

КРЕСТОВИДНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ МЕЖДУ КОНЕЧНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ОБОЛОЧКАМИ

Т. С. Краснопольская, Е. Д. Печук

*Ин-т гидромеханики НАН Украины
ул. Желябова, 8/4, Киев, 03057, Украина
e-mail: t.krasnopolskaya@tue.nl
uzuzun@i.ua*

We construct a new mathematical model for an interaction of two resonant surface waves in a volume between two cylindrical shells having finite length. Existence of chaotic attractors was established for the system satisfying resonant conditions for cross-waves and forced waves for the first time. We also study regular states of the system, describe their phase portraits, and frequency spectrum.

Побудовано нову математичну модель взаємодії двох резонансних поверхневих хвиль у об'ємі між двома циліндричними оболонками скінченної довжини. При реалізації резонансних умов для хрестоподібної та осесиметричної мод було вперше знайдено й описано хаотичні усталені режими. Також досліджено регулярні режими, описано їх фазові портрети та частотні спектри.

1. Введение. Выбор подходящей модели изучаемого явления во многом определяет успех решения задачи. Данная работа посвящается светлой памяти профессора В. В. Мелешко [17], объяснившего решение задачи о крестовидных волнах на поверхности жидкости методом суперпозиции. Известно, что колеблющиеся тела, погруженные полностью или частично в жидкость, могут генерировать различные типы волн на свободной поверхности жидкости [6]. Примером может служить формирование так называемых „крестовидных волн”, впервые обнаруженных Фарадеем в 1831 г. и подробно описанных им в знаменитой работе, посвященной волнам на поверхности слоя жидкости [13]. В своих экспериментах Фарадей наблюдал возникновение крестовидных волн на поверхности жидкости перпендикулярно направлению горизонтальных колебаний пластины, погруженной в жидкость. Крестовидные волны — это волны, перпендикулярные (отсюда их название) направлению движения волнопродуктора, а их частота равна половине частоты колебаний волнопродуктора. Математические трудности, возникающие при их анализе, обусловлены тем фактом, что линеаризованные уравнения не описывают механизм их возникновения и передачу энергии от движения волнопродуктора в такого рода волны.

Крестовидные волны были объектом многих исследований в течение последних пятидесяти лет (подробный обзор см. в [26]). Гаррет [14] впервые показал, что волнопродуктор возбуждает колебания среднего уровня жидкости, которые и являются возбудителем крестовидных волн. Однако при этом он отметил, что колебания среднего уровня свободной поверхности могут быть малы и недостаточны для возбуждения крестовидных волн. Поэтому крестовидные волны должны подпитываться энергией непосредственно от волнопродуктора [17]. В работах Бейкер и Майлса [10, 11] рассмотрено поведение крестовидных волн в кольцевой области жидкости, вызванных радиальными колебаниями внутреннего цилиндра. Авторы использовали модификацию решения [15] задачи для бесконечно глубокого бассейна. В работах [3, 4] переход от продольных волн к крестовидным изучал-

ся при деформации поверхности внутреннего цилиндра, вызванной вращением кулачка в среднем сечении. Теоретический подход, применявшийся в этих работах, основывался на вариационном принципе [21]. В данной статье рассматривается такой же резервуар с водой, но применяется другой метод для решения задачи, а именно метод суперпозиции Ламе [1, 2, 9, 19, 22, 23]. Этот метод позволяет построить простую математическую модель, которая показывает, как крестовидная волна может генерироваться непосредственно при движении волнопродуктора без учета каких-либо осесимметричных волн на свободной поверхности [17]. Эта новая математическая модель возбуждения резонансных крестовидных волн может быть простейшим объяснением формирования волновой картины на свободной поверхности жидкости. Она также дает условия устойчивости системы и описывает влияние различных собственных форм колебаний свободной поверхности жидкости с собственными частотами, близкими к частоте возбуждения или к частоте резонансной крестовидной моды. Отметим, что частотный спектр колебаний свободной поверхности ограниченного объема жидкости является очень плотным [6, 7], так что эти формы могут рассматриваться тоже как находящиеся в параметрическом резонансе.

2. Постановка задачи и теоретический анализ. Целью настоящего исследования является рассмотрение стоячих волн на свободной поверхности жидкости в объеме между двумя цилиндрическими оболочками. Для данной геометрии области жидкости естественным является использование цилиндрической системы координат (r, θ, x) , где r — радиальная координата, θ — угловая координата, x — осевая координата. Положению невозмущенной свободной поверхности жидкости соответствует $x = 0$, а дно резервуара — $x = -d$. Жидкость в покое расположена между жестким внешним цилиндром радиуса $r = R_2$ и внутренним цилиндром радиуса R_1 . Пусть внутренняя оболочка совершает радиальные колебания, которые описываются уравнением вида

$$\chi(x, t) = a_1 \cos \omega t \cos \eta x, \quad (1)$$

где $\eta = \pi/d_0$, $d_0 = 2d$, ω — частота колебаний поверхности оболочки. Заметим, что d_0 равно удвоенной глубине воды d , так что максимальная амплитуда вибрации соответствует свободной поверхности жидкости.

Из результатов экспериментальных наблюдений, проведенных при различных частотах возбуждения, следует [17], что несмотря на строго осесимметричные радиальные колебания внутренней оболочки, существуют два типа резонансных режимов. Первый тип является вынужденным резонансом, при котором волны на свободной поверхности являются круговыми, с частотой, равной частоте возбуждения ω . Второй тип резонанса является так называемым параметрическим резонансом, при котором возбуждаемые волны являются крестовидными, т. е. с гребнями и впадинами, расположенными перпендикулярно направлению вибрации стенки внутренней оболочки. Последний тип резонанса возникает вследствие разрушения симметрии (так как возбуждение строго осесимметричное, т. е. без азимутальных форм) на частоте приблизительно равной $0,5\omega$. Кроме того, в рассмотренных в экспериментах [17] случаях энергия, которую несут параметрически возбуждаемые крестовидные волны, по крайней мере в 20 раз больше, чем энергия, содержащаяся в непосредственно возбуждаемых осесимметричных волнах. На основе этого факта было сделано заключение, что крестовидные волны получают энер-

гию непосредственно от волнопродуктора, а не от осесимметричных (или других) волн с частотой ω , так как последние содержат лишь малую часть волновой энергии.

Рассмотрим теоретические аспекты генерации волн на свободной поверхности жидкости в объеме между двумя цилиндрическими оболочками. Внутренний цилиндр действует как волнопродуктор и колеблется гармонически таким образом, что положение стенки внутреннего цилиндра определяется выражением $r(x, t) = R_1 + \chi(x, t)$, где χ определено в (1). Полагая, что жидкость является невязкой и несжимаемой, а ее движение будет безвихревым, можно записать для поля скоростей $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, где $\varphi(r, \theta, x, t)$ — потенциал скорости жидкости. Тогда для потенциала скоростей жидкости имеем уравнение

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{при} \quad R_1 + \chi_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -d \leq x \leq \zeta, \quad (2)$$

где $\zeta(r, \theta, t)$ — смещение свободной поверхности.

Динамические и кинематические условия на свободной поверхности имеют следующий вид:

$$\varphi_t + 1/2(\nabla\varphi)^2 + g\zeta = \frac{T}{\rho} \left[\nabla^2\zeta - \frac{1}{2} \nabla\zeta \cdot ((\nabla\zeta)^2 \nabla\zeta) \right] + F(t) \quad \text{при} \quad x = \zeta(r, \theta, t), \quad (3)$$

$$\varphi_x = \nabla\varphi \cdot \nabla\zeta + \zeta_t \quad \text{при} \quad x = \zeta(r, \theta, t), \quad (4)$$

где g — ускорение силы тяжести, T — коэффициент поверхностного натяжения на границе воздух-вода, ρ — плотность жидкости, $F(t)$ — произвольная функция времени [8]. Здесь и далее индексы x, r, θ, t обозначают частные производные.

Нормальная скорость жидкости равна нулю на жестких границах:

$$\varphi_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2,$$

$$\varphi_x = 0 \quad \text{при} \quad x = -d,$$

кинематическое условие на колеблющемся внутреннем цилиндре записывается следующим образом:

$$\varphi_r = \chi_t + \nabla\varphi \cdot \nabla\chi \quad \text{при} \quad r = R_1 + \chi_1(x, t). \quad (5)$$

Полагаем также, что $\zeta_r = 0$ при $r = R_1$ и $r = R_2$.

Из экспериментальных наблюдений можно заключить, что формирование определенной волновой картины имеет резонансный характер, каждая отдельная структура имеет свою „собственную” частоту, реализуясь в узких частотных интервалах. Полагаем, что эти волновые структуры могут быть аппроксимированы такими динамическими характеристиками, как собственные формы, которые определяются соответствующей линейной теорией. Амплитуды колебаний по собственным формам будут определяться из решения нелинейной задачи.

Решение линейной неосесимметричной краевой задачи

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{при} \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -d \leq x \leq 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \zeta_t \quad \text{при } x = 0, \\ \varphi_x &= 0 \quad \text{при } x = -d, \\ \varphi_r &= 0 \quad \text{при } r = R_2, \\ \varphi_r &= w_t(\theta, x, t) \quad \text{при } r = R_1, \\ \varphi_\theta|_{\theta=0} &= \varphi_\theta|_{\theta=2\pi} \end{aligned}$$

при произвольных колебаниях внутренней цилиндрической оболочки $w(\theta, x, t)$ может быть найдено несколькими способами. Один из них описан в статье Стокса 1847 г. (см. [12], § 128) и известен также как метод Гринберга [20] (гл. V). Здесь потенциал φ представлен в виде рядов Фурье по полной системе собственных функций по радиальной и азимутальной координатам с коэффициентами — функциями координаты x .

При использовании представления производных по r в виде рядов Фурье неоднородное граничное условие при $r = R_1$ трансформируется в правую часть уравнения (6). Решения последовательности неоднородных линейных дифференциальных уравнений по x для коэффициентов разложения с неоднородными граничными условиями по x могут быть легко найдены аналитически. Однако этот подход приводит к громоздким уравнениям, в которые перемещения волнопродуктора $w(\theta, x, t)$ не входят в явном виде. Для получения более ясной картины передачи энергии от волнопродуктора поверхностным волнам более уместно использовать другой аналитический метод, а именно метод суперпозиции. Применение данного метода, безусловно, предпочтительно для рассматриваемой проблемы. Он дает ясную физическую картину передачи энергии от волнопродуктора в колебания среднего уровня жидкости и в колебания по каждой собственной форме. Идею метода суперпозиции впервые выдвинул Ламе [19] в своих классических лекциях по теории упругости. Подобный метод применен в [16] для исследования движущихся гравитационных капиллярных волн, вызываемых волнопродуктором.

Согласно этому методу потенциал φ может быть записан в виде суммы трех гармонических функций:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2. \quad (7)$$

Потенциал φ_0 является решением следующей осесимметричной граничной задачи:

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0 \quad \text{при } R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -d \leq x \leq 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\varphi_0)_x &= (\zeta_0)_t \quad \text{при } x = 0, \\ (\varphi_0)_x &= 0 \quad \text{при } x = -d, \\ (\varphi_0)_r &= 0 \quad \text{при } r = R_2, \\ (\varphi_0)_r &= (w_0)_t \quad \text{при } r = R_1, \\ (\varphi_1)_\theta|_{\theta=0} &= (\varphi_1)_\theta|_{\theta=2\pi}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\zeta_0(t) = \frac{1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \zeta(r, \theta, t) r dr d\theta,$$

$$w_0(t) = \frac{1}{2\pi R_1 d} \int_0^{2\pi} \int_{-d}^0 w(\theta, x, t) R_1 dx d\theta$$

— соответственно колебания среднего уровня свободной поверхности жидкости и усредненное перемещение цилиндрического волнопродуктора. Эти величины связаны соотношением

$$(\zeta_0)_t \pi(R_2^2 - R_1^2) - 2\pi d R_1 (w_0)_t = 0, \quad (10)$$

выражающим закон сохранения массы для несжимаемой жидкости. Таким образом, для рассматриваемого случая движения волнопродуктора (1) из выражения (10) легко получить для колебаний среднего уровня жидкости соотношение

$$\zeta_{00}(t) = \frac{4R_1 d}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} (a_1 \cos \omega t).$$

Потенциал φ_1 определяется из следующей линейной задачи:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad \text{при} \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -d \leq x \leq 0, \quad (11)$$

$$(\varphi_1)_x = (\zeta - \zeta_0)_t \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (12a)$$

$$(\varphi_1)_x = 0 \quad \text{при} \quad x = -d, \quad (12б)$$

$$(\varphi_1)_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2, \quad (12в)$$

$$(\varphi_1)_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1, \quad (12г)$$

$$(\varphi_1)_\theta|_{\theta=0} = (\varphi_1)_\theta|_{\theta=2\pi}, \quad (12д)$$

где граничные условия в радиальном направлении являются однородными, а в азимутальном направлении — периодическими. Таким образом, φ_1 будет выражаться в виде суммы по полным системам собственных функций в радиальном и азимутальном направлениях.

Для потенциала φ_2 граничная задача формулируется следующим образом:

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad \text{при} \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -d \leq x \leq 0, \quad (13)$$

$$(\varphi_2)_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (14a)$$

$$(\varphi_2)_x = 0 \quad \text{при} \quad x = -d, \quad (14б)$$

$$(\varphi_2)_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2, \quad (14в)$$

$$(\varphi_2)_r = (w - w_0)_t \quad \text{при} \quad r = R_1, \quad (14г)$$

$$(\varphi_2)_\theta|_{\theta=0} = (\varphi_2)_\theta|_{\theta=2\pi}. \quad (14д)$$

Потенциал φ_2 может быть представлен в виде суммы по собственным функциям в вертикальном (однородные граничные условия (14а) и (14б)) и окружном (условие периодичности (14д)) направлениях.

Потенциал φ_2 не вызывает изменений скорости перемещений ζ на поверхности $x = 0$. Однако он создает компоненту давления, которая, как следует из (3), формирует движение свободной поверхности. Эта компонента имеет частоту возбуждения, равную частоте $w(\theta, x, t)$ в линейном приближении задачи.

Следует отметить, что краевые задачи (8), (9), (11), (12) и (13), (14) являются задачами типа Неймана, когда задана нормальная производная гармонической функции. Для получения решения без особенностей в угловых точках вторая теорема Грина требует, чтобы эти заданные значения удовлетворяли условиям нулевого потока через границу. Очевидно, что это свойство удовлетворяется для всех трех граничных задач. Решение краевой задачи для φ_0 может быть легко найдено в виде

$$\varphi_0(r, \theta, t) = -\dot{w}_0(t) \frac{R_1}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{r^2}{2} - R_2^2 \ln r \right) + \dot{\zeta}_0 \frac{(d+x)^2}{2d}$$

(здесь точка означает производную по времени), который тождественно удовлетворяет уравнению Лапласа (8), что обеспечивается соотношением (10).

Решение линейной задачи (11), (12) для φ_1 может быть представлено в виде

$$\varphi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij}^{c,s}(t) \frac{\text{ch} k_{ij}(x+d)}{N_{ij} \text{ch} k_{ij} d} \psi_{ij}^{c,s}(r, \theta) \quad (15)$$

по полным системам азимутальных $(\cos i\theta, \sin i\theta)$ и радиальных собственных функций

$$\chi_{ij}(k_{ij}r) = J_i(k_{ij}r) - \frac{J'_i(k_{ij}R_1)}{Y'_i(k_{ij}R_1)} Y_i(k_{ij}r)$$

с некоторыми произвольными амплитудами $\varphi_{ij}^{c,s}(t)$. В решении (15) используются обозначения [10, 11]

$$\psi_{ij}^c(r, \theta) = \chi_{ij}(k_{ij}r)(\cos i\theta), \quad \psi_{ij}^s(r, \theta) = \chi_{ij}(k_{ij}r)(\sin i\theta),$$

где J_i и Y_i — соответственно функции Бесселя i -го порядка первого и второго рода, N_{ij} — постоянная нормализации, которая находится из соотношения

$$N_{ij}^2 = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (\psi_{ij}^{c,s})^2 r dr d\theta,$$

индекс c (или s) означает, что в качестве окружной собственной функции выбрана функция $\cos i\theta$ (или $\sin i\theta$), k_{ij} — корни уравнения

$$J'_i(k_{ij}R_2) - \frac{J'_i(k_{ij}R_1)}{Y'_i(k_{ij}R_1)} Y'_i(k_{ij}R_2) = 0.$$

Система функций $\psi_{ij}^{c,s}(r, \theta)$ при $i = 0, 1, 2, \dots$ и $j = 1, 2, 3, \dots$ является полной ортогональной системой, поэтому любая кусочно-непрерывная функция переменных r и θ может быть представлена с использованием процедуры Фурье разложения в ряд [2, 9, 22, 23].

Таким образом, перемещение свободной поверхности $\zeta(r, \theta, t) - \zeta_0(t)$ может быть записано так:

$$\zeta(r, \theta, t) - \zeta_0(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_{ij}^{c,s}(t) \frac{\psi_{ij}^{c,s}(r, \theta)}{N_{ij}}. \quad (16)$$

Граничное условие (12а) дает соотношение между амплитудами рядов (15) и (16) в виде

$$\varphi_{ij}^{c,s}(t) = \zeta_{ij}^{c,s}(t) (k_{ij} \operatorname{th} k_{ij} d)^{-1}.$$

Потенциал скорости $\varphi_2(r, \theta, x, t)$ может быть записан в виде обычных рядов Фурье по полным системам $\cos \alpha_l x$ ($\alpha_l = l\pi/d$) и $\cos i\theta$ или $\sin i\theta$, так что общее решение имеет вид

$$\varphi_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{il}^{c,s}(t) \cos \alpha_l x \hat{\chi}_{il}(\alpha_l r) (\cos i\theta, \sin i\theta),$$

где

$$\hat{\chi}_{il}(\alpha_l r) = I_i(\alpha_l r) - \frac{I'_i(\alpha_j R_2)}{K'_i(\alpha_j R_2)} K_i(\alpha_l r),$$

I_i и K_i — соответственно модифицированные функции Бесселя i -го порядка первого и второго рода.

Используя граничное условие (14г), можно непосредственно определить амплитуды $\Phi_{il}^{c,s}(t)$:

$$\Phi_{il}^{c,s}(t) = \dot{w}_{il}^{c,s}(t) = \frac{2 - \delta_{i0}}{d\pi\alpha_l \hat{\chi}'_{il}(\alpha_l R_1)} \int_0^{2\pi} \int_{-d}^0 [\dot{w}(\theta, x, t) - \dot{w}_0(t)] \cos \alpha_l x (\cos i\theta, \sin i\theta) R_1 dx d\theta,$$

где δ_{i0} — дельта-функция Дирака, $\hat{\chi}'_{0l}(z) = d\hat{\chi}_{0l}(z)/dz$.

Для определения неизвестных функций $\zeta_{ij}^{c,s}(t)$, представляющих амплитуды непосредственно возбуждаемых волн на свободной поверхности, мы применяем линеаризованное динамическое условие на свободной поверхности (3):

$$\varphi_t + g\zeta - \frac{T}{\rho} \nabla^2 \zeta = F(t) \quad \text{при } x = 0, \quad (17)$$

где φ — полный потенциал скорости согласно (7). Подстановка (7) в (17) приводит к функциональному уравнению по r в интервале (R_1, R_2) . Представляя радиальные функции $r^2/2 - R_2^2 \ln r$ и $\hat{\chi}_{il}(\alpha_l r)$ в виде разложений

$$\frac{r^2}{2} - R_2^2 \ln r = a_{00} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{0j} \frac{\chi_{0j}(k_{0j}r)}{N_{0j}},$$

$$\hat{\chi}_{il}(\alpha_l r) = b_{il0} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{ilj} \frac{\chi_{ij}(k_{ij}r)}{N_{ij}},$$

где коэффициенты a_{00} , a_{0j} , b_{i0l} и b_{ilj} могут быть найдены непосредственным интегрированием, мы можем записать бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\zeta_{ij}^{c,s}(t)$:

$$\ddot{\zeta}_{0j}(t) + \omega_{0j}^2 \zeta_{0j}(t) = \ddot{w}_0(t) \frac{a_{0j} \beta_{0j} R_1}{R_2^2 - R_1^2} - \sum_{l=1}^{\infty} \ddot{w}_{0l}^c(t) b_{0lj} \beta_{0j}, \quad (18a)$$

$$\ddot{\zeta}_{ij}^{c,s}(t) + \omega_{ij}^2 \zeta_{ij}(t) = - \sum_{l=1}^{\infty} \ddot{w}_{il}^{c,s}(t) b_{ilj} \beta_{ij}, \quad (18б)$$

где $\beta_{ij} = k_{ij} \text{th} k_{ij} d$ и

$$\omega_{ij} = \left[\left(g k_{ij} + \frac{T}{\rho} k_{ij}^3 \right) \text{th} k_{ij} d \right]^{1/2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Линейные уравнения (18a), (18б) представляют традиционные уравнения для случая вынужденных колебаний с собственной частотой ω_{ij} . Решая эти линейные дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях и заданных $w_0(t)$, $w_{il}^{c,s}(t)$, можно легко получить амплитуды $\zeta_{ij}(t)$ колебаний свободной поверхности жидкости в явном виде.

Далее этот же метод применяется для определения параметров резонансных собственных форм при решении нелинейных задач. Для этого сначала используются нелинейные граничные условия (5) для определения амплитуды потенциала φ_2 при разложении в ряды по функциям $\cos \alpha_l x$ и $(\cos i\theta, \sin i\theta)$. Вторым шагом является определение соотношений между амплитудами потенциала φ_1 , функций $\varphi_{ij}(t)$ и амплитудами $\zeta_{ij}(t)$ свободной поверхности жидкости в соответствии с граничными условиями (4). И наконец, учитывается динамическое условие (3) для получения нелинейных дифференциальных уравнений для определения резонансных амплитуд при заданном воздействии (1).

3. Хаотические установившиеся режимы при двухмодовой аппроксимации. Как показывают графики спектральных мощностей экспериментальных крестовидных резонансных волн на поверхности жидкости [17], волновую картину прежде всего составляют сами крестовидные волны с частотой $1/2\omega$ и вынужденные резонансные волны с частотой ω . Поэтому аппроксимируем волны на свободной поверхности между двумя цилиндрами как сумму двух собственных мод и колебание среднего уровня, а именно, как сумму вида

$$\xi(r, \theta, t) = \frac{1}{N_{nl}} \xi_{nl}(t) \psi_{nl}^c(r, \theta) + \frac{1}{N_{0h}} \xi_{0h}(t) \psi_{0h}(r) + \xi_{00}(t), \quad (19)$$

где $\frac{1}{N_{nl}} \xi_{nl}(t) \psi_{nl}^c(r, \theta)$ — резонансная крестовидная волна, частота которой $\omega_{nl} \approx \frac{1}{2} \omega$ (ω — частота волнопродуктора), $\frac{1}{N_{0h}} \xi_{0h}(t) \psi_{0h}(r)$ — осесимметричная (не зависит от θ) волна, частота которой $\omega_{0h} \sim \omega$ (близка к частоте возбуждения), и $\xi_{00}(t)$ — колебания среднего уровня жидкости между цилиндрами.

При этом экспериментальные наблюдения свидетельствуют о том, что крестовидные волны при реализации резонансных условий ($\omega_{nl} \sim \frac{\omega}{2}$) имеют амплитуду гораздо бóльшую, чем при вынужденном резонансе ($\omega_{0h} \sim \omega$), поэтому полагаем, что ξ_{nl} имеет порядок $O(\varepsilon_1^{1/2})$, а ξ_{0h} и ξ_{00} имеют порядок $O(\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 = \frac{a_1 \omega_{nl}^2}{g}$ — малый положительный параметр.

Если колебания свободной поверхности аппроксимируются суммой вида (19), то потенциал φ_1 имеет соответствующие слагаемые

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\varphi_{nl}(t)}{N_{nl}} \psi_{nl}^c(r, \theta) \frac{\operatorname{ch} k_{nl}(x+d)}{\operatorname{ch} k_{nl}d} + \frac{\varphi_{0h}(t)}{N_{0h}} \psi_{0h}(r) \frac{\operatorname{ch} k_{0h}(x+d)}{\operatorname{ch} k_{0h}d}, \\ \varphi_0 &= \frac{2dR_1(a_1\omega \sin \omega t)}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \left(\frac{r^2}{2} - R_2^2 \ln r \right) + \dot{\xi}_{00} \frac{(d+x)^2}{2d}, \\ \xi_{00}(t) &= \frac{4R_1d}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} (a_1 \cos \omega t). \end{aligned} \quad (20)$$

Кинематическое условие на волнопродукторе (т. е. при $r = R_1$) для потенциала $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$ позволяет получить следующие выражения для φ_2 , сохраняя в условии члены $O(\varepsilon_1^{3/2})$:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -\frac{4\varepsilon_1 g}{\omega_{nl}} \sin \omega t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \eta \cos \alpha_j x \hat{\chi}_{0j}(\alpha_j r)}{(\alpha_j^2 - \eta^2) \alpha_j d \hat{\chi}'_{0j}(\alpha_j R_1)} - \frac{4\varepsilon_1 g}{\pi \omega_{nl}} \sin \omega t - \\ &- \varepsilon_1 \dot{\xi}_{nl} \left(\frac{g \cos \omega t}{\omega_{nl}^2} \right) \sum_{j=1}^{\infty} G_{nj} \cos \alpha_j x \hat{\chi}_{nj}(\alpha_j r) \cos n\theta + O(\varepsilon_1^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_{nj} &= \frac{2k_{nl}^2}{\hat{\chi}'_{nj}(\alpha_j R_1) d \alpha_j N_{nl} \operatorname{ch} k_{nl}d} \left[\chi''_{nl}(k_{nl}R_1) \int_{-d}^0 \operatorname{ch} k_{nl}(x+d) \cos \eta x \cos \alpha_j x dx + \right. \\ &\left. + \frac{\eta \chi_{nl}(k_{nl}R_1)}{k_{nl}} \int_{-d}^0 \operatorname{sh} k_{nl}(x+d) \sin \eta x \cos \alpha_j x dx \right]. \end{aligned}$$

Для определения амплитуд потенциала φ_1 (20), а именно $\varphi_{nl}(t)$ и $\varphi_{0h}(t)$, используем кинематическое граничное условие на свободной поверхности, удерживая члены порядка $O(\varepsilon_1^{3/2})$ в разложении в ряд Тейлора. Подставляя (20) в это условие, получаем

$$\varphi_{nl} \alpha_0 + \xi_{nl}^2 \varphi_{nl} \alpha_2 = \dot{\xi}_{nl} - \varepsilon_1 \xi_{nl} \sin \omega t D \xi_{nl} \varphi_{0h} L_{0h} + \varphi_{nl} \xi_{0h} M_{0h} - \varphi_{nl} \xi_{00} k_{nl}^2, \quad (21)$$

где

$$D = -D_{n0} + \sum_{j=1}^{\infty} D_{nj}, \quad D_{n0} = \frac{2gR_1 k_{nl}}{\omega_{nl}(R_2^2 - R_1^2) N_{nl}^2} \int_{R_1}^{R_2} \left(r - \frac{R_2^2}{r} \right) \chi'_{nl} \chi_{nl} r dr,$$

$$D_{nj} = \frac{4g\pi^2 (-1)^j \eta}{(\alpha_j^2 - \eta^2) \omega_{nj} \hat{\chi}'_{nj} (\alpha_j R_1) d N_{nl}^2} \left[k_{nl} \int_{R_1}^{R_2} \hat{\chi}'_{nj} \chi'_{nl} \chi_{nl} r dr + \alpha_j \int_{R_1}^{R_2} \hat{\chi}'_{nj} \chi_{nl}^2 r dr \right],$$

$$\alpha_0 = k_{nl} \operatorname{th} k_{nl} d, \quad \alpha_2 = \frac{1}{N_{nl}^4} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \left[k_{nl}^2 \psi^2 - \psi_r^2 - \frac{1}{r^2} \psi_\theta^2 \right] \psi^2 r dr d\theta,$$

$$\psi = \psi_{nl}^c(r, \Theta), \quad L_{0h} = \frac{\pi k_{nl} k_{0h}}{N_{0h} N_{nl}^2} \int_{R_1}^{R_2} \chi'_{nl} \chi'_{0h} (k_{0h} r) \chi_{nl} r dr - \frac{\pi (k_{0h})^2}{N_{0h} N_{nl}^2} \int_{R_1}^{R_2} \chi_{nl}^2 \chi_{0h} r dr,$$

$$M_{0h} = \frac{\pi k_{nl}}{N_{0h} N_{nl}^2} \left(k_{0h} \int_{R_1}^{R_2} \chi'_{nl} \chi'_{0h} \chi_{nl} r dr - k_{nl} \int_{R_1}^{R_2} \chi_{0h} \chi_{nl}^2 r dr \right).$$

Соотношение (21) позволяет выразить $\varphi_{nl}(t)$ следующим образом:

$$\varphi_{nl}(t) = \frac{1}{\alpha_0} \dot{\xi}_{nl} \left(1 - \alpha_2 \xi_{nl}^2 + \frac{1}{\alpha_0} \xi_{0h} M_{0h} - \frac{\xi_{00}}{\alpha_0} k_{nl}^2 \right) + \frac{1}{\alpha_0} \xi_{nl}(t) [\varphi_{0h} L_{0h} - \varepsilon_1 (\sin \omega t) D]. \quad (22)$$

Применяя процедуру Бубнова по резонансной моде $\chi_{0h}(r)$, из кинематического условия на свободной поверхности получаем соотношение

$$\varphi_{0h}(k_{0h} \operatorname{th} k_{0h} d) = \dot{\xi}_{0h}(t) + \xi_{nl} \varphi_{nl}(k_{nl} \operatorname{th} k_{nl} d) B_{0h}^*.$$

Определяя φ_{0h} с точностью до членов $O(\varepsilon_1)$, в (22) можно использовать приближение

$$\varphi_{nl} = \frac{\dot{\xi}_{nl}}{\alpha_0} = \frac{\dot{\xi}_{nl}}{k_{nl} \operatorname{th} k_{nl} d}.$$

Тогда получим

$$\varphi_{0h} = \frac{\dot{\xi}_{0h}}{k_{0h} \operatorname{th} k_{0h} d} + \xi_{nl} \dot{\xi}_{nl} B_{0h}^*, \quad (23)$$

$$B_{0h}^* = \frac{\pi}{(N_{0h})(N_{nl})^2 (k_{nl} \operatorname{th} k_{nl} d) (k_{0h} \operatorname{th} k_{0h} d)} \left\{ -k_{nl}^2 \int_{R_1}^{R_2} \chi_{nl}^2 \chi_{0h} r dr + \right.$$

$$\left. + (k_{nl})^2 \int_{R_1}^{R_2} (\chi'_{nl})^2 \chi_{0h} r dr + n^2 \int_{R_1}^{R_2} \chi_{nl}^2 \chi_{0h} \frac{1}{r} dr \right\}.$$

Применим теперь динамическое граничное условие на свободной поверхности, используя соотношения (22) и (23). После подстановки указанных соотношений будем иметь

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi}_{nl} + \left(\alpha_5 + S_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \right) \ddot{\xi}_{nl} \xi_{nl}^2 + \omega_{nl}^2 \xi_{nl} + \\ & + \left(\frac{\alpha_6}{\alpha_0} - \frac{2\alpha_2}{\alpha_0} + S_2 \right) \dot{\xi}_{nl}^2 \xi_{nl} - \varepsilon_1 \frac{D}{\alpha_0} \omega \xi_{nl}(t) \cos \omega t - \\ & - \varepsilon_1 \frac{D}{\alpha_0} \dot{\xi}_{nl} \frac{g\omega}{\omega_{nl}^2} \sin \omega t + \varepsilon_1 \alpha_0 \omega_{nl}^2 \xi_{nl} \left(\frac{g \cos \omega t}{\omega_{nl}} \right) \sum_j H_{nj} + \\ & + \varepsilon_1 \alpha_0 \dot{\xi}_{nl} \frac{g\omega}{\omega_{nl}^2} \sin \omega t \sum_j H_{nj} - \varepsilon_1 \dot{\xi}_{nl} \sin \omega t \left(\frac{4g}{\omega_{nl}} \right) \sum_j F_{nj} - \\ & - \omega_{nl}^2 \xi_{nl} \xi_{0h} S_{3h} + \dot{\xi}_{nl} \dot{\xi}_{0h} R_{3h} + \omega_{nl}^2 \xi_{nl} \xi_{00} \left(\frac{k_{nl}^2}{\alpha_0} - \alpha_0 \right) - \frac{k_{nl}^2}{\alpha_0} \dot{\xi}_{nl} \dot{\xi}_{00} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= B_{0h}^* (L_{0h} + \alpha_0 (k_{0h} \operatorname{th} k_{0h} d) S_{0h}), \\ S_2 &= B_{0h}^* (2L_{0h} + R_{0h} + \alpha_0 (k_{0h} \operatorname{th} k_{0h} d) S_{0h}), \\ \alpha_2 &= \frac{1}{N_{nl}^4} \int \int \left(k_{nl} \psi^2 - \psi_r^2 - \frac{1}{r^2} \psi_\Theta^2 \right) \psi_r^2 dr d\theta, \\ \alpha_5 &= \frac{k_{nl}^2}{N_{nl}^4} \int \int \psi_r^4 dr d\theta, \quad \alpha_6 = \int \int \left(\psi_r^2 + \frac{1}{r^2} \psi_\Theta^2 \right) \psi_r^2 dr d\theta, \\ H_{nj} &= \frac{g G_{nj} \pi b_{nj}}{\omega_{nl}^2} \alpha_0, \\ F_{nj} &= \frac{(-1)^j 8 g \eta \pi k_{nl}}{(\alpha_j^2 - \eta^2) \omega d N_{nl}^2 \hat{\chi}_{0j}' (\alpha_{0j} R_1)} \int \int \hat{\chi}'_{0j} \chi'_{nl} \chi_{nl} r dr, \\ S_{3h} &= \frac{M_{0h}}{\alpha_0} + 5d_0 S_{0h} + 4 \frac{L_{0h}}{k_{0h}} \operatorname{th} k_{0h} d, \\ R_{3h} &= \frac{M_{0h}}{\alpha_0} + \frac{L_{0h} + R_{0h}}{k_{0h}} \operatorname{th} k_{0h} d, \\ R_{0h} &= \frac{k_{0h} k_{nl} \pi}{N_{nl}^2 N_{0h}} \left(\operatorname{th} k_{0h} d \operatorname{th} k_{nl} d \int_{R_1}^{R_2} \chi_{0h} \chi_{nl}^2 r dr + \int_{R_1}^{R_2} \chi'_{0h} \chi'_{nl} \chi_{nl} r dr \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для амплитуды крестовидных волн получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi}_{nl} + \omega_{nl}^2 \xi_{nl} + V_1 \ddot{\xi}_{nl} \xi_{nl}^2 + V_2 \dot{\xi}_{nl}^2 \xi_{nl} + \\ & + V_4 \xi_{nl} \cos \omega t + V_5 \dot{\xi}_{nl} \sin \omega t - V_6 \xi_{nl} \xi_{0h} + V_7 \dot{\xi}_{nl} \dot{\xi}_{0h} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Постоянные коэффициенты в уравнении (24) таковы:

$$V_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_0} + \alpha_5 + S_1, \quad V_2 = \frac{\alpha_6}{\alpha_0} - \frac{2\alpha_2}{\alpha_0} + S_2,$$

$$V_4 = -\varepsilon_1 \frac{D}{\alpha_0} \omega + \varepsilon_1 \alpha_0 \omega_{nl} g \sum_j H_{nj} + \omega_{nl}^2 \left(\frac{k_{nl}^2}{\alpha_0} - \alpha_0 \right) \frac{4R_1 a_1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)},$$

$$V_5 = \frac{-\varepsilon_1 D}{\alpha_0} + \varepsilon_1 \alpha_0 2g \sum_j H_{nj} - \varepsilon_1 \frac{4g}{\omega_{nl}} \sum_j F_{nj} + \frac{4k_{nl}^2 \omega R_1 d a_1}{\alpha_0 \pi (R_2^2 - R_1^2)},$$

$$V_6 = \omega_{nl}^2 S_{3h}, \quad V_7 = R_{3h}.$$

Применим динамическое граничное условие на свободной поверхности, используя соотношение (23). В результате после подстановки в условие (ограничиваясь членами $O(\varepsilon_1)$)

$$(\varphi_1)_t + \xi (\varphi_1)_{tx} + (\varphi_2)_t + g\xi + \frac{1}{2} \left[(\varphi_1)_x^2 + (\varphi_1)_r^2 + \frac{1}{r^2} (\varphi_1)_\theta^2 \right] = 0$$

получаем, используя процедуру Бубнова по форме χ_{0h} , уравнение вида

$$\ddot{\xi}_{0h} + \omega_{0h}^2 \xi_{0h} + \xi_{nl}^2 V_8 + V_9 \xi_{nl} \ddot{\xi}_{nl} = V_{10} \cos \omega t,$$

где

$$V_8 = \frac{\pi}{N_{nl}^2 N_{0h}} \left\{ \frac{1}{k_{nl}} \operatorname{th} k_{nl} d \left[-k_{nl}^2 \int_{R_1}^{R_2} \chi_{nl}^2 \chi_{0h} r dr + k_{nl}^2 \int_{R_1}^{R_2} (\chi_{nl}')^2 \chi_{0h} r dr + \right. \right.$$

$$\left. \left. + n^2 \int_{R_1}^{R_2} \chi_{nl}^2 \chi_{0h} \frac{1}{r} dr \right] + (k_{0h} \operatorname{th} k_{0h} d) \int_{R_1}^{R_2} \chi_{nl}^2 \chi_{0h} r dr \right\},$$

$$V_9 = \frac{\pi}{N_{nl}^2 N_{0h} k_{nl} \operatorname{th} k_{nl} d} \left\{ \left[-k_{nl} \int_{R_1}^{R_2} \chi_{nl}^2 \chi_{0h} r dr + k_{nl}^2 \int_{R_1}^{R_2} (\chi_{nl}')^2 \chi_{0h} r dr + \right. \right.$$

$$\left. \left. + n^2 \int_{R_1}^{R_2} \chi_{nl}^2 \chi_{0h} \frac{1}{r} dr \right] + \frac{k_{0h} \operatorname{th} k_{0h} d}{2(k_{nl} \operatorname{th} k_{nl} d)} \left[(k_{nl} \operatorname{th} k_{nl} d)^2 \int_{R_1}^{R_2} \chi_{nl}^2 \chi_{0h} r dr + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (k_{nl})^2 \int_{R_1}^{R_2} (\chi_{nl}')^2 \chi_{0h} r dr + n^2 \int_{R_1}^{R_2} \chi_{nl}^2 \chi_{0h} \frac{1}{r} dr \right] \right\},$$

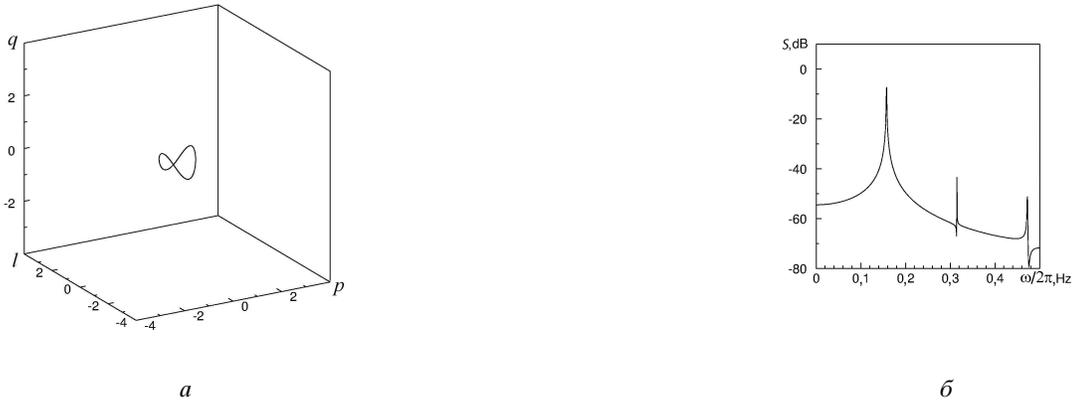


Рис. 1. Фазовый портрет (а) и частотный спектр временной реализации (б) квазипериодического режима системы при $V_3 = V_{11} = 0,01$, $k = 0,1$.

$$V_{10} = \varepsilon_1 2\omega_{0h} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \eta}{(\alpha_j^2 - \eta^2) \alpha_j d\hat{X}'_{0j}(\alpha_j R_1) N_{0h}} \int_{R_1}^{R_2} \hat{\chi}_{0j}(\alpha_j r) \chi_{0h} r dr - \frac{4g k_{0h}^2 R_1}{\pi \omega^2 (R_2^2 - R_1^2)}.$$

Двухмодовые колебания жидкости между двумя цилиндрами с учетом сил демпфирования [24] описываются системой вида

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_{nl} + \omega_{nl}^2 \xi_{nl} + V_1 \ddot{\xi}_{nl} \xi_{nl}^2 + V_2 \dot{\xi}_{nl}^2 \xi_{nl} + V_3 \dot{\xi}_{nl} + \\ + V_4 \xi_{nl} \cos \omega t + V_5 \dot{\xi}_{nl} \sin \omega t - V_6 \xi_{nl} \xi_{0h} + V_7 \dot{\xi}_{nl} \dot{\xi}_{0h} = 0, \\ \ddot{\xi}_{0h} + \omega_{0h}^2 \xi_{0h} + V_8 \dot{\xi}_{nl}^2 + V_9 \xi_{nl} \ddot{\xi}_{nl} - V_{10} \cos \omega t + V_{11} \dot{\xi}_{0h} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Система (25) нелинейная, поэтому все классы установившихся режимов можем найти только численно. Для этого параметры системы после обезразмеривания выберем согласно расчетам в виде

$$\begin{aligned} V_1 = 0,1, \quad V_2 = 0,12, \quad V_3 = 0,01, \quad V_4 = 0,65k, \quad V_5 = 0,65k, \quad V_6 = 0,08, \quad V_7 = -0,03, \\ V_8 = 0,26, \quad V_{10} = -0,47k, \quad V_{11} = 0,01, \quad \omega_{nl} = 1, \quad \omega = 1,99, \quad \omega_{0h} = 1,98. \end{aligned}$$

Пусть начальные значения неизвестных будут таковы: $\xi_{nl} = p = 0,3$, $\dot{\xi}_{nl} = l = 0,2$, $\xi_{0h} = q = 0,1$, $\dot{\xi}_{0h} = 0,1$. В качестве бифуркационного параметра выберем параметр k , который пропорционален амплитуде колебаний волнопродуктора a_1 . При изменении этого параметра в системе реализуются как регулярные, так и хаотические крестовидные волны.

На рис. 1, а, 2, а и 3, а построены графики трехмерных проекций (в пространстве p , l , q) четырехмерных фазовых портретов аттракторов системы при различных значениях k . Из этих рисунков видно, что аттракторы представляют собой замкнутую кривую, соответствующую предельному циклу для $k = 0,1$ (рис. 1, а), кривую, равномерно покры-

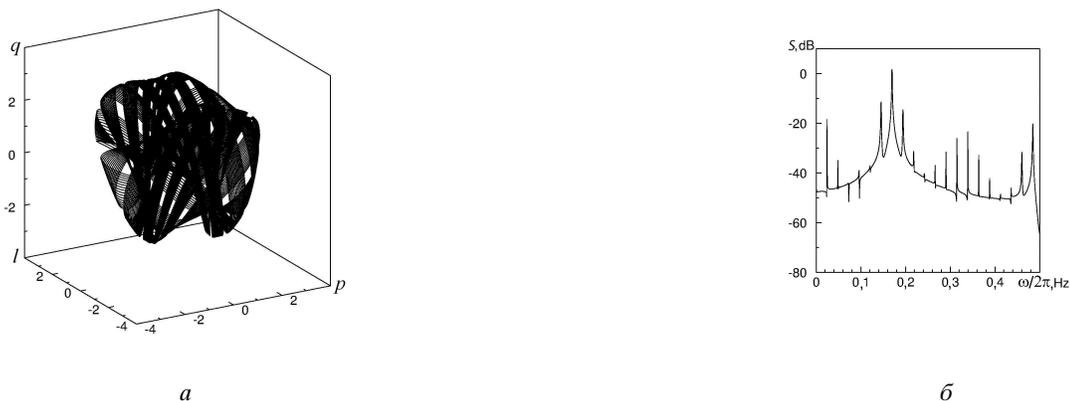


Рис. 2. Фазовый портрет (а) и частотный спектр временной реализации (б) регулярного режима системы при $V_3 = V_{11} = 0,01$, $k = 1$.

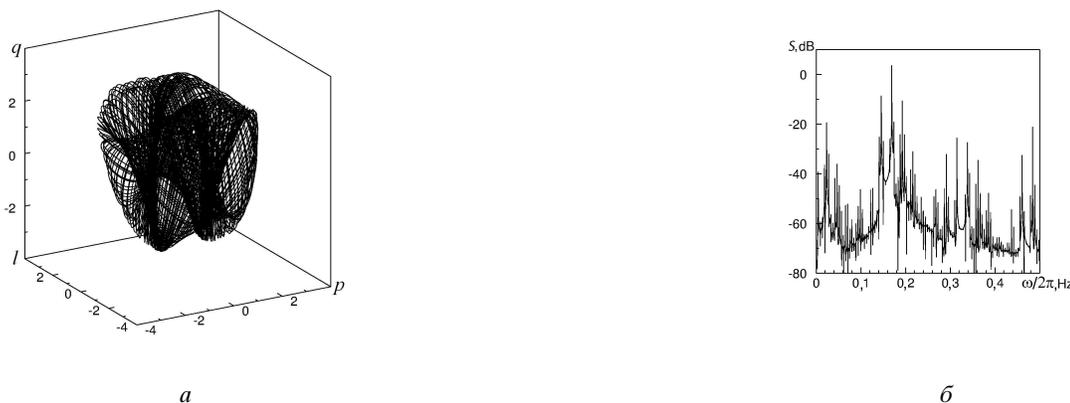


Рис. 3. Фазовый портрет (а) и частотный спектр временной реализации (б) хаотического режима системы при $V_3 = V_{11} = 0,001$, $k = 0,75$.

вающую тороидальную поверхность при $k = 1$ (рис. 2, а). При $k = 0,75$ и $V_3 = V_{11} = 0,01$ аналогичная проекция выглядит как сложная структура с „рваным” контуром проекции и с огромным числом оборотов непересекающейся кривой, неравномерно покрывающей поверхность (рис. 3, а), что соответствует странному, т.е. хаотическому аттрактору. На рис. 1, б, 2, б и 3, б построены графики спектральной мощности колебаний S переменной ξ_{nl} при различных значениях k , т. е. для различных режимов. На рис. 1, б и 2, б для регулярных режимов графики спектральной мощности содержат ряд отдельных пиков, эквидистантно расположенных по частоте. Движение переменной ξ_{nl} в регулярных режимах характеризуется несколькими частотными (остальные компоненты сравнительно пренебрежимо малы) компонентами при аппроксимации рядом Фурье. На рис. 3, б график спектральной мощности колебаний переменной ξ_{nl} представляет собой непрерывную кривую, имеющую ненулевые амплитуды для определенных областей частот. Это подтверждает реализацию хаотических режимов для установившихся решений системы (25).

4. Выводы. Таким образом, можно заключить, что при двухмодовой аппроксимации колебаний свободной поверхности жидкости при реализации резонансных условий для крестовидной и осесимметричной мод были впервые найдены все классы установившихся режимов, включая хаотические, описаны их фазовые портреты и исследованы частотные спектры.

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. — Киев: Наук. думка, 1981. — 284 с.
2. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. — Киев: Наук. думка, 1985. — 280 с.
3. *Краснопольская Т. С., Подчасов Н. П.* Волны в жидкости между двумя коаксиальными цилиндрическими оболочками, индуцированные вибрациями внутреннего цилиндра // Прикл. механика. — 1992. — **28**, № 3. — С. 42–48.
4. *Краснопольская Т. С., Подчасов Н. П.* Вынужденные колебания жидкости между двумя цилиндрами, возбуждаемые вибрациями внутренней оболочки // Прикл. механика. — 1992. — **28**, № 4. — С. 42–48.
5. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984. — 471 с.
6. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. — Киев: Наук. думка, 1984. — 232 с.
7. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. — Киев: Наук. думка, 1990. — 296 с.
8. *Лэмб Г.* Гидродинамика. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. — 928 с.
9. *Мацыгура В. Т., Вовк И. В., Гринченко В. Т.* Волновые задачи акустики. — Киев: Интерсервис, 2013. — 571 с.
10. *Becker J. M., Miles J. W.* Standing radial cross-waves // J. Fluid Mech. — 1991. — **222**. — P. 471–499.
11. *Becker J. M., Miles J. W.* Progressive radial cross-waves // J. Fluid Mech. — 1992. — **245**. — P. 29–46.
12. *Bromwich T. J. I.* An introduction to the theory of infinite series. — London: Macmillan, 1959. — 607 p.
13. *Faraday M.* On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. — 1831. — **121**. — P. 299–340.
14. *Garrett C. J. R.* Cross waves // J. Fluid Mech. — 1970. — **41**. — P. 837–849.
15. *Havelock T. H.* Forced surface waves on water // Phil. Mag. (Ser. 7). — 1929. — **8**. — P. 569–576.
16. *Hocking L. M., Mahdmina D.* Capillary-gravity waves produced by a wavemaker // J. Fluid Mech. — 1991. — **224**. — P. 217–226.
17. *Krasnopolskaya T. S., van Heijst G. J. F.* Wave pattern formation in a fluid annulus with a vibrating inner shell // J. Fluid Mech. — 1996. — **328**. — P. 229–252.
18. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. London A. — 1917. — **93**. — P. 114–128.
19. *Lamé G.* Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. — Paris : Bachelier, 1852. — 335 p.
20. *Lebedev N. N., Skal'skaya I. P., Uflyand Ya. S.* Problems in mathematical physics. — Oxford: Pergamon, 1966. — 287 p.
21. *Luke J. C.* A variational principle for a fluid with a free surface // J. Fluid Mech. — 1967. — **27**. — P. 395–397.
22. *Meleshko V. V.* Steady Stokes flow in a rectangular cavity // Proc. Roy. Soc. London. — 1996. — **452**. — P. 1999–2022.
23. *Meleshko V. V., Malyuga V. S., Gomilko A. M.* Steady Stokes flow in a finite cylinder // Proc. Roy. Soc. London A. — 2000. — **456**. — P. 1741–1758.
24. *Miles J. W.* Surface-wave damping in closed basins // Proc. Roy. Soc. London A. — 1967. — **297**. — P. 459–475.
25. *Miles J. W.* Internally resonant surface waves in circular cylinder // J. Fluid Mech. — 1984. — **149**. — P. 1–14.
26. *Miles J. W., Henderson D.* Parametrically forced surface waves // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1990. — **22**. — P. 143–165.

Получено 11.06.15