями є

$$\phi_0 : \begin{cases} x' = q_0 x, \\ y' = 1 - q_2 y, \end{cases} \qquad \phi_1 : \begin{cases} x' = q_1 x + q_0, \\ y' = 1 - q_1 y - q_2, \end{cases} \qquad \phi_2 : \begin{cases} x' = q_2 x + q_0 + q_1, \\ y' = 1 - q_0 y - q_1 - q_2, \end{cases}$$

тобто для $\gamma(i) \in A_3$ має місце

$$x' = q_{\gamma(i)}x + \beta_{\gamma(i)},$$
$$y' = -q_{[2-\gamma(i)]}y + \beta_{[3-\gamma(i)]}.$$

Міркуючи, як і при доведенні леми 3, отримуємо

$$\Gamma_I = \phi_0(\Gamma_I) \cup \phi_1(\Gamma_I) \cup \phi_2(\Gamma_I),$$

тобто графік функції $\Gamma_I = \{(x, I(x)) : x \in [0,1]\}$ є самоафінною множиною.

Теорему 10 доведено.

7. Інтегральні властивості.

Теорема 11. *Для інтеграла Лебега має місце рівність*

$$\int_0^1 I(x)\,dx = \frac{1 - 2q_0q_2 - (q_1+q_2)^2}{1 - 2q_0q_1 - q_1^2}.$$

Доведення. За наслідком 1 маємо

$$\int\limits_0^1 I(x)\,dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right)\,dx = 1 - \int\limits_0^1 \Delta^{Q'_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\,dx = 1 - \int\limits_0^1 g(x)\,dx. \tag{9}$$

Із адитивної властивості інтеграла Лебега, самоафінних властивостей функції і леми 3 маємо

$$\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^{q_0} g(x)\,dx + \int\limits_{q_0}^{q_0+q_1} g(x)\,dx + \int\limits_{q_0+q_1}^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^1 q_2 g(x)\,d(q_0x) +$$

$$+ \int\limits_0^1 (q_2 + q_1 g(x))d(q_1x + q_0) + \int\limits_0^1 (q_2 + q_1 + q_0 g(x))d(q_2x + q_0 + q_1) =$$

$$= q_0q_2 \int\limits_0^1 g(x)dx + q_1q_2 + q_1^2 \int\limits_0^1 g(x)dx + q_2^2 + q_1q_2 + q_0q_2 \int\limits_0^1 g(x)dx,$$

$$\left(1 - 2q_0q_2 - q_1^2\right) \int\limits_0^1 g(x)\,dx = 2q_1q_2 + q_2^2,$$

$$\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \frac{2q_1q_2 + q_2^2}{1 - 2q_0q_2 - q_1^2}.$$

Повернувшись до рівності (9), отримаємо

$$\int\limits_0^1 I(x)\,dx = 1 - \frac{2q_1q_2 + q_2^2}{1 - 2q_0q_2 - q_1^2} = \frac{1 - 2q_0q_2 - (q_1 + q_2)^2}{1 - 2q_0q_1 - q_1^2},$$

що і слід було довести.

1. *Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J.* Lüroth-type alternating series representations for real numbers // Acta arithm. — 1990. — **55**. — P. 311–322.
2. *Luroth J.* Über eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. — 1883. — **21**. — P. 411–423.
3. *Massopust P. R.* Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets. — Acad. Press, 1995. — 383 p.
4. *Жихарєва І. Ю., Працьовитий М. В.* Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи метричної теорії // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9. — С. 200–211.
5. *Кавун Н. И.* Обоснование теории вещественных чисел по способу А. Н. Колмогорова // Успехи мат. наук. — 1947. — **2**, вып. 5. — С. 119–229.
6. *Колмогоров А. Н.* К обоснованию теории вещественных чисел // Успехи мат. наук. — 1946. — **1**, вып. 1(11). — С. 217–219.

7. *Працьовита І. М., Задніпряний М. В.* Розклади чисел в ряди Сільвестера та їх застосування // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2009. — № 10. — С. 73–87.

8. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

9. *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 7. — С. 105–116.

10. *Сендов Б. Х.* Двоично-собственно-подобные фрактальные функции // Фундам. и прикл. математика. — 1999. — **5**, № 2. — С. 589–595.

11. *Стахов А. П.* Алгоритмическая теория измерения. — М.: Знание, 1979.

12. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.

Одержано 11.10.14