УДК 517.93; 519.711

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО ИЗМЕРЯЕМОМУ ВЫХОДУ И ОЦЕНКА УРОВНЯ ГАШЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

А. Г. Мазко, С. Н. Кусий

Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601, Украина
e-mail: mazko@imath.kiev.ua

We find new criteria for output stabilization in linear control systems by using static and dynamic controls. We show that the stabilization algorithms derived from the criteria can be applied to a certain class of nonlinear control systems. We propose algorithms for constructing controls that give a needed estimate for weighted level of input signal attenuation. The obtained results are illustrated with an example of stabilizing a system of a one-link robot manipulator.

Отримано нові критерії стабілізовності по виходу лінійних систем керування за допомогою статичних та динамічних регуляторів. Показано, що алгоритми стабілізації, які випливають із даних критеріїв, можуть бути застосовані до деякого класу нелінійних систем керування. Запропоновано алгоритми побудови законів керування, що забезпечують задану оцінку зваженого рівня погашення вхідних сигналів. Отримані результати продемонстровано на прикладі системи стабілізації одноланкового робота-маніпулятора.

1. Введение. Задача стабилизации динамических систем является одной из главных задач теории управления. Для класса линейных систем управления со статической обратной связью по выходу

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{1}$$

$$u = Ky, \tag{2}$$

данная задача состоит в нахождении матрицы коэффициентов усиления K, для которой замкнутая система асимптотически устойчива. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления и измеряемого выхода системы, а A, B, C и D — матрицы подходящих размеров. Полное решение этой важной задачи известно лишь в некоторых частных случаях (см. обзорные работы [1, 2]). Отметим, что ряд известных алгоритмов стабилизации систем сводится к решению линейных матричных неравенств (ЛМН) с применением эффективных средств LMI Toolbox компьютерной системы Matlab (см., например, [3 – 5]).

Если стабилизирующую статическую обратную связь построить не удается, то изучается возможность стабилизации системы (1) с помощью динамического регулятора порядка $r \leq n$ вида

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \tag{3}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^r$ — вектор состояния регулятора, Z, V, U и K — неизвестные матрицы подходящих размеров.

В данной статье предлагаются новые критерии стабилизируемости линейной системы (1) с помощью статической и динамической обратных связей, а также способы построения регуляторов, обеспечивающих асимптотическую устойчивость состояния $x \equiv \equiv 0$ класса нелинейных систем

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad y = C(x)x + Du, \tag{4}$$

где $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ — матричные функции, непрерывные в окрестности точки $x = 0$. При этом предполагается, что $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ — матрицы полного ранга $m < < n$ и $l < n$ соответственно. Для класса линейных систем (1) предлагаются алгоритмы построения законов управления вида (2) и (3), которые обеспечивают оценку некоторого критерия качества, описывающего взвешенный уровень гашения входных сигналов, а также робастную стабилизацию относительно заданного множества неопределенностей. Используемый критерий качества является аналогом H_∞-нормы передаточной матричной функции $H(\lambda)$ рассматриваемой системы управления.

Будем использовать следующие обозначения: I_n — единичная матрица порядка n; $0_{n\times m}$ — нулевая матрица размеров $n \times m$; $X = X^T > 0$ (≥ 0) — положительно (неотрицательно) определенная симметричная матрица X; $\mathrm{i}(X) = \{i_+, i_-, i_0\}$ — инерция эрмитовой матрицы X, которую составляют количества ее положительных, отрицательных и нулевых собственных значений с учетом кратностей; $\lambda_{\max}(X)$ $(\lambda_{\min}(X))$ — максимальное (минимальное) собственное значение эрмитовой матрицы X; A^+ — псевдообратная матрица; $\|x\|$ — евклидова норма вектора x; $W_L \in \mathbb{R}^{n\times n-\operatorname{rank} L}$ — матрица, столбцы которой составляют базис ядра матрицы $L \in \mathbb{R}^{l\times n}$; $B^\perp$ $(C^\perp)$ — ортогональное дополнение матрицы $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $(C \in \mathbb{R}^{l\times n})$ полного ранга m (l), определяемое соотношениями $B^TB^\perp = 0$, $\det\left[B, B^\perp\right] \neq 0$ $(C^\perp C^T = 0, \det\left[C^T, C^{\perp T}\right] \neq 0)$.

2. Статическая стабилизация по выходу. Сначала рассмотрим линейную систему (1) с обратной связью (2). Если матрица коэффициентов усиления K принадлежит множеству $\mathcal{K}_D = \{K : \det(I_m - KD) \neq 0\}$, то замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A + B\mathcal{D}(K)C. \tag{5}$$

Нелинейный оператор $\mathcal{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$ имеет следующие свойства [6]:

1) если $K \in \mathcal{K}_D$, то $\mathcal{D}(K) \equiv K(I_l - DK)^{-1}$ и $I_l + D\mathcal{D}(K) \equiv (I_l - DK)^{-1}$;

2) если $K_1 \in \mathcal{K}_D$ и $K_2 \in \mathcal{K}_{D_1}$, то $\mathcal{D}(K_1 + K_2) = \mathcal{D}(K_1) + (I_m - K_1D)^{-1}\mathcal{D}_1(K_2)\,(I_l - -DK_1)^{-1}$ и $K_1 + K_2 \in \mathcal{K}_D$, где $D_1 = (I_l - DK_1)^{-1}D$, $\mathcal{D}_1(K_2) = (I_m - K_2D_1)^{-1}K_2$;

3) если $-K_0 \in \mathcal{K}_D$, то $K = -\mathcal{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D$ и $\mathcal{D}(K) = K_0$.

Через $n_\alpha^-(M)$, $n_\alpha^+(M)$ и $n_\alpha^0(M)$ обозначим количества собственных значений матрицы $M = A + BK_0C$ с учетом кратностей, принадлежащих соответствующим множествам $\mathbb{C}_\alpha^- = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda + \alpha < 0\}$, $\mathbb{C}_\alpha^+ = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda + \alpha > 0\}$ и $\mathbb{C}_\alpha^0 = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda + \alpha = 0\}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Если $n_\alpha^-(M) = n$, то при $\alpha \geq 0$ система (5) имеет спектральный запас устойчивости α.

Лемма 1. *Существует матрица K_0, для которой*

$$n_\alpha^-(M) = p, \quad n_\alpha^+(M) = q, \quad n_\alpha^0(M) = 0, \tag{6}$$

в том и только в том случае, когда разрешима относительно X система соотношений

$$B^{\perp T}(AX + XA^T + 2\alpha X)\,B^\perp < 0, \tag{7}$$

$$\mathrm{i}(X) = \{p, q, 0\}, \quad X = X^T, \tag{8}$$

$$\mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} AX + XA^T + 2\alpha X & XC^T \\ CX & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

При выполнении условий (7) – (9) матрица K_0, обеспечивающая условия (6), может быть определена как решение ЛМН

$$AX + XA^T + 2\alpha X + BK_0CX + XC^TK_0^TB^T < 0. \tag{10}$$

Доказательство. Согласно теореме инерции [7] равенства (6) эквивалентны совместности системы соотношений (8) и (10) относительно X. В [6] показано, что нахождение матрицы X, удовлетворяющей данной системе, сводится к решению матричного неравенства (7) при условиях

$$\mathrm{i}(H) = \{l, m, 0\}, \quad H = \begin{bmatrix} B^+(L - LRL)B^{+T} & B^+(I_n - LR)XC^T \\ CX(I_n - RL)B^{+T} & -CXRXC^T \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где $L = AX + XA^T + 2\alpha X$, $R = B^\perp S^{-1}B^{\perp T}$, $S = B^{\perp T}LB^\perp$. Блочная матрица H представляется в виде $H = \widehat{H}_0 - \widehat{H}_1^T\widehat{H}_2^{-1}\widehat{H}_1$, где

$$\widehat{H} = \begin{bmatrix} \widehat{H}_0 & \widehat{H}_1^T \\ \widehat{H}_1 & \widehat{H}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} B^+LB^{+T} & B^+XC^T & B^+LB^\perp \\ CXB^{+T} & 0 & CXB^\perp \\ \hline B^{\perp T}LB^{+T} & B^{\perp T}XC^T & S \end{array}\right] = W\Delta W^T, \quad W = \begin{bmatrix} B^+ & 0 \\ 0 & I_l \\ B^{\perp T} & 0 \end{bmatrix}.$$

Применяя известные формулы для вычисления индексов инерции блочной матрицы [8, с. 147] и учитывая, что $\widehat{H}_2 = S < 0$, имеем

$$\mathrm{i}_+(\widehat{H}) = \mathrm{i}_+(\widehat{H}_2) + \mathrm{i}_+(H) = \mathrm{i}_+(H), \quad \mathrm{i}_-(\widehat{H}) = \mathrm{i}_-(\widehat{H}_2) + \mathrm{i}_-(H) = \mathrm{i}_-(H) + n - m.$$

Поскольку $W \in \mathbb{R}^{n+l\times n+l}$ — квадратная невырожденная матрица, то $\mathrm{i}(\widehat{H}) = \mathrm{i}(\Delta)$. Следовательно, соотношения (9) и (11) при условиях (7) и (8) эквивалентны.

Лемма доказана.

На открытом множестве решений матричного неравенства (10) всегда можно выбрать матрицу K_0 так, чтобы $-K_0 \in \mathcal{K}_D$. При этом $M = A + BK_0C$ является матрицей замкнутой системы (5) (см. свойство 3) оператора $\mathcal{D}(K)$). Поэтому из леммы 1 вытекает следующий критерий стабилизируемости системы (1).

Теорема 1. *Линейная система (1) стабилизируема со спектральным запасом устойчивости $\alpha \geq 0$ с помощью статической обратной связи (2) в том и только в том случае, когда существует матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая соотношениям (7) и (9). При этом стабилизирующая матрица обратной связи может быть определена в виде*

$$K = -\mathcal{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D, \tag{12}$$

где K_0 — решение ЛМН (10).

Замечание 1. Условия (8) и (9) эквивалентны матричному неравенству

$$C^{\perp}(A^TY + YA + 2\alpha Y)\, C^{\perp T} < 0, \tag{13}$$

где $Y = X^{-1}$. Действительно, вычисляя индексы инерции блочной матрицы

$$\Delta_1 = W_1^T \Delta W_1 = \left[\begin{array}{c|cc} C^{\perp}L_1C^{\perp T} & 0 & C^{\perp}L_1C^{+} \\ \hline 0 & 0 & I_l \\ C^{+T}L_1C^{\perp T} & I_l & C^{+T}L_1C^{+} \end{array}\right],$$

где

$$L_1 = A^TY + YA + 2\alpha Y, \quad W_1 = \begin{bmatrix} YC^{\perp T} & 0 & YC^{+} \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+l\times n+l}, \quad \det W_1 \neq 0,$$

получаем $\mathrm{i}_{\pm}(\Delta_1) = \mathrm{i}_{\pm}(C^{\perp}L_1C^{\perp T}) + l = \mathrm{i}_{\pm}(\Delta)$ (см. [8, с. 147]). Поэтому равенства (6) возможны лишь при условиях (7) и (13). Как следствие, критерий стабилизируемости системы (1) управлением (2) в теореме 1 сводится к совместности двух ЛМН (7) и (13) относительно взаимно обратных положительно определенных матриц X и Y (см. также [4]).

Теорема 2. *Пусть для некоторой матрицы $X = X^T > 0$ и некоторого $\alpha \geq 0$ выполняются ЛМН*

$$B_0^{\perp T}(A_0X + XA_0^T + 2\alpha X)B_0^{\perp} < 0 \tag{14}$$

и одно из соотношений

$$\mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\}, \quad C_0^{\perp}(A_0^TY + YA_0 + 2\alpha Y)\, C_0^{\perp T} < 0, \tag{15}$$

где

$$A_0 = A(0), \quad B_0 = B(0), \quad C_0 = C(0), \quad Y = X^{-1}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} A_0X + XA_0^T + 2\alpha X & XC_0^T \\ C_0X & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда статический регулятор (2) с матрицей (12), где K_0 — решение ЛМН

$$A_0X + XA_0^T + 2\alpha X + B_0K_0C_0X + XC_0^TK_0^TB_0^T < 0, \tag{16}$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния $x \equiv 0$ нелинейной системы (4) и квадратичную функцию Ляпунова $v(x) = x^TYx$.

Доказательство. Условия (14) и (15) обеспечивают разрешимость линейного матричного неравенства (16) относительно K_0. При этом в силу непрерывности матричных функций $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ для некоторого $h > 0$ выполняются соотношения

$$M(x)X + XM^T(x) + 2\alpha X < 0, \quad \dot{v}(x) < -2\alpha\, v(x) \leq 0, \quad x \in \mathcal{S}_0,$$

где $M(x) = A(x) + B(x)K_0C(x)$, $\mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| < h\}$, $\dot{v}(x)$ — производная функции $v(x)$ в силу замкнутой системы (4), (2), (12). Поэтому теорема 2 является следствием теоремы 1 и теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [9]. При этом $-K_0 \in \mathcal{K}_D$, $K \in \in \mathcal{K}_D$, $\mathcal{D}(K) = K_0$ и спектр матрицы $M(x)$ расположен в полуплоскости $\mathbb{C}_\alpha^-$ при $x \in \mathcal{S}_0$.

Теорема доказана.

Замечание 2. В теоремах 1 и 2 матрица стабилизирующей обратной связи K определяется в результате решения соответствующих ЛМН (10) и (16). При дополнительных ограничениях размеры решаемых матричных неравенств можно уменьшить. Так, если на множестве решений ЛМН (7) удается найти такую матрицу X, что $C^\perp X^{-1} B = 0$, то при достаточно большом $\gamma > 0$ матрица обратной связи (12), где $-K_0 = \gamma B^T X^{-1} C^+ \in \mathcal{K}_D$, обеспечивает асимптотическую устойчивость со спектральным запасом α замкнутой системы (5). При этом достаточно взять $\gamma > \lambda_{\max}(H_0)/2$, где $H_0 = B^+(L - LRL)B^{+T}$ [6].

3. Динамические регуляторы. Система управления (1) с динамической обратной связью (3) порядка $r \neq 0$ эквивалентна системе управления со статической обратной связью в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{n+r}$:

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}\widehat{u}, \quad \widehat{y} = \widehat{C}\widehat{x} + \widehat{D}\widehat{u}, \quad \widehat{u} = \widehat{K}\widehat{y}, \tag{17}$$

где

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{y} = \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} B & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{D} = \begin{bmatrix} D & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}.$$

Для матричных коэффициентов $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$ полного ранга имеем выражения ортогональных дополнений и псевдообратных матриц:

$$\widehat{B}^\perp = \begin{bmatrix} B^\perp \\ 0_{r\times(n-m)} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}^+ = \begin{bmatrix} B^+ & 0_{m\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{C}^\perp = \left[C^\perp, 0_{(n-l)\times r}\right], \quad \widehat{C}^+ = \begin{bmatrix} C^+ & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times l} & I_r \end{bmatrix}.$$

При условии $K \in \mathcal{K}_D$ замкнутая система (17) представляется в виде

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\,\widehat{x}, \quad \widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{\mathcal{D}}(\widehat{K})\widehat{C}, \tag{18}$$

где

$$\widehat{M} = \left[\begin{array}{c|c} M & B(I_m - KD)^{-1}U \\ \hline V(I_l - DK)^{-1}C & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{array}\right], \quad M = A + B\mathcal{D}(K)C.$$

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) существует динамический регулятор (3) порядка $r \leq n$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость замкнутой системы (18) со спектральным запасом $\alpha \geq 0$;

2) существуют матрицы X и X_0, удовлетворяющие соотношениям (7) и

$$\mathrm{i}(\Delta_0) = \{l, n, 0\}, \quad X \geq X_0 > 0, \quad \mathrm{rank}\,(X - X_0) \leq r, \tag{19}$$

где

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} AX_0 + X_0A^T + 2\alpha X_0 & X_0C^T \\ CX_0 & 0 \end{bmatrix};$$

3) существуют матрицы X и Y, удовлетворяющие соотношениям (7), (13) и

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \tag{20}$$

Доказательство. Согласно теореме 1 имеем критерий стабилизируемости системы (17) с помощью статического регулятора:

$$\widehat{B}^{\perp T}\left(\widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T + 2\alpha\widehat{X}\right)\widehat{B}^{\perp} < 0, \quad \mathrm{i}(\widehat{\Delta}) = \{l + r, n + r, 0\}, \tag{21}$$

где

$$\widehat{\Delta} = \begin{bmatrix} \widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T + 2\alpha\widehat{X} & \widehat{X}\widehat{C}^T \\ \widehat{C}\widehat{X} & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \alpha \geq 0.$$

Первое соотношение в (21) с учетом структуры блочных матриц совпадает с матричным неравенством (7) относительно X. Используем конгруэнтное преобразование матрицы $\widehat{\Delta}$:

$$\widehat{L}\widehat{\Delta}\widehat{L}^T = \begin{bmatrix} \Delta_0 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

где

$$\widehat{L} = \left[\begin{array}{cc|cc} I_n & -X_1^T X_2^{-1} & 0 & -AX_1^T X_2^{-1} \\ 0 & 0 & I_l & -CX_1^T X_2^{-1} \\ \hline 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_r \end{array}\right], \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} 2\alpha X_2 & X_2 \\ X_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь диагональный блок Δ_0 определен в (19) при $X_0 = X - X_1^T X_2^{-1} X_1$. При этом $\mathrm{i}(\Delta_1) = \{r, r, 0\}$, $\operatorname{rank}(X - X_0) = \operatorname{rank}(X_1^T X_2^{-1} X_1) \leq r$ и $X \geq X_0$.

Следовательно, из (21) вытекают соотношения (7) и (19) для некоторых положительно определенных матриц X и X_0. Обратно, если система соотношений (7) и (19) разрешима относительно $X = X^T > 0$ и $X_0 = X_0^T > 0$, то с учетом (22) всегда можно найти блочную матрицу $\widehat{X} > 0$, удовлетворяющую соотношениям (21). При этом матрица X должна быть ее первым диагональным блоком, а в качестве X_1 и X_2 можно выбрать, например, множитель разложения $X - X_0 = X_1^T X_1 \geq 0$ и единичную матрицу I_r соответственно.

Эквивалентность утверждений 1 и 3 устанавливается с учетом замечания 1 и блочной структуры используемых матриц. Следует отметить, что матрицы X и X_0 удовлетворяют утверждению 2 в том и только в том случае, когда матрицы X и $Y = X_0^{-1}$ удовлетворяют утверждению 3. Для выполнения соотношений (20) необходимо, чтобы матрицы X и Y были положительно определенными. Ранговые ограничения в соотношениях (19) и (20) всегда выполняются в случае динамического регулятора полного порядка $r = n$.

Теорема доказана.

Из утверждения 2 теоремы 3 вытекает следующий алгоритм построения стабилизирующего динамического регулятора (3) порядка $r \leq n$ для системы (1).

Алгоритм 1. 1. Определение матриц $X = X^T > 0$ и $X_0 = X_0^T > 0$, удовлетворяющих соотношениям (7) и (19).

2. Разложение неотрицательно определенной матрицы

$$X - X_0 = X_1^T X_1 \geq 0, \quad X_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}, \quad \operatorname{rank} X_1 \leq r.$$

3. Решение ЛМН

$$\widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T + 2\alpha\widehat{X} + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{C}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{C}^T\widehat{K}_0^T\widehat{B}^T < 0$$

относительно $\widehat{K}_0$ при ограничениях $\det(I_m + K_0 D) \neq 0$ и $\alpha \geq 0$, где

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & I_r \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}.$$

4. Вычисление матриц регулятора (3) по формулам

$$\begin{gathered} K = (I_m + K_0 D)^{-1} K_0, \quad U = (I_m + K_0 D)^{-1} U_0, \\ V = V_0 (I_l + D K_0)^{-1}, \quad Z = Z_0 - V_0 D (I_m + K_0 D)^{-1} U_0. \end{gathered} \tag{23}$$

Используя формулы (17) и (18), можно сформулировать достаточные условия существования и методы построения динамического регулятора (3), обеспечивающего асимптотическую устойчивость состояния $x \equiv 0$ нелинейной системы (4) (см. теорему 2).

4. H_∞-управление по выходу. Рассмотрим систему (1) с нулевым начальным вектором $x(0) = 0$ и класс управлений

$$u = K_* y + w, \quad K_* \in \mathcal{K}_D, \tag{24}$$

где K_* — стабилизирующая матрица статической обратной связи. В качестве входа w может быть вектор внешних возмущений или новое управление. Система (1) с управлением (24) представляется в виде

$$\dot{x} = A_* x + B_* w, \quad y = C_* x + D_* w, \quad x(0) = 0, \tag{25}$$

где $A_* = A + B\mathcal{D}(K_*)C$, $B_* = B(I_m - K_* D)^{-1}$, $C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C$, $D_* = (I_l - DK_*)^{-1}D$, $\mathcal{D}(K_*) = (I_m - K_* D)^{-1} K_*$.

Определим для системы (25) критерий качества

$$J_{P,Q} = \sup_{0 < \|w\|_P < \infty} J(w), \tag{26}$$

где

$$J(w) = \frac{\|y\|_Q}{\|w\|_P}, \quad \|y\|_Q^2 = \int_0^\infty y^T Q y dt, \quad \|w\|_P^2 = \int_0^\infty w^T P w dt,$$

$Q = Q^T > 0$ и $P = P^T > 0$ — некоторые положительно определенные матрицы, определяющие взвешенные L_2-нормы $\|y\|_Q$ и $\|w\|_P$. При этом выполняется двусторонняя оценка

$$\gamma_1 J \leq J_{P,Q} \leq \gamma_2 J, \quad \gamma_1 = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}, \quad \gamma_2 = \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(P)},$$

где $J = J_{I_m,I_l}$ совпадает с H_∞-нормой передаточной матричной функции системы (1):

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(H^T(-i\omega)H(i\omega))}, \quad H(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}B + D.$$

Величина J характеризует *уровень гашения входных сигналов* в системе, т. е. отношение энергий „выход-вход" [3]. При решении различных задач управления желательно, чтобы данная характеристика была минимальной. Критерий качества (26) будем называть *взвешенным уровнем гашения входных сигналов* системы (25).

Лемма 2. *Пусть для некоторой матрицы $K_* \in \mathcal{K}_D$ матрица A_* гурвицева. Тогда $J_{P,Q} < 1$ в том и только в том случае, когда для некоторой матрицы $X = X^T > 0$ выполняется ЛМН*

$$\begin{bmatrix} A_*^T X + XA_* + C_*^T QC_* & XB_* + C_*^T QD_* \\ B_*^T X + D_*^T QC_* & D_*^T QD_* - P \end{bmatrix} < 0. \tag{27}$$

При этом замкнутая система (1), (24) с неопределенностью

$$w = \Theta y, \quad \Theta^T P\Theta \le Q, \tag{28}$$

робастно устойчива с общей функцией Ляпунова $v(x) = x^T Xx$.

Доказательство. Используя разложения положительно определенных матриц $P = \widehat{P}^T\widehat{P}$ и $Q = \widehat{Q}^T\widehat{Q}$, получаем систему

$$\dot{x} = A_*x + \widehat{B}_*\widehat{w}, \quad \widehat{y} = \widehat{C}_*x + \widehat{D}_*\widehat{w}, \quad x(0) = 0,$$

где $\widehat{y} = \widehat{Q}y$, $\widehat{w} = \widehat{P}w$, $\widehat{B}_* = B_*\widehat{P}^{-1}$, $\widehat{C}_* = \widehat{Q}C_*$, $\widehat{D}_* = \widehat{Q}D_*\widehat{P}^{-1}$. При этом вектор $\widehat{w}$ рассматривается как вход данной системы с критерием качества типа J. Поэтому оценка $J_{P,Q} < \gamma$ выполняется в том и только в том случае, когда для некоторой матрицы $X = X^T > 0$ выполняется ЛМН [10, 11]

$$\widehat{\Omega}_\gamma = \begin{bmatrix} A_*^T X + XA_* & X\widehat{B}_* & \widehat{C}_*^T \\ \widehat{B}_*^T X & -\gamma I_m & \widehat{D}_*^T \\ \widehat{C}_* & \widehat{D}_* & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0.$$

В случае $K_* = 0$, $P = I_m$ и $Q = I_l$ данная оценка эквивалентна частотному неравенству $H^T(-i\omega)H(i\omega) < \gamma^2 I_m, \omega \in \mathbb{R}$.

Преобразуем полученное матричное неравенство:

$$\Omega_\gamma = G^T\widehat{\Omega}_\gamma G = \begin{bmatrix} A_*^T X + XA_* & XB_* & C_*^T \\ B_*^T X & -\gamma P & D_*^T \\ C_* & D_* & -\gamma Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{29}$$

где $G = \operatorname{diag}\{I_n, \widehat{P}, \widehat{Q}^{-1T}\}$. Очевидно, что при условии (29) матрица A_* должна быть гурвицевой.

Полагая $\gamma = 1$ и применяя лемму Шура, получаем критерий выполнения оценки $J_{P,Q} < 1$ в виде матричного неравенства (27). Асимптотическая устойчивость замкнутой системы (1), (24) для любого вектора (28) (т. е. робастная устойчивость) с общей функцией Ляпунова $v(x) = x^T X x$ является следствием теоремы 1 [12].

Теорема доказана.

Отметим, что характеристика (26) определяется в результате решения следующей оптимизационной задачи относительно X и K_*:

$$J_{P,Q} = \inf \left\{ \gamma \colon \Omega_\gamma < 0, X = X^T > 0, \, K_* \in \mathcal{K}_D \right\}.$$

В качестве параметров оптимизации наряду с X и K_* могут быть также положительно определенные матрицы P и Q.

Установим критерий существования матрицы K_*, удовлетворяющей лемме 2.

Пусть $K_0 = \mathcal{D}(K_*)$, тогда $A_* = A + BK_0C$, $B_* = B(I_m + K_0D)$, $C_* = (I_l + DK_0)C$, $D_* = (I_l + DK_0)D$ и матричное неравенство (29) при $\gamma = 1$ принимает вид

$$L^T K_0 R + R^T K_0^T L + S < 0, \tag{30}$$

где

$$R = [\, C, D, 0_{l\times l}] \,, \quad L = \left[\, B^T, D^T, 0_{m\times m} \right] \widehat{X},$$

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -P & D^T \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Данное неравенство разрешимо относительно K_0 в том и только в том случае, когда

$$W_R^T S W_R < 0, \quad W_L^T S W_L < 0, \tag{31}$$

где W_L и W_R — матрицы, столбцы которых образуют базисы соответствующих ядер $\ker L$ и $\ker R$ [11]. Поскольку

$$W_R = \begin{bmatrix} W_{[C,D]} & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix}, \quad W_L = \widehat{X}^{-1} \begin{bmatrix} W_{[B^T,D^T]} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

то условия (31) с учетом леммы Шура приводятся к виду

$$W_{[C,D]}^T \begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T QC & XB + C^T QD \\ B^T X + D^T QC & D^T QD - P \end{bmatrix} W_{[C,D]} < 0, \tag{32}$$

$$W_{[B^T,D^T]}^T \begin{bmatrix} AY + YA^T + BP^{-1}B^T & YC^T + BP^{-1}D^T \\ CY + DP^{-1}B^T & DP^{-1}D^T - Q^{-1} \end{bmatrix} W_{[B^T,D^T]} < 0, \tag{33}$$

где $Y = X^{-1}$. Если матричное неравенство (30) разрешимо, то всегда можно выбрать такое его решение K_0, что матрица $I_l + DK_0$ будет невырожденной. При этом $I_l + DK_0 = (I_l - DK_*)^{-1}$ и

$$K_* = K_0 (I_l + DK_0)^{-1}. \tag{34}$$

Теорема 4. *Существует матрица K_*, для которой $J_{P,Q} < 1$, в том и только в том случае, когда система ЛМН (32) и (33) разрешима относительно взаимно обратных матриц $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$. При этом замкнутая система (1), (24) с неопределенностью (28) робастно устойчива с общей функцией Ляпунова $v(x) = x^T X x$.*

Алгоритм вычисления матрицы K_*, удовлетворяющей теореме 4, основан на решении ЛМН при дополнительных ограничениях.

Алгоритм 2. 1. Вычисление матриц $W_{[C,D]}$ и $W_{[B^T,D^T]}$.

2. Нахождение матриц $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющих условиям (32), (33) и $XY = I_n$.

3. Решение ЛМН (30) относительно K_0 при ограничении $\det(I_l + DK_0) \neq 0$.

4. Вычисление матрицы K_* по формуле (34).

В лемме 2 и теореме 4 матрицы P и Q являются заданными. Однако в приведенном алгоритме робастной стабилизации их можно считать неизвестными и определять наряду с положительно определенными матрицами X и Y. Кроме того, можно учесть неопределенность

$$A \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\alpha\} \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i A_i \colon \alpha_i \geq 0, i = \overline{1,\nu}, \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = 1 \right\}.$$

При этом необходимо решить систему 2α ЛМН типа (32) и (33) для каждой вершины A_i заданного политопа. В лемме 2 могут быть учтены также неопределенности $B \in \in \mathrm{Co}\{B_1, \ldots, B_\beta\}$ и $C \in \mathrm{Co}\{C_1, \ldots, C_\gamma\}$ с использованием соответствующих систем ЛМН.

Теперь для системы (1) с нулевым начальным вектором рассмотрим критерий качества (26) и класс динамических регуляторов

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky + w, \quad \xi(0) = 0, \tag{35}$$

где $w \in \mathbb{R}^m$ — вектор входных сигналов. Объединенная система при условии $K \in \mathcal{K}_D$ приводится к виду

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\widehat{x} + \widehat{N}w, \quad y = \widehat{F}\widehat{x} + \widehat{G}w, \quad \widehat{x}(0) = 0, \tag{36}$$

где

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{M} = \begin{bmatrix} A + BK_0C & BU_0 \\ V_0C & Z_0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{N} = \begin{bmatrix} B + BK_0D \\ V_0D \end{bmatrix},$$

$$\widehat{F} = [C + DK_0C, DU_0], \quad \widehat{G} = D + DK_0D,$$

$$K_0 = \mathcal{D}(K), \quad U_0 = (I_m - KD)^{-1}U, \quad V_0 = V(I_l - DK)^{-1}, \quad Z_0 = Z + VD(I_m - KD)^{-1}U.$$

Если матрица $\widehat{M}$ гурвицева, то согласно лемме 2 $J_{P,Q} < 1$ в том и только в том случае, когда для некоторой матрицы $\widehat{X} = \widehat{X}^T > 0$ выполняется ЛМН

$$\begin{bmatrix} \widehat{M}^T\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{M} + \widehat{F}^TQ\widehat{F} & \widehat{X}\widehat{N} + \widehat{F}^TQ\widehat{G} \\ \widehat{N}^T\widehat{X} + \widehat{G}^TQ\widehat{F} & \widehat{G}^TQ\widehat{G} - P \end{bmatrix} < 0. \tag{37}$$

При этом система (36) с неопределенностью (28) робастно устойчива с общей функцией Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$. Представляя соотношение (37) в виде ЛМН относительно неизвестных K_0, U_0, V_0 и Z_0, имеем

$$\widehat{L}^T \widehat{K}_0 \widehat{R} + \widehat{R}^T \widehat{K}_0^T \widehat{L} + \widehat{S} < 0, \tag{38}$$

где

$$\widehat{S} = \begin{bmatrix} A^T X + XA & A^T X_1^T & XB & C^T \\ X_1 A & 0 & X_1 B & 0 \\ B^T X & B^T X_1^T & -P & D^T \\ C & 0 & D & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{L}^T = \begin{bmatrix} XB & X_1^T \\ X_1 B & X_2 \\ 0 & 0 \\ D & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{R} = \begin{bmatrix} C & 0 & D & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}.$$

При этом матрицы регулятора (35) и блоки матрицы $\widehat{K}_0$ связаны соотношениями (23).

Повторяя доказательство теоремы 4 для системы (36), получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Существует динамический регулятор (35), для которого $J_{P,Q} < 1$, в том и только в том случае, когда система соотношений (20), (32) и (33) разрешима относительно матриц $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$. При этом замкнутая система (1), (35) с неопределенностью (28) робастно устойчива с общей функцией Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$, где $\widehat{X}$ — решение ЛМН (37).*

Приведем алгоритм построения динамического регулятора (35), удовлетворяющего теореме 5.

Алгоритм 3. 1. Вычисление матриц $W_{[C,D]}$ и $W_{[B^T,D^T]}$.

2. Нахождение матриц $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющих соотношениям (20), (32) и (33).

3. Формирование блочных взаимно обратных матриц

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_1^T \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{X}\widehat{Y} = I_{n+r}.$$

4. Решение ЛМН (38) относительно $\widehat{K}_0$ при ограничении $\det(I_l + DK_0) \neq 0$.

5. Вычисление матриц регулятора (35) по формулам (23).

В п. 3 данного алгоритма можно использовать формулу Фробениуса для обращения блочных матриц [13], согласно которой

$$X = Y^{-1} + Y^{-1} Y_1^T H^{-1} Y_1 Y^{-1}, \quad X_1 = -H^{-1} Y_1 Y^{-1}, \quad X_2 = H^{-1},$$

где $H = Y_2 - Y_1 Y^{-1} Y_1^T$. Если для некоторых матриц X_1 и H выполняются соотношения

$$X - Y^{-1} = X_1^T H X_1 \geq 0, \quad H = H^T > 0, \quad \operatorname{rank} X_1 \leq r,$$

то можно положить $X_2 = H^{-1}$, $Y_1 = -HX_1Y$ и $Y_2 = H + HX_1YX_1^TH$. В частности, при условиях $r = n$ и $X > Y^{-1}$ можно взять $X_1 = X_2 = X - Y^{-1}$ и $H = (X - Y^{-1})^{-1}$.

Пример. Рассмотрим систему управления однозвенного робота-манипулятора, круговое движение звена которого вокруг одного из концов осуществляется с помощью гибкого соединения звена и исполняющего механизма (рис. 1).

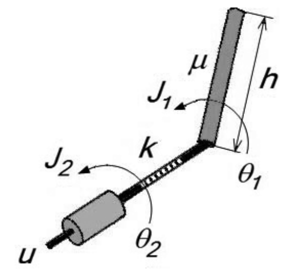


Рис. 1. Однозвенный робот-манипулятор.

Данная система описывается в виде двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые отвечают за механический баланс исполняющего механизма (вала электродвигателя) и звена робота-манипулятора без учета сил трения и внешних возмущений [14]. Уравнения движения системы представляются в векторно-матричной форме (4), где

$$x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -[\mu g h \varphi(\theta_1) + k]/J_1 & 0 & k/J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/J_2 & 0 & -k/J_2 & -d/J_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J_2 \end{bmatrix},$$

x_1 и x_2 — угловые координаты звена манипулятора и вала двигателя соответственно, u — управляющий момент, создаваемый двигателем, J_1 и J_2 — моменты инерции соответственно звена манипулятора и вала двигателя, k — жесткость передаточного механизма, d — коэффициент демпфирования, μ — масса звена манипулятора, h — длина звена манипулятора, g — ускорение свободного падения, $\mu g h \sin\theta_1$ — момент силы тяжести, действующей на звено манипулятора, $\varphi(\theta) = (\sin\,\theta)/\theta$ — непрерывная функция.

Пусть $\mu g h = 5$, $d = 0,1$, $k = 100$, $J_1 = 1$, $J_2 = 0,3$ и измеряется вектор выхода

$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_2 + u \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

С помощью алгоритма 1 получены матрицы динамического регулятора (3)

$$K = \begin{bmatrix} 0,41138 & 1,02011 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -0,01041 & 1,26562 & 5,01012 & 5,63158 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} 40,87656 & 12,66551 \\ -82,39505 & 2,64321 \\ 1,12738 & 1,01236 \\ 0,43389 & 0,45288 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} -221,68319 & -73,24345 & 435,55701 & -16,56658 \\ -5,86971 & -7,50591 & -13,13094 & -3,32791 \\ -122,55623 & -99,16994 & -54,17854 & -48,20623 \\ 726,00834 & 651,89123 & 284,48100 & -0,45528 \end{bmatrix},$$

обеспечивающего асимптотическую устойчивость линейной системы (18) со спектральным запасом устойчивости $\alpha = 0,3$. Нулевое решение замкнутой нелинейной системы (3), (4) также асимптотически устойчиво.

Кроме того, при $P = 1$ и $Q = 0,01 I_2$ с помощью алгоритма 3 построен динамический регулятор (35) с матрицами

$$K = \begin{bmatrix} 29,27198 & 17,72540 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -136,98479 & 1,68417 & 159,99785 & -4,63821 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} -8,92308 & 29,89135 \\ 8,78891 & -134,01536 \\ -0,46761 & -4,38040 \\ -0,03049 & 10,43232 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} -4,25434 & -31,38366 & 9,09675 & 61,90396 \\ 0,95272 & -0,44282 & -0,00310 & 1,39153 \\ -4,49349 & 57,91671 & -0,29637 & -201,07858 \\ 0,15745 & 1,47507 & 1,01022 & -8,30203 \end{bmatrix},$$

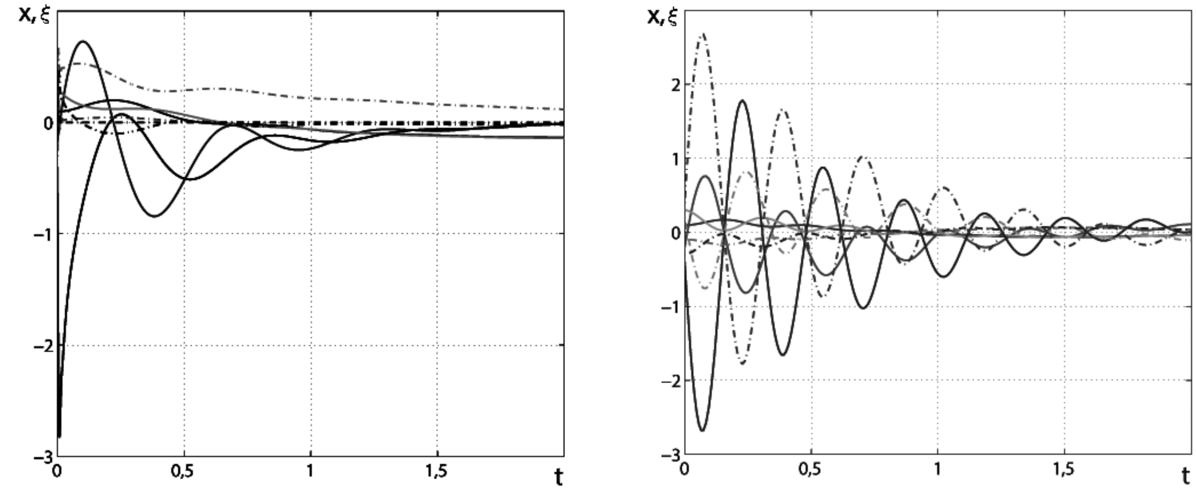
обеспечивающий оценку критерия качества $J_{P,Q} < 1$. Определены также матрицы

$$X = \begin{bmatrix} 504,20760 & -107,19979 & -103,12295 & -17,22386 \\ -107,19979 & 168,16951 & 133,38328 & 50,16634 \\ -103,12295 & 133,38328 & 684,59654 & 40,47486 \\ -17,22386 & 50,16634 & 40,47486 & 16,68031 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 50,08075 & -31,18632 & 50,37249 & -25,00599 \\ -31,18632 & 246,76214 & -33,75284 & 40,51271 \\ 50,37249 & -33,75284 & 52,75269 & -32,09252 \\ -25,00599 & 40,51271 & -32,09252 & 707,83260 \end{bmatrix},$$

удовлетворяющие системе ЛМН (20), (32) и (33), а в качестве дополняющих блоков X_1 и X_2 выбрано выражение $X - Y^{-1}$. При этом нулевое решение замкнутой нелинейной системы (4), (35) с неопределенностью (28) робастно устойчиво и данная система имеет общую функцию Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$.

На рис. 2 изображено поведение решений замкнутой нелинейной системы управления (3), (4) с начальным вектором $\widehat{x}_0 = [0,1; -0,2; 0,3; -0,4; -0,1; 0,2; -0,3; 0,4]^T$ при использовании динамического регулятора полного порядка $r = 4$ с матрицами K, U, V и Z, полученными с помощью алгоритмов 1 и 3. Сплошными и штрихпунктирными линиями обозначены траектории соответственно системы $x_i(t)$ и регулятора $\xi_i(t)$, $i = \overline{1,4}$.



а *б*

Рис. 2. Поведение замкнутой системы управления (*а* — алгоритм 1, *б* — алгоритм 3).

5. Заключение. В работе получены новые критерии стабилизируемости линейных систем с помощью статической и динамической обратных связей по измеряемому выходу, а также способы построения регуляторов, обеспечивающих асимптотическую устойчивость состояния равновесия некоторого класса нелинейных систем управления. Для класса линейных систем разработаны алгоритмы построения законов управления, которые обеспечивают оценку критерия качества, описывающего взвешенный уровень гашения входных сигналов, а также робастную стабилизацию относительно заданного множества неопределенностей. Численная реализация предложенных методов построения стабилизирующих регуляторов сводится к решению систем линейных матричных неравенств. Для этого могут быть использованы достаточно эффективные средства компьютерной системы Matlab.

1. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 7–46.
2. *Алиев Ф. А., Ларин В. Б.* Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной (обзор) // Прикл. механика. — 2011. — **47**, № 3. — С. 3–49.
3. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
4. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.
5. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M.* The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. — Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.
6. *Мазко О. Г., Богданович Л. В.* Робастна стійкість і оптимізація нелінійних систем керування // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, № 1. — С. 213–230.
7. *Ostrowsky O., Schneider H.* Some theorems on the inertia of general matrices // J. Math. Anal. and Appl. — 1962. — **4**. — P. 72–84.
8. *Mazko A. G.* Matrix equations, spectral problems and stability of dynamic systems // Int. Book Series "Stability, Oscillations and Optimization of Systems" / Eds A. A. Martynyuk, P. Borne and C. Cruz-Hernandez. — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2008. — Vol. 2. — xx + 270 p.

9. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
10. *Scherer C.* The Riccati enequality and state-space H_∞-optimal control: Ph. D. Dissertation. — Germany: Univ. Wurzburg, 1990.
11. *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear matrix inequality approach to H_∞ control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. — 1994. — **4**. — P. 421 – 448.
12. *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и оценка функционала качества нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 2. — С. 73 – 88.
13. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
14. *Ghorbel F., Hung J. Y., Spong M. W.* Adaptive control of flexible-joint manipulators // IEEE Control Systems Mag. — 1989. — № 9. — P. 9 – 13.

Получено 01.06.15