УДК 517.982.27+517.956.4

АНІЗОТРОПНІ ПРОСТОРИ ХЕРМАНДЕРА НА БІЧНІЙ ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРА

В. М. Лось

Нац. техн. ун-т України "КПІ"
Україна, 03056, Київ, просп. Перемоги, 37

Чернігів. нац. техн. ун-т
Україна, 14027, Чернігів, вул. Шевченка, 95

We introduce a class of anisotropic inner product Hörmander spaces on a smooth cylinder surface. These spaces do not depend on the choice of special local coordinates on the surface and can be obtained by interpolation with a function parameter between anisotropic Sobolev spaces. The spaces introduced arise naturally in the theory of parabolic differential equations.

Вводится класс анизотропных гильбертовых пространств Хермандера на гладкой боковой поверхности цилиндра. Эти пространства не зависят от выбора специальных локальных координат на поверхности и получаются интерполяцией с функциональным параметром пар анизотропных пространств Соболева. Введенные пространства естественным образом возникают в теории параболических дифференциальных уравнений.

Вступ. Теореми про коректну розв'язність початково-крайових задач для параболічних диференціальних рівнянь формулюються у термінах належності їх розв'язків певним класам анізотропних функціональних просторів. Серед них, зокрема, є простори, задані на бічній поверхні циліндра, в якому розглядається задача. Їх природно будувати за допомогою спеціальних локальних карт на поверхні, при цьому важливо, щоб отримані простори і топологія в них не залежали від вибору цих карт. Для анізотропних просторів Соболєва така побудова є відомою і дає змогу довести теореми про коректну розв'язність параболічних задач у цих просторах [1 – 7].

Широке і змістовне узагальнення просторів Соболєва було запропоноване Л. Хермандером [8]. Це простори $H^{\mu} := \mathcal{B}_{2,\mu}$. Для них показником регулярності розподілів є вагова функція μ, що залежить від кількох дуальних змінних. Такі простори (їх називають просторами узагальненої гладкості) знайшли різноманітні застосування в аналізі і теорії рівнянь з частинними похідними [8 – 19].

Так, В. А. Михайлець і О. О. Мурач [13 – 19] побудували теорію розв'язності загальних еліптичних рівнянь і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах ізотропних просторів Хермандера (коли μ є радіальною функцією). Це було зроблено на основі методу інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, зокрема соболєвських. З огляду на це виглядає перспективним застосування вказаного методу і у теорії параболічних рівнянь [20].

Метою цієї роботи є знаходження широкого класу анізотропних гільбертових просторів Хермандера, які припускають коректне означення на бічній поверхні циліндра. Вони отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар анізотропних просторів

Соболєва. Для цього класу побудова теорії розв'язності параболічних задач на основі методу інтерполяції є можливою.

1. Анізотропні простори Хермандера. Основні результати. Нехай ціле $k \geq 1$, $\mu : \mathbb{R}^k \to$ $\to (0, \infty)$ — вимірна за Борелем функція, яка задовольняє таку умову: існують додатні числа c та l такі, що $\mu(\xi)/\mu(\eta) \leq c\,(1 + |\xi - \eta|)^l$ для будь-яких $\xi, \eta \in \mathbb{R}^k$.

Розглянемо гільбертові функціональні простори $H^\mu := \mathcal{B}_{2,\mu}$, що були введені Л. Хермандером [8] (п. 2.2) та Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [21] (§ 2, 3). За означенням лінійний простір Хермандера $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є $\widehat{w}$ яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\|w\|^2_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} := \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi)|\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \tag{1}$$

(У роботі усі розподіли/функції вважаються комплекснозначними.)

Простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ є гільбертовим відносно скалярного добутку, що визначає норму (1). Він є сепарабельним, неперервно вкладеним у $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, а множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ є щільною в ньому (див. [8] (п. 2.2) або [22] (п. 10.1)).

Опишемо клас функціональних параметрів φ, які використаємо для виділення з множини просторів Хермандера H^μ потрібних нам анізотропних просторів.

Нехай множина OR складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to$ $\to (0, \infty)$, для яких існують числа $a > 1$ та $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c \quad \text{для всіх} \quad t \geq 1, \quad \lambda \in [1, a] \tag{2}$$

(взагалі, a та c залежать від φ). Ці функції називаються OR-змінними на нескінченності. Множина OR-змінних функцій була введена В. Г. Авакумовичем та достатньо повно вивчена (див., наприклад, монографії [23] (п. 1) та [24] (пп. 2.0–2.2)).

Для довільної функції $\varphi \in \mathrm{OR}$ умова (2) рівносильна такій умові: існують числа s_0, $s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, та $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1}\lambda^{s_0} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c\lambda^{s_1} \quad \text{для всіх} \quad t \geq 1, \quad \lambda \geq 1. \tag{3}$$

Позначимо

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{виконується ліва нерівність у (3)}\},$$

$$\sigma_1(\varphi) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{виконується права нерівність у (3)}\}.$$

Зрозуміло, що $-\infty < \sigma_0(\varphi) \leq \sigma_1(\varphi) < \infty$. Числа $\sigma_0(\varphi)$ та $\sigma_1(\varphi)$ дорівнюють відповідно нижньому та верхньому індексам Матушевської функції φ [24, с. 72].

Далі будемо використовувати клас функціональних параметрів

$$\{\varphi : \varphi \in \mathrm{OR}, \quad \sigma_0(\varphi) = \sigma_1(\varphi) = 0\}.$$

Важливим еталонним прикладом функцій цього класу є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\log r)^{\theta_1} (\log\log r)^{\theta_2} \ldots (\underbrace{\log \ldots \log}_{k \text{ разів}} r)^{\theta_k} \quad \text{при} \quad r \gg 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ та $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$ є довільними.

Нехай числа $s \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, ціле $k \geq 2$ і функція $\varphi \in \mathrm{OR}$ така, що її верхній та нижній індекси Матушевської дорівнюють нулю. За означенням анізотропний простір Хермандера $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k)$ — це гільбертовий простір $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, для якого показник регулярності μ має вигляд

$$\mu(\xi', \xi_k) = \left(1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma}\right)^{s/2} \varphi\left((1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}\right),$$

де $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathbb{R}$ є аргументами функції μ. Число γ є параметром анізотропії.

У важливому окремому випадку $\varphi(r) \equiv 1$ простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k)$ стає анізотропним простором Соболєва порядку $(s, s\gamma)$, позначимо його $H^{s,s\gamma}(\mathbb{R}^k)$. У загальному випадку, коли φ є довільною з означеного вище класу функціональних параметрів, виконуються неперервні та щільні вкладення

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1.$$

Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ (можливий випадок $\tau = +\infty$) і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Крім того, нехай $\Omega := G \times (0, \tau)$ — циліндр у $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня.

Означимо анізотропні простори Хермандера на бічній поверхні S циліндра Ω, використавши спеціальні локальні карти на S. Попередньо для відкритої смуги $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \tau)$ розглянемо гільбертові простори $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$. Лінійний простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$ складається, за означенням, зі звужень $u = w \restriction \Pi$ всіх розподілів $w \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ на множину Π. У цьому просторі задано норму за формулою

$$\|u\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)} := \inf\left\{\|w\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n)} : w \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n),\ u = w \restriction \Pi\right\}. \tag{4}$$

Іншими словами, $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$ є фактор-простором простору $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ по його підпростору

$$H^{s,s\gamma,\varphi}_{Q}(\mathbb{R}^n) := \left\{w \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} w \subseteq Q := \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0] \cup [\tau, \infty)\right\}. \tag{5}$$

Тому простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$ є гільбертовим. Норма (4) породжується скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)} := (w_1 - \Upsilon w_1, w_2 - \Upsilon w_2)_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n)},$$

де $w_j \in H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $w_j = u_j$ у Π для кожного $j \in \{1,\, 2\}$, Υ є ортогональним проектором простору $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ на його підпростір (5).

Виберемо довільно скінченний атлас із C^{∞}-структури на замкненому многовиді Γ. Нехай цей атлас утворений локальними картами $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, \lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ. Окрім цього довільно виберемо функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, \lambda$, такі, що $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$ і $\sum_{j=1}^{\lambda} \chi_j \equiv 1$ на Γ.

Означення. *Нехай числа $s > 0$, $\gamma > 0$ і функція $\varphi \in OR$ така, що для неї верхній та нижній індекси Матушевської дорівнюють нулю. Лінійний простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номера $j \in \{1,\ldots,\lambda\}$ функція $v_j(x,t) := \chi_j(\theta_j(x))\, v(\theta_j(x),t)$ аргументів $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0,\tau)$ належить до $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$. Формула*

$$(v,g)_{H^{s,s\gamma,\varphi}(S)} := \sum_{j=1}^{\lambda} (v_j, g_j)_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)}, \quad v,g \in H^{s,s\gamma,\varphi}(S),$$

задає скалярний добуток у просторі $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$, який стандартним чином породжує норму

$$\|v\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(S)} := \left(\sum_{j=1}^{\lambda} \|v_j\|^2_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)} \right)^{1/2}.$$

Простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ означено за допомогою спеціальних локальних карт на S

$$\theta_j^* : \Pi = \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau) \leftrightarrow \Gamma_j \times (0,\tau) \quad \text{для всіх} \quad j \in \{1,\ldots,\lambda\},$$

де $\theta_j^*(x,t) = (\theta_j(x),t)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in (0,\tau)$.

Якщо $\varphi(r) \equiv 1$, то $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболєва порядку $(s, s\gamma)$, позначимо його через $H^{s,s\gamma}(S)$. Тут s — показник регулярності функції $v = v(x,t)$ по просторовій змінній $x \in \Gamma$, а $s\gamma$ — показник регулярності по часовій змінній $t \in (0,\tau)$.

Перейдемо до формулювання основних результатів роботи.

Теорема 1. *Нехай числа $s > 0$, $\gamma > 0$, а функція $\varphi \in OR$ така, що для неї верхній та нижній індекси Матушевської дорівнюють нулю. Тоді простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ є повним (гільбертовим), сепарабельним та не залежить від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ (з точністю до еквівалентності норм).*

Нехай $0 \le s_0 < s < s_1$ і функція $\varphi \in \mathrm{OR}$ така, що $\sigma_0(\varphi) = \sigma_1(\varphi) = 0$. Розглянемо функцію

$$\psi(r) := \begin{cases} r^{(s-s_0)/(s_1-s_0)}\, \varphi(r^{1/(s_1-s_0)}) & \text{для} \quad r \ge 1, \\ \varphi(1) & \text{для} \quad 0 < r < 1. \end{cases} \tag{6}$$

Ця функція є інтерполяційним параметром [19] (теорема 2.19). Далі будемо інтерполювати пари соболєвських просторів з функціональним параметром ψ. Детальніше про метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів йдеться у наступному пункті роботи.

Теорема 2. *Нехай числа $0 \le s_0 < s < s_1$, $\gamma > 0$, функція $\varphi \in OR$ така, що для неї верхній та нижній індекси Матушевської дорівнюють нулю, а ψ — інтерполяційний параметр, заданий формулою (6). Тоді правильною є інтерполяційна формула*

$$H^{s,s\gamma,\varphi}(S) = [H^{s_0,s_0\gamma}(S), H^{s_1,s_1\gamma}(S)]_{\psi} \tag{7}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Тут права частина рівності є результатом інтерполяції вказаної пари гільбертових просторів із функціональним параметром ψ.

З інтерполяційної формули (7) випливає, що множина $C^{\infty}(\overline{S})$ є щільною у просторі $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ і виконуються неперервні та щільні вкладення

$$H^{s_1,s_1\gamma}(S) \hookrightarrow H^{s,s\gamma,\varphi}(S) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(S) \quad \text{при} \quad 0 \leq s_0 < s < s_1.$$

2. Інтерполяція з функціональним параметром. Нагадаємо означення інтерполяції з функціональним параметром у випадку загальних гільбертових просторів [19] (п. 1.1) (див. також [25] (п. 2)). Обмежимось розглядом випадку сепарабельних комплексних гільбертових просторів.

Нехай $X := [X_0, X_1]$ є впорядкованою парою сепарабельних комплексних гільбертових просторів, для яких має місце неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Таку пару називають допустимою. Для неї існує ізометричний ізоморфізм $J : X_1 \leftrightarrow X_0$ такий, що оператор J є самоспряженим додатно визначеним оператором у X_0 з областю визначення X_1. Оператор J визначається парою X однозначно і називається породжуючим оператором для X.

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. Тут через $\mathcal{B}$ позначено множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, для яких ψ є обмеженою на кожному відрізку $[a,b]$, $0 < a < b < \infty$, і $1/\psi$ є обмеженою на кожному промені $[a,\infty)$, $a > 0$.

Розглянемо оператор $\psi(J)$. Він є додатно визначеним оператором в X_0 як борелівська функція ψ від J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ (або скорочено X_ψ) область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{X_\psi} := (\psi(J)u_1, \psi(J)u_2)_{X_0}.$$

Він породжує норму $\|u\|_{X_\psi} := \|\psi(J)u\|_{X_0}$. Простір X_ψ є сепарабельним гільбертовим.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ назвемо інтерполяційним параметром, якщо для всіх допустимих пар $X = [X_0, X_1]$ та $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для довільного лінійного відображення T, заданого на X_0, справджується наступне: якщо звуження відображення T на X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$ для кожного $j \in \{0, 1\}$, то звуження відображення T на X_ψ також є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$.

Якщо ψ — інтерполяційний параметр, то будемо казати, що гільбертовий простір X_ψ отримано в результаті інтерполяції з функціональним параметром ψ пари $X = [X_0, X_1]$. В цьому випадку виконуються неперервні та щільні вкладення $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Відомо, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли ψ є псевдовгнутою в околі ∞, тобто коли існує вгнута додатна функція $\psi_1(r)$ при $r \gg 1$ така, що обидві функції ψ/ψ_1 та ψ_1/ψ є обмеженими в деякому околі ∞. Цей критерій випливає з опису Ж. Петре класу всіх інтерполяційних функцій для вагових просторів типу $L_p(\mathbb{R}^n)$ (див. [26], теорема 5.4.4). Відповідне доведення див у [19] (п. 1.1.9).

Сформулюємо дві властивості інтерполяції, які будуть використані у подальших доведеннях. Перша з них дозволяє звести інтерполяцію підпросторів або фактор-просторів до інтерполяції вихідних просторів (див. [19] (п. 1.1.6) та [27] (п. 1.17)). Зазначимо, що підпростори припускаються замкненими, і ми розглядаємо взагалі неортогональні проектори на підпростори.

Твердження 1. *Нехай* $X = [X_0, X_1]$ *є допустимою парою гільбертових просторів, а* Y_0 *є підпростором в* X_0. *Тоді* $Y_1 := X_1 \cap Y_0$ *є підпростором в* X_1. *Припустимо, що існує лінійне відображення* $P : X_0 \to X_0$, *яке для кожного* $j \in \{0, 1\}$ *є проектором простору* X_j *на його підпростір* Y_j. *Тоді пари* $[Y_0, Y_1]$ *та* $[X_0/Y_0, X_1/Y_1]$ *є допустимими і справджуються рівності*

$$[Y_0, Y_1]_\psi = X_\psi \cap Y_0,$$

$$[X_0/Y_0, X_1/Y_1]_\psi = X_\psi/(X_\psi \cap Y_0)$$

з точністю до еквівалентності норм. Тут $\psi \in \mathcal{B}$ *— довільний інтерполяційний параметр.*

Друга властивість дозволяє звести інтерполяцію прямих сум гільбертових просторів до інтерполяції їх доданків.

Твердження 2. *Нехай* $[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}]$, $j = 1, \ldots, p$, *є скінченним набором допустимих пар гільбертових просторів. Тоді*

$$\left[\bigoplus_{j=1}^{p} X_0^{(j)}, \bigoplus_{j=1}^{p} X_1^{(j)}\right]_\psi = \bigoplus_{j=1}^{p} \left[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}\right]_\psi$$

з точністю до еквівалентності норм. Тут $\psi \in \mathcal{B}$ *— довільний інтерполяційний параметр.*

3. Доведення. Почнемо із встановлення інтерполяційної формули (7). Для цього отримаємо подібні до (7) інтерполяційні формули для просторів $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k)$ та $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$, сформулювавши відповідні результати у вигляді лем.

Лема 1. *Нехай дійсні числа* $s_0 < s < s_1$, $\gamma > 0$, *натуральне* $k \geq 2$, *функція* $\varphi \in \in OR$ *така, що для неї верхній та нижній індекси Матушевської дорівнюють нулю, а* ψ *— інтерполяційний параметр, заданий формулою (6). Тоді справджується інтерполяційна формула*

$$H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k) = \left[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)\right]_\psi \tag{8}$$

з рівністю норм.

Доведення. Позначимо для зручності

$$r_\gamma(\xi', \xi_k) := \left(1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma}\right)^{1/2} \quad \text{для будь-яких} \quad \xi' \in \mathbb{R}^{k-1}, \quad \xi_k \in \mathbb{R}.$$

Пара анізотропних просторів Соболєва $X = \left[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)\right]$ є допустимою. Породжуючий оператор для цієї пари задається формулою

$$J : w \mapsto \mathcal{F}^{-1}[r_\gamma^{s_1-s_0}\, \mathcal{F}w] \quad \text{з} \quad w \in H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k).$$

Це безпосередньо випливає з означення цих просторів. Тут через $\mathcal{F}$ (та $\mathcal{F}^{-1}$) позначено оператори прямого (та оберненого) перетворення Фур'є (за всіма змінними) повільно зростаючих розподілів, заданих на $\mathbb{R}^k$. Оператор J за допомогою перетворення Фур'є зводиться до оператора множення на функцію $r_\gamma^{s_1-s_0}$ і встановлює ізометричний ізоморфізм $\mathcal{F}\ :\ H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k)\ \leftrightarrow\ L_2\left(\mathbb{R}^k, r_\gamma^{2s_0}(\xi',\xi_k)d\xi' d\xi_k\right)$. Тому $\mathcal{F}$ зводить $\psi(J)$ до оператора множення на функцію

$$\psi(r_\gamma^{s_1-s_0}(\xi',\xi_k)) \equiv r_\gamma^{s-s_0}(\xi',\xi_k)\,\varphi(r_\gamma(\xi',\xi_k)).$$

Тепер для кожного $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ можна записати наступне:

$$\|w\|^2_{X_\psi} = \|\psi(J)w\|^2_{H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k)} = \int\limits_{\mathbb{R}^k} |\psi(r_\gamma^{s_1-s_0}(\xi',\xi_k))\,(\mathcal{F}w)(\xi',\xi_k)|^2\, r_\gamma^{2s_0}(\xi',\xi_k)d\xi' d\xi_k =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^k} r_\gamma^{2s}(\xi',\xi_k)\,\varphi^2(r_\gamma(\xi',\xi_k))\,|(\mathcal{F}w)(\xi',\xi_k)|^2\, d\xi' d\xi_k = \|w\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k)}.$$

З цього випливає рівність просторів (8), оскільки в них обох є щільною множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$. Зазначимо, що $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ є щільною в іншому просторі, позначеному як X_ψ, тому що $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ є щільною у просторі $H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)$, який неперервно та щільно вкладений в X_ψ.

Лему доведено.

У випадку $\varphi(r) \equiv 1$ простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$, як і простори $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k)$ та $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$, стає анізотропним простором Соболєва, будемо його позначати $H^{s,s\gamma}(\Pi)$.

Лема 2. *Нехай дійсні числа* $0 \le s_0 < s < s_1$, $\gamma > 0$, *функція* $\varphi \in OR$ *така, що для неї верхній та нижній індекси Матушевської дорівнюють нулю, а* ψ — *інтерполяційний параметр, заданий формулою (6). Тоді справджується інтерполяційна формула*

$$H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi) = \left[H^{s_0,s_0\gamma}(\Pi), H^{s_1,s_1\gamma}(\Pi)\right]_\psi \tag{9}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення. Як зазначалось у п. 1, простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$ є фактор-простором простору $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ по його підпростору $H_Q^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ (5). Для виведення (9) з (8) побудуємо проектор P кожного простору $H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \{0,1\}$, на його підпростір $H_Q^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^n)$.

Існує лінійний обмежений оператор продовження (див. [28], п. 9.6) $T_\Pi\ :\ L_2(\Pi) \to \to L_2(\mathbb{R}^n)$, звуження якого на $H^{\sigma,\sigma\gamma}(\Pi)$ визначає обмежений оператор

$$T_\Pi : H^{\sigma,\sigma\gamma}(\Pi) \to H^{\sigma,\sigma\gamma}(\mathbb{R}^n)$$

для довільних натуральних σ і $\sigma\gamma$. Виходячи з цього, припустимо додатково, що всі s_0, s_1, $s_0\gamma$ та $s_1\gamma$ є цілими невід'ємними числами. Розглянемо відображення $P\ :\ w \mapsto w - -T_\Pi(w \restriction \Pi)$ з $w \in H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^n)$. Оператор P є проектором. Дійсно, P є лінійним обмеженим оператором на $H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^n)$ для кожного $j \in \{0,1\}$. Більш того, якщо $w = 0$ в Π, то $T_\Pi(w \restriction \Pi) = 0$ в $\mathbb{R}^n$. Тому $Pw = w$ для кожної $w \in H_Q^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^n)$.

Оскільки проектор P задано, ми можемо використати твердження 1 та формулу (8) з $k := n$ і записати

$$[H^{s_0,s_0\gamma}(\Pi), H^{s_1,s_1\gamma}(\Pi)]_\psi = \Big[H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^n)/H_Q^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^n), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^n)/H_Q^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^n)\Big]_\psi =$$

$$= [H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^n), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^n)]_\psi \Big/ \Big([H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^n), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^n)]_\psi \cap H_Q^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^n)\Big) =$$

$$= H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n)/\Big(H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n) \cap H_Q^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^n)\Big) = H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n)/H_Q^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^n) = H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$$

з точністю до еквівалентності норм.

Лему 2 встановлено при додатковому припущенні, що всі s_0, s_1, $s_0\gamma$ та $s_1\gamma$ є цілими невід'ємними числами. Для зняття цього обмеження поширимо дію оператора T_Π на простори $H^{\sigma,\sigma\gamma}(\Pi)$ з довільним дійсним $0 \leq \sigma \leq p$, де довільне $p > 0$.

Нехай число $k_1 \in \mathbb{N}$ таке, що $k_1 \geq p$ і $k_1\gamma \in \mathbb{N}$. Розглянемо оператори T_Π з $\sigma = 0$ та $\sigma = k_1$. Оскільки ψ є інтерполяційним параметром, то з цього випливає обмеженість оператора

$$T_\Pi : \Big[L_2(\Pi), H^{k_1,k_1\gamma}(\Pi)\Big]_\psi \to \Big[L_2(\mathbb{R}^n), H^{k_1,k_1\gamma}(\mathbb{R}^n)\Big]_\psi. \tag{10}$$

Покладемо у рівностях (8) та (9) $\varphi = 1$, $s_0 = 0$, $s = \sigma$, $s_1 = k_1$, $k = n$. Тоді з них та з (10) маємо для довільних дійсних $\sigma \in (0, k_1)$ лінійний обмежений оператор

$$T_\Pi : H^{\sigma,\sigma\gamma}(\Pi) \to H^{\sigma,\sigma\gamma}(\mathbb{R}^n). \tag{11}$$

Для завершення доведення леми достатньо повторити частину її доведення, починаючи з побудови проектора P, і скористатися при цьому оператором продовження (11) для $p \geq s_1$.

Лему доведено.

Доведення теореми 2. Тепер виведемо (7) із (9) відомим способом „розпрямлення" та „склеювання" многовиду S. Для зручності позначимо $\chi_j^*(x,t) \equiv \chi_j(x)$, де $x \in \Gamma$, $t \in (0,\tau)$, $j \in \{1,\ldots,\lambda\}$. За означенням простору $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ лінійне відображення „розпрямлення"

$$T : v \mapsto (\,(\chi_1^* v)\circ\theta_1^*, \ldots, (\chi_\lambda^* v)\circ\theta_\lambda^*), \quad v \in L_2(S),$$

визначає ізометричні оператори

$$T : H^{s_j,s_j\gamma}(S) \to (H^{s_j,s_j\gamma}(\Pi))^\lambda, \quad j \in \{0,1\}, \tag{12}$$

$$T : H^{s,s\gamma,\varphi}(S) \to (H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi))^\lambda. \tag{13}$$

Оскільки ψ є інтерполяційним параметром, то з обмеженості операторів (12) випливає існування обмеженого оператора

$$T : [H^{s_0,s_0\gamma}(S), H^{s_1,s_1\gamma}(S)]_\psi \to \Big[(H^{s_0,s_0\gamma}(\Pi))^\lambda, (H^{s_1,s_1\gamma}(\Pi))^\lambda\Big]_\psi. \tag{14}$$

З твердження 2 та формули (9) випливають наступні рівності просторів з еквівалентністю норм у них:

$$\left[(H^{s_0,s_0\gamma}(\Pi))^\lambda, (H^{s_1,s_1\gamma}(\Pi))^\lambda\right]_\psi = \left([H^{s_0,s_0\gamma}(\Pi), H^{s_1,s_1\gamma}(\Pi)]_\psi\right)^\lambda = (H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi))^\lambda. \qquad (15)$$

Отже, обмеженість оператора (14) означає обмеженість оператора

$$T : [H^{s_0,s_0\gamma}(S), H^{s_1,s_1\gamma}(S)]_\psi \to (H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi))^\lambda. \qquad (16)$$

Побудуємо далі для T лівий обернений оператор „склеювання” K. Для кожного номера $j = 1, \ldots, \lambda$ візьмемо функцію $\eta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ таку, що $\eta_j = 1$ на множині $\theta_j^{-1}(\mathrm{supp}\chi_j)$. Визначимо функції $\eta_j^*(x,t) \equiv \eta_j(x)$ аргументів $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ та $t \in (0,\tau)$ для всіх $j = 1, \ldots, \lambda$. Розглянемо лінійне відображення

$$K : (h_1, \ldots, h_\lambda) \mapsto \sum_{j=1}^{\lambda} \Theta_j \left((\eta_j^* h_j) \circ \theta_j^{*-1}\right), \quad h_1, \ldots, h_\lambda \in L_2(\Pi).$$

Тут $(\eta_j^* h_j) \circ \theta_j^{*-1}$ — такий розподіл, заданий у відкритій множині $\Gamma_j \times (0,\tau) \subseteq S$, що його представник у локальній карті θ_j^* має вигляд $\eta_j^* h_j$; Θ_j — оператор продовження нулем з $\Gamma_j \times (0,\tau)$ на многовид S. Оператор Θ_j коректно визначений на розподілах, носій яких лежить в $\Gamma_j \times (0,\tau)$. Згідно з вибором функцій χ_j^*, η_j^* маємо

$$KTv = \sum_{j=1}^{\lambda} \Theta_j \left((\eta_j^*((\chi_j^* v) \circ \theta_j^*)) \circ \theta_j^{*-1}\right) = \sum_{j=1}^{\lambda} \Theta_j \left((\chi_j^* v) \circ \theta_j^* \circ \theta_j^{*-1}\right) = \sum_{j=1}^{\lambda} \chi_j^* v = v,$$

тобто

$$KTv = v \quad \text{для будь-якої} \quad v \in L_2(S). \qquad (17)$$

Покажемо, що лінійне відображення K визначає обмежений оператор

$$K : (H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi))^\lambda \to H^{s,s\gamma,\varphi}(S). \qquad (18)$$

Для довільного вектора $h = (h_1, \ldots, h_\lambda) \in (H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi))^\lambda$ запишемо

$$\|Kh\|^2_{H^{s,s\gamma,\varphi}(S)} = \sum_{l=1}^{\lambda} \|(\chi_l^* Kh) \circ \theta_l^*\|^2_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\lambda} \left\| \left(\chi_l^* \sum_{j=1}^{\lambda} \Theta_j \left((\eta_j^* h_j) \circ \theta_j^{*-1}\right)\right) \circ \theta_l^* \right\|^2_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{\lambda} \left\| \sum_{j=1}^{\lambda} \left(\left(\chi_l^* \circ \theta_j^* \right) \eta_j^* \, h_j \right) \circ \beta_{j,l}^* \right\|^2_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)} \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{\lambda} \left(\sum_{j=1}^{\lambda} \left\| \left(\left(\chi_l^* \circ \theta_j^* \right) \eta_j^* \, h_j \right) \circ \beta_{j,l}^* \right\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)} \right)^2 . \qquad (19)$$

Тут $(\chi_l^* \circ \theta_j^*)\eta_j^*$ належить класу $C^\infty(\overline{\Pi})$ фінітно, а $\beta_{j,l}^* : \overline{\Pi} \leftrightarrow \overline{\Pi}$ є C^∞ — дифеоморфізмом, що означений так: $\beta_{j,l}^*(x,t) = (\beta_{j,l}(x), t)$, де $\beta_{j,l} = \theta_j^{-1} \circ \theta_l$ в околі множини $\operatorname{supp}(\chi_l \circ \theta_j)\eta_j$ і $\beta_{j,l}(x) = x$ для всіх достатньо великих за модулем $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. Як відомо [1] (п.1, § 4, 5), оператор заміни змінних $u \mapsto u \circ \beta_{j,l}^*$ і оператор множення на фінітну функцію класу $C^\infty(\overline{\Pi})$ є обмеженими у кожному просторі $H^{\sigma,\sigma\gamma}(\Pi)$, де $\sigma \geq 0$. Тому лінійний оператор $w \mapsto ((\chi_l^* \circ \theta_j^*)\eta_j^* \, w) \circ \beta_{j,l}^*$ є обмеженим у просторі $H^{\sigma,\sigma\gamma}(\Pi)$. Звідси та з інтерполяційної формули (9) випливає його обмеженість у просторі $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$. Отже, з нерівності (19) випливає нерівність

$$\|Kh\|^2_{H^{s,s\gamma,\varphi}(S)} \leq c \sum_{j=1}^{\lambda} \|h_j\|^2_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)},$$

де число $c > 0$ не залежить від вектора $h = (h_1, \ldots, h_\lambda)$. Таким чином, оператор (18) є обмеженим для всіх $s > 0$ та всіх визначених умовою теореми φ. З наведених міркувань випливає обмеженість оператора (18) і у випадку $s = 0$, $\varphi = 1$.

Отже, будуть обмеженими оператори $K : (H^{s_j,s_j\gamma}(\Pi))^\lambda \to H^{s_j,s_j\gamma}(S)$, де $j \in \{0;1\}$. Застосувавши тут інтерполяцію з параметром ψ, завдяки рівності (15) отримаємо існування обмеженого оператора

$$K : (H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi))^\lambda \to [H^{s_0,s_0\gamma}(S), H^{s_1,s_1\gamma}(S)]_\psi . \qquad (20)$$

Тепер із формул (13), (20) та (17) випливає, що тотожний оператор KT здійснює неперервне вкладення простору $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ в інтерполяційний простір $[H^{s_0,s_0\gamma}(S), H^{s_1,s_1\gamma}(S)]_\psi$. А з формул (14), (15) та (18) випливає, що той же оператор KT здійснює обернене неперервне вкладення.

Теорему 2 доведено.

Доведення теореми 1. Простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ є повним та сепарабельним, як результат інтерполяції (див. (7) та п. 2) гільбертових соболєвських просторів. Покажемо, що простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ не залежить від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ (з точністю до еквівалентності норм). Позначимо через $\mathcal{A}_1$ та $\mathcal{A}_2$ два способи вибору локальних карт і розбиттів одиниці на Γ. Побудовані за ними простори Хермандера та Соболєва позначимо відповідно через $H^{s,s\gamma,\varphi}(S, \mathcal{A}_j)$ та $H^{\sigma,\sigma\gamma}(S, \mathcal{A}_j)$, де $j \in \{1,2\}$, число $\sigma \geq 0$. Для просторів Соболєва тотожний оператор визначає ізоморфізм просторів

$$I : H^{\sigma,\sigma\gamma}(S, \mathcal{A}_1) \leftrightarrow H^{\sigma,\sigma\gamma}(S, \mathcal{A}_2). \qquad (21)$$

Виберемо такі числа s_0 і s_1, що $0 \leq s_0 < s < s_1$. Візьмемо у (21) $\sigma = s_0$ та $\sigma = s_1$ і застосуємо інтерполяцію з функціональним параметром (6). Отримаємо ще один ізоморфізм просторів

$$I\,:\,[H^{s_0,s_0\gamma}(S,\mathcal{A}_1),H^{s_1,s_1\gamma}(S,\mathcal{A}_1)]_\psi\leftrightarrow[H^{s_0,s_0\gamma}(S,\mathcal{A}_2),H^{s_1,s_1\gamma}(S,\mathcal{A}_2)]_\psi\,, \qquad (22)$$

який завдяки (7) набирає вигляду

$$I\,:\,H^{s,s\gamma,\varphi}(S,\mathcal{A}_1)\leftrightarrow H^{s,s\gamma,\varphi}(S,\mathcal{A}_2). \qquad (23)$$

Наявність ізоморфізму (23) гарантує незалежність означення простору $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Г.

Теорему 1 доведено.

1. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та. — 1958. — **197**. — С. 54 – 112.
2. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. — 1964. — **19**, № 3. — С. 53 – 161.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. — 736 с.
4. *Lions J.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary-value problems and applications. — Berlin: Springer, 1972. — Vol. II. — xi+242 p.
5. *Eidel'man S. D., Zhitarashu N. V.* Parabolic boundary value problems // Operator Theory: Adv. and Appl. — 1998. — **101**. — xii+298 p.
6. *Eidel'man S. D.* Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial Different. Equat. VI. – Berlin: Springer, 1994. — P. 205 – 316.
7. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. — Киев: Вища шк., 1990. — 200 с.
8. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. — Berlin: Springer, 1963. — 285 p. (Рус. перевод: *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965. — 380 с.)
9. *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости // Теория функциональных пространств / Под ред. Х. Трибеля. — М.: Мир, 1986. — С. 381 – 415.
10. *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem. — Berlin: Wiley-VCH, 2000. — 348 p.
11. *Triebel H.* The structure of functions. — Basel: Birkhäuser, 2001. — xii+425 p.
12. *Nicola F., Rodino L.* Global pseudodifferential calculas on Euclidean spaces. — Basel: Birkhäuser, 2010. — xi+306 p.
13. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scale of spaces and elliptic boundary-value problems. II // Ukr. Math. J. — 2006. — **58**, № 3. — P. 398 – 417.
14. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces and elliptic boundary-value problems. III // Ukr. Math. J. — 2007. — **59**, № 5. — P. 744 – 765.
15. *Murach A. A.* Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold // Ukr. Math. J. — 2007. — **59**, № 6. — P. 874 – 893.
16. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. J. — 2008. — **60**, № 4. — P. 574 – 597.
17. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. — 372 с. (Доступно как arXiv: 1106.3214.)
18. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. — 2012. — **6**, № 2. — P. 211 – 281.

19. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. — Berlin: De Gruyter, 2014. — xii+297 p.

20. *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter // Methods Funct. Anal. and Top. — 2013. — **19**, № 2. — P. 146–160.

21. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. — 1965. — **20**, № 1. — С. 3–74.

22. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators. II: Differential operators with constant coefficients. — Berlin: Springer, 1983. — viii+391 p. (Рус. перевод: *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. — М.: Мир, 1986. — Т. 2. — 456 с.)

23. *Seneta E.* Regularly varying functions. — Berlin: Springer, 1976. — 112 p. (Рус. перевод: *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.)

24. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. — 512 p.

25. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Methods Funct. Anal. and Top. — 2008. — **14**, № 1. — P. 81–100.

26. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces // Grundlehren math. Wiss. — Berlin: Springer, 1976. — **223**.

27. *Triebel H.* Interpolation theory, function spaces, differential operators. — 2-nd ed. — Heidelberg: Johann Ambrosius Barth, 1995.

28. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975. — 480 с.

Одержано 04.11.14