УДК 517.9

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. К. Дауылбаев, А. Е. Мирзакулова

Казах. нац. ун-т им. аль-Фараби
просп. Аль-Фараби, 71, Алматы, 050040, Республика Казахстан
e-mail: dmk57@mail.ru

We study the two-point boundary-value problem for singularly perturbed third order integro-differential equations with the small parameter in two principal terms. The asymptotic convergence of the solution to the solution of a some degenerate boundary-value problem is established.

Вивчається двоточкова крайова задача для сингулярно збурених інтегро-диференціальних рівнянь третього порядку з малим параметром при двох старших похідних. Встановлено асимптотичну збіжність розв'язку цієї задачі до розв'язку деякої виродженої крайової задачі.

Введение. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения, содержащие малый параметр при старших производных, служат математическими моделями многих процессов в физике, астрофизике, химии, биологии, механике, технике и т. д. Такие уравнения в настоящее время принято называть сингулярно возмущенными. Систематическое развитие теории сингулярно возмущенных уравнений начинается с основополагающих работ А. Н. Тихонова [1, 2]. В дальнейшее развитие основных направлений этой теории значительный вклад внесли Л. С. Понтрягин [3], Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов [4], Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский [5, 6], М. И. Вишик, Л. А. Люстерник [7], А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов [8], С. А. Ломов [9], М. И. Иманалиев [10] и др.

В работах М. И. Вишика, Л. А. Люстерника [11] и К. А. Касымова [12] впервые изучены начальные задачи для сингулярно возмущенных уравнений с неограниченными начальными данными при стремлении малого параметра к нулю, которые называются задачами Коши с начальным скачком. Характерной особенностью таких задач является то, что решение сингулярно возмущенной задачи при стремлении малого параметра к нулю стремится к решению вырожденного уравнения с измененными начальными условиями. В таком случае говорят, что имеет место явление начального скачка решения.

При исследовании некоторых краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной возникает случай, когда решения или производные от решения в начальной точке принимают бесконечно большие значения при достаточно малых значениях параметра. Такие краевые задачи оказываются эквивалентными задачам Коши с начальным скачком. Для исследования асимптотического поведения решений таких краевых задач К. А. Касымовым разработан интегральный метод представления решения [13].

Настоящая работа посвящена исследованию краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с малым параметром при двух старших производных, обладающих явлением начального скачка.

Постановка задачи. Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при двух старших производных вида

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_0(t)y'' + A_1(t)y' + A_2(t)y = F(t) + \int\limits_0^1 \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x)y^{(i)}(x,\varepsilon)dx \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$h_1 y(t,\varepsilon) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha, \quad h_2 y(t,\varepsilon) \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta, \quad h_3 y(t,\varepsilon) \equiv y(1,\varepsilon) = \gamma, \qquad (2)$$

где α, β, γ — некоторые известные постоянные, не зависящие от ε.

Предположим, что выполнены следующие условия:

I. Функции $A_i(t)$, $i = \overline{0,2}$, $F(t)$ являются достаточно гладкими на отрезке $0 \le t \le \le 1$, а $H_0(t,x), H_1(t,x)$ — в области $D = \{0 \le t \le 1, 0 \le x \le 1\}$, т. е. дифференцируемы столько раз, сколько потребуется в ходе рассуждений.

II. Корни $\mu_i(t), i = 1,2,$ уравнения $\mu^2 + A_0(t)\mu + A_1(t) = 0$ удовлетворяют неравенствам $\mu_1(t) < -\gamma_1 < 0$, $\mu_2(t) > \gamma_2 > 0$, $\gamma_i > 0$, $i = 1,2$.

III. Число 1 не является собственным значением ядра

$$H(t,s) = \frac{H_1(t,s)}{A_1(s)} + \int\limits_s^1 \frac{1}{A_1(s)} \left(H_0(t,x) - H_1(t,x)\frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) \exp\left(-\int\limits_s^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)}dp \right) dx.$$

Фундаментальная система решений. Для фундаментальной системы решений сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_0(t)y'' + A_1(t)y' + A_2(t)y = 0 \qquad (3)$$

справедливо асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ представление [14]

$$y_1^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t \mu_1(x)dx \right) \left(\mu_1^q(t) y_{10}(t) + O(\varepsilon) \right), \quad q = \overline{0,2},$$

$$y_2^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_t^1 \mu_2(x)dx \right) \left(\mu_2^q(t) y_{20}(t) + O(\varepsilon) \right), \quad q = \overline{0,2}, \qquad (4)$$

$$y_3^{(q)}(t,\varepsilon) = y_{30}^{(q)}(t) + O(\varepsilon), \quad q = \overline{0,2},$$

где $y_{30}(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)}\,dx \right)$, а $y_{i0}(t), i = 1,2,$ — решения задач $p_i(t)y_{i0}'(t) + q_i(t)y_{i0}(t) = = 0$, $y_{i0}(0) = 1$, $i = 1,2$, где $p_i(t) = (A_0(t) + 2\mu_i(t))\mu_i(t) \ne 0$, $q_i(t) = A_2(t) + A_0(t)\mu_i'(t) + +3\mu_i(t)\mu_i'(t)$.

Для вронскиана $W(t,\varepsilon)$ в силу (4) справедливо асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ представление

$$W(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^3}\,\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu_1(x)dx - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 \mu_2(x)dx\right) \times$$
$$\times\left(y_{10}(t)y_{20}(t)y_{30}(t)\mu_1(t)\mu_2(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)) + O(\varepsilon)\right). \tag{5}$$

Построение вспомогательных функций. Введем функции

$$K_0(t,s,\varepsilon) = \frac{P_0(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)}, \quad K_1(t,s,\varepsilon) = \frac{P_1(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)}, \tag{6}$$

где $P_0(t,s,\varepsilon)$, $P_1(t,s,\varepsilon)$ — определители, получаемые из вронскиана $W(s,\varepsilon)$ заменой его третьей строки строками $y_1(t,\varepsilon), 0, y_3(t,\varepsilon)$ и $0, y_2(t,\varepsilon), 0$ соответственно. Функции $K_0(t,s,\varepsilon)$, $K_1(t,s,\varepsilon)$ удовлетворяют по переменной t однородному уравнению (3). Функция $K(t,s,\varepsilon) = K_0(t,s,\varepsilon) + K_1(t,s,\varepsilon)$ называется функцией Коши и является решением задачи

$$L_\varepsilon K(t,s,\varepsilon) = 0, \quad K(s,s,\varepsilon) = 0, \quad K'(s,s,\varepsilon) = 0, \quad K''(s,s,\varepsilon) = 1.$$

Для функции $K_0(t,s,\varepsilon)$, $K_1(t,s,\varepsilon)$ в силу (4)–(6) справедливы асимптотические при $\varepsilon \to 0$ представления

$$\begin{aligned}
K_0^{(q)}(t,s,\varepsilon) &= \varepsilon^2\left(\frac{y_{30}^{(q)}(t)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)} - \frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)}{\varepsilon^q y_{10}(s)\mu_1(s)\left(\mu_2(s)-\mu_1(s)\right)}\times\right.\\
&\left.\times\,\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu_1(x)dx\right) + O(\varepsilon)\right), \quad t \ge s,\\
K_1^{(q)}(t,s,\varepsilon) &= \varepsilon^2\left(\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)}{\varepsilon^q y_{20}(s)\mu_2(s)\left(\mu_2(s)-\mu_1(s)\right)}\times\right.\\
&\left.\times\,\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^s \mu_2(x)dx\right) + O(\varepsilon)\right), \quad t \le s, \quad q = \overline{0,2},
\end{aligned} \tag{7}$$

из которых следуют асимптотические оценки

$$\begin{aligned}
\left|K_0^{(q)}(t,s,\varepsilon)\right| &\le C\varepsilon^2 + \frac{C}{\varepsilon^{q-2}}e^{-\gamma_1\frac{t-s}{\varepsilon}}, \quad q = 0,1,2, \quad t \ge s,\\
\left|K_1^{(q)}(t,s,\varepsilon)\right| &\le \frac{C}{\varepsilon^{q-2}}e^{-\gamma_2\frac{s-t}{\varepsilon}}, \quad q = 0,1,2, \quad t \le s,
\end{aligned} \tag{8}$$

где $C > 0$ — постоянные, не зависящие от ε.

Пусть функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=1,2,3$, являются решениями задачи

$$L_\varepsilon \Phi_i(t,\varepsilon)=0, \quad h_k\Phi_i(t,\varepsilon)=\delta_{ki}, \quad i,k=1,2,3, \tag{9}$$

где δ_{ki} — символ Кронекера.

Функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=1,2,3$, называются граничными функциями и выражаются формулой

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{I_i(t,\varepsilon)}{I(\varepsilon)}, \tag{10}$$

где

$$I(\varepsilon)=\begin{vmatrix} y_1(0,\varepsilon) & y_2(0,\varepsilon) & y_3(0,\varepsilon) \\ y_1'(0,\varepsilon) & y_2'(0,\varepsilon) & y_3'(0,\varepsilon) \\ y_1(1,\varepsilon) & y_2(1,\varepsilon) & y_3(1,\varepsilon) \end{vmatrix}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\mu_1(0)y_{20}(1)+O(\varepsilon)\right)\neq 0, \tag{11}$$

а $I_i(t,\varepsilon)$ — определитель, получаемый из $I(\varepsilon)$ заменой его i-й строки строкой $y_1(t,\varepsilon)$, $y_2(t,\varepsilon)$, $y_3(t,\varepsilon)$.

Для граничных функции $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i=1,2,3$, из (10) в силу (4), (11) получаем асимптотические при $\varepsilon\to 0$ представления

$$\Phi_1^{(q)}(t,\varepsilon)=y_{30}^{(q)}(t)-\frac{\mu_1(t)y_{10}(t)y_{30}'(0)}{\varepsilon^{q-1}\mu_1(0)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_1(x)dx\right)+$$

$$+\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)y_{30}(1)}{\varepsilon^q y_{20}(1)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1\mu_2(x)dx\right)+$$

$$+O\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{q-2}}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_1(x)dx\right)+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1\mu_2(x)dx\right)\right), \quad q=\overline{0,2},$$

$$\Phi_2^{(q)}(t,\varepsilon)=-\varepsilon\frac{y_{30}^{(q)}(t)}{\mu_1(0)}+\frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)}{\varepsilon^{q-1}\mu_1(0)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_1(x)dx\right)+$$

$$+\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)y_{30}(1)}{\varepsilon^{q-1}\mu_1(0)y_{20}(1)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1\mu_2(x)dx\right)+O\left(\varepsilon^2+\varepsilon^{2-q}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu_1(x)dx\right)+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{2-q}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1\mu_2(x)dx\right)\right), \quad q=\overline{0,2}, \tag{12}$$

$$\Phi_3^{(q)}(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^q}\frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)}{y_{20}(1)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1\mu_2(x)dx\right)+O\left(\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1\mu_2(x)dx\right)\right), \ q=\overline{0,2},$$

откуда следуют асимптотические при $\varepsilon \to 0$ оценки

$$\begin{aligned}
&\left|\Phi_1^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C + \frac{C}{\varepsilon^{q-1}}\, e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon^{q}}\, e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}, \quad q = 0,1,2,\\
&\left|\Phi_2^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon^{q-1}}\, e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon^{q-1}} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}, \quad q = 0,1,2, \qquad (13)\\
&\left|\Phi_3^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le \frac{C}{\varepsilon^{q}}\, e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}, \quad q = 0,1,2,
\end{aligned}$$

где $C > 0$ — постоянные, не зависящие от ε.

Аналитическое представление решений. Решение задачи (1), (2) ищем в виде

$$\begin{aligned}
y(t,\varepsilon) = {}& C_1\Phi_1(t,\varepsilon) + C_2\Phi_2(t,\varepsilon) + C_3\Phi_3(t,\varepsilon) + \\
&+ \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t K_0(t,s,\varepsilon) z(s,\varepsilon) ds - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_t^1 K_1(t,s,\varepsilon) z(s,\varepsilon) ds, \qquad (14)
\end{aligned}$$

где $\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i = 1,2,3,$ — граничные функции, являющиеся решениями задачи (9) и выражаемые формулой (10), $K_0(t,s,\varepsilon)$, $K_1(t,s,\varepsilon)$ — функции, представимые формулой (6), C_i, $i = 1,2,3,$ — неизвестные постоянные величины, $z(t,\varepsilon)$ — пока неизвестная функция. Подставляя (14) в (1), для определения функций $z(t,\varepsilon)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$z(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon) + \int_0^1 H(t,s,\varepsilon) z(s,\varepsilon) ds, \qquad (15)$$

где

$$\begin{aligned}
f(t,\varepsilon) = {}& F(t) + C_1 \int_0^1 \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x)\Phi_1^{(i)}(x,\varepsilon)\, dx + C_2 \int_0^1 \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x)\Phi_2^{(i)}(x,\varepsilon)\, dx + \\
&+ C_3 \int_0^1 \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x)\Phi_3^{(i)}(x,\varepsilon)\, dx,
\end{aligned}$$

$$H(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^1 \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x) K_0^{(i)}(x,s,\varepsilon) dx - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^s \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x) K_1^{(i)}(x,s,\varepsilon)\, dx.$$

Интегральное уравнение (15) в силу условия III имеет единственное решение, представимое в виде

$$z(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon) + \int_0^1 R(t,s,\varepsilon) f(s,\varepsilon)\, ds, \qquad (16)$$

где $R(t,s,\varepsilon)$ — резольвента ядра $H(t,s,\varepsilon)$. Подставляя (16) в (14), получаем решение краевой задачи (1), (2) в виде

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{3} C_i Q_i(t,\varepsilon) + P(t,\varepsilon), \tag{17}$$

где

$$\begin{gathered}
Q_i(t,\varepsilon) = \Phi_i(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t K_0(t,s,\varepsilon)\overline{\varphi_i}(s,\varepsilon)ds - \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_t^1 K_1(t,s,\varepsilon)\overline{\varphi_i}(s,\varepsilon)ds,\\
P(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t K_0(t,s,\varepsilon)\overline{F}(s,\varepsilon)ds - \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_t^1 K_1(t,s,\varepsilon)\overline{F}(s,\varepsilon)ds,\\
\bar{\varphi}_i(s,\varepsilon) = \int\limits_0^1 \sum_{j=0}^{1} \bar{H}_j(s,x,\varepsilon)\Phi_i^{(j)}(x,\varepsilon)dx, \quad \overline{F}(s,\varepsilon) = F(s) + \int\limits_0^1 R(s,p,\varepsilon)F(p)dp,\\
\bar{H}_j(s,x,\varepsilon) \equiv H_j(s,x) + \int\limits_0^1 R(s,p,\varepsilon)H_j(p,x)dp = \bar{H}_j(s,x) + O(\varepsilon).
\end{gathered} \tag{18}$$

Для определения неизвестных в (17) постоянных $C_i,\ i=1,2,3$, в силу краевых условий (2) получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&C_1Q_1(0,\varepsilon) + C_2Q_2(0,\varepsilon) + C_3Q_3(0,\varepsilon) = \alpha - P(0,\varepsilon),\\
&C_1Q_1'(0,\varepsilon) + C_2Q_2'(0,\varepsilon) + C_3Q_3'(0,\varepsilon) = \beta - P'(0,\varepsilon),\\
&C_1Q_1(1,\varepsilon) + C_2Q_2(1,\varepsilon) + C_3Q_3(1,\varepsilon) = \gamma - P(1,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{19}$$

Для главного определителя $\delta(\varepsilon)$ системы (19) с учетом (7), (12), (18) имеем асимптотическое представление $\delta(\varepsilon) = \bar{\delta} + O(\varepsilon)$, где $\bar{\delta} = 1 + \int_0^1 \frac{y_{30}(1)\bar{H}_1(s,1)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}ds.$

Пусть выполнено условие

IV. $\bar{\delta} \neq 0.$

Тогда из (19) однозначно определяются неизвестные постоянные $C_i,\ i=1,2,3$, для которых с учетом (7), (12), (18) справедливо асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ представление

$$\begin{gathered}
C_1 = \alpha + O(\varepsilon), \quad C_3 = -\alpha B_1 + \gamma B_2 - B_3 + O(\varepsilon),\\
C_2 = \beta + \alpha\left(\frac{\bar{H}_1^0(0,1)}{\mu_1(0)\mu_2(0)}B_1 - \frac{1}{\mu_2(0)\left(\mu_2(0)-\mu_1(0)\right)}\left(-\bar{H}_1^0(0,1) + \int\limits_0^1 \sum_{i=0}^{1} \bar{H}_i^0(0,x)y_{30}^{(i)}(x)dx\right)\right) +\\
+ \gamma\frac{\bar{H}_1^0(0,1)}{\mu_1(0)\mu_2(0)}B_2 + \frac{\bar{H}_1^0(0,1)}{\mu_1(0)\mu_2(0)}B_3 + \frac{\overline{F}(0)}{\mu_2(0)\left(\mu_2(0)-\mu_1(0)\right)} + O(\varepsilon),
\end{gathered} \tag{20}$$

где

$$B_1 = \frac{1}{\bar{\bar{\delta}}} \int\limits_0^1 \frac{y_{30}(1)(-\bar{H}_1^0(s,1) + \int_0^1 \sum_{i=0}^1 \bar{H}_i^0(s,x) y_{30}^{(i)}(x)dx)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}\, ds,$$

$$B_2 = \frac{1}{\bar{\bar{\delta}}}, \quad B_3 = \frac{1}{\bar{\bar{\delta}}} \int\limits_0^1 \frac{y_{30}(1)\overline{F}(s)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}\, ds.$$

Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия I – IV. Тогда краевая задача (1), (2) на отрезке* $[0,1]$ *имеет единственное решение, выражаемое формулой (17), где* $Q_i(t,\varepsilon)$, $P(t,\varepsilon)$ *определяются формулами (18), а* C_i, $i = 1,2,3,$ *— решение системы (19), имеющее асимптотическое представление (20).*

Асимптотические оценки решений. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполнены условия I – IV, то для решения* $y(t,\varepsilon)$ *краевой задачи (1), (2) справедливы следующие асимптотические при* $\varepsilon \to 0$ *оценки:*

$$|y(t,\varepsilon)| \le C\left(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right) +$$
$$+ C\varepsilon e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}}\left(|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right) +$$
$$+ Ce^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}\left(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right),$$

$$\left|y'(t,\varepsilon)\right| \le C\left(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right) +$$
$$+ C\, e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}}\left(|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right) +$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon}\, e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}\left(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right), \qquad (21)$$

$$\left|y''(t,\varepsilon)\right| \le C\left(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right) +$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon}\, e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}}\left(|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right) +$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon^2}\, e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}}\left(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\right),$$

где $C > 0$ *— постоянные, не зависящие от* ε.

Доказательство. Из (18) с учетом (8), (13) для функций $Q_i^{(q)}(t,\varepsilon)$, $i=1,2,3$, и $P^{(q)}(t,\varepsilon)$, $q=0,1,2$, получаем асимптотические оценки

$$\begin{aligned}
&\left|Q_1^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left(1+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}e^{-\gamma_1\frac{t}{\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon^{q}}e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\varepsilon}}\right),\\
&\left|Q_2^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}e^{-\gamma_1\frac{t}{\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}\,e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\varepsilon}}\right),\\
&\left|Q_3^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left(1+\frac{1}{\varepsilon^{q}}e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\varepsilon}}\right),\\
&\left|P^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C\max_{0\le t\le 1}|F(t)|\left(1+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}e^{-\gamma_1\frac{t}{\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon^{q-1}}e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\varepsilon}}\right).
\end{aligned}\tag{22}$$

Оценивая (17) с учетом (22) и (20), получаем требуемые оценки (21).

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следует, что решение краевой задачи (1), (2) имеет асимптотическое при $\varepsilon\to 0$ поведение $y(0,\varepsilon)=O(1)$, $y'(0,\varepsilon)=O(1)$, $y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ в точке $t=0$ и $y(1,\varepsilon)=O(1)$, $y'(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, $y''(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$ в точке $t=1$. В таком случае будем говорить, что решение исходной краевой задачи (1), (2) в точке $t=0$ обладает явлением начального скачка первого порядка, а в точке $t=1$ — нулевого порядка.

Вырожденная задача. Пусть $\bar y(t)$ — решение следующего невозмущенного линейного интегро-дифференциального уравнения:

$$L_0\bar y \equiv A_1(t)\bar y' + A_2(t)\bar y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x)\bar y^{(i)}(x)dx + \Delta(t) \tag{23}$$

с краевыми условиями

$$\bar y(0)=\alpha, \quad \bar y(1)=\gamma+\Delta_1, \tag{24}$$

где $\Delta(t)$, Δ_1 — пока неизвестные, так называемые начальные скачки интегрального члена и решения соответственно. $\Delta(t)$ будет определен ниже так, чтобы решение $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) при $\varepsilon\to 0$ стремилось к решению $\bar y(t)$ измененной вырожденной краевой задачи (23), (24). Разность между решением $y(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) и решением $\bar y(t)$ вырожденной задачи (23), (24) обозначим через $u(t,\varepsilon)$. Тогда относительно $u(t,\varepsilon)$ получаем следующую сингулярно возмущенную краевую задачу такого же типа, что и задача (1), (2):

$$\begin{aligned}
&L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 u''' + \varepsilon A_0(t)u'' + A_1(t)u' + A_2(t)u =\\
&\quad = \int_0^1 \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x)u^{(i)}(x\varepsilon)dx - \Delta(t) - \varepsilon^2\overline{y'''} - \varepsilon A_0(t)\bar y'',
\end{aligned}\tag{25}$$

$$u(0,\varepsilon) = 0, \quad u'(0,\varepsilon) = \beta - \overline{y}'(0) \neq 0, \quad u(1,\varepsilon) = -\Delta_1. \tag{26}$$

Применяя к задаче (25), (26) оценку (21), получаем

$$|u(t,\varepsilon)| \leq C\varepsilon|\beta| + C \max_{0\leq t\leq 1} |\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1| + C\varepsilon +$$
$$+ C\varepsilon e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}} \left(|\beta| + \varepsilon + \max_{0\leq t\leq 1} |\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1| \right) +$$
$$+ C e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}} \left(\varepsilon|\beta| + \max_{0\leq t\leq 1} |\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1| + \varepsilon \right),$$
$$|u'(t,\varepsilon)| \leq C\varepsilon|\beta| + C \max_{0\leq t\leq 1} |\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1| + C\varepsilon +$$
$$+ C e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}} \left(|\beta| + \varepsilon + \max_{0\leq t\leq 1} |\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1| \right) +$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}} \left(\varepsilon|\beta| + \max_{0\leq t\leq 1} |\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1| + \varepsilon \right),$$
$$|u''(t,\varepsilon)| \leq C\varepsilon|\beta| + C \max_{0\leq t\leq 1} |\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1| + C\varepsilon +$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon} e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}} \left(|\beta| + \varepsilon + \max_{0\leq t\leq 1} |\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1| \right) +$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}} \left(\varepsilon|\beta| + \max_{0\leq t\leq 1} |\Delta(t) + H_1(t,1)\Delta_1| + \varepsilon \right).$$

Из этих оценок заключаем, что решение $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ стремится к решению $\overline{y}(t)$ невозмущенной задачи (23), (24) при выполнении равенства

$$\Delta(t) = -H_1(t,1)\Delta_1. \tag{27}$$

Таким образом, с учетом (27) невозмущенная задача (23), (24) примет вид интегро-дифференциальной задачи с неизвестным параметром Δ_1:

$$L_0\overline{y} \equiv A_1(t)\overline{y}' + A_2(t)\overline{y} = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x)\overline{y}^{(i)}(x)dx - H_1(t,1)\Delta_1, \tag{28}$$

$$\overline{y}(0) = \alpha, \quad \overline{y}(1) = \gamma + \Delta_1. \tag{29}$$

Задача (28), (29) называется вырожденной задачей. Определим теперь начальный скачок решения Δ_1. Сведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с ядром $H(t,s)$ и с учетом условия III решение уравнения (28) с начальным условием

$\bar{y}(0) = \alpha$ представим в виде

$$\overline{y}(t) = \alpha e^{-\int_0^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx} + \int\limits_0^t \frac{1}{A_1(s)}\, e^{-\int_s^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx} \times$$

$$\times \left[\overline{F}(s) - \bar{H}_1(s,1)\Delta_1 + \alpha \int\limits_0^1 \left(\bar{H}_0(s,x) - \bar{H}_1(s,x)\frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) e^{-\int_0^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)}dp} dx \right] ds, \quad (30)$$

где $\overline{F}(s) = F(s) + \displaystyle\int_0^1 R(s,p)F(p)dp$, $\bar{H}_i(s,x) = H_i(s,x) + \displaystyle\int_0^1 R(s,p)H_i(p,x)dp$, $i = 0, 1$, а $R(t,s)$ — резольвента ядра $H(t,s)$. Чтобы определить Δ_1, функцию $\overline{y}(t)$, определенную формулой (30), подчиним второму условию из (29):

$$\gamma + \Delta_1 = \alpha e^{-\int_0^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx} + \int\limits_0^1 \frac{1}{A_1(s)}\, e^{-\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}\,dx} \times$$

$$\times \left[\overline{F}(s) - \bar{H}_1(s,1)\Delta_1 + \alpha \int\limits_0^1 \left(\bar{H}_0(s,x) - \bar{H}_1(s,x)\frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) e^{-\int_0^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)}\,dp} dx \right] ds. \quad (31)$$

Тогда из (31) в силу условия III находим величину начального скачка решения Δ_1:

$$\Delta_1 = \frac{1}{\bar{\bar{\delta}}} \left[\int\limits_0^1 \frac{\bar{F}(s)}{A_1(s)}\, e^{-\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}\,dx} ds - \gamma + \alpha \left(e^{-\int_0^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}\,dx} - \int\limits_0^1 \frac{1}{A_1(s)}\, e^{-\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}\,dx} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int\limits_0^1 \left(\bar{H}_0(s,x) - \bar{H}_1(s,x)\frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) e^{-\int_0^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)}dp} dxds \right) \right].$$

Тем самым справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия I – IV. Тогда для решения $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) справедливы следующие предельные равенства:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t), \quad 0 \le t \le 1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} y^{(i)}(t,\varepsilon) = \bar{y}^{(i)}(t), \quad i = 1, 2, \quad 0 < t < 1,$$

где $\bar{y}(t)$ — решение вырожденной задачи (28), (29), выражаемое формулой (30), а начальный скачок решения Δ_1 определяется формулой (32).

Тем самым вырожденная задача (28), (29), к решению которой стремится решение исходной возмущенной задачи (1), (2), отличается от обычной вырожденной задачи тем, что в правой части уравнения (28) и во втором условии (29) содержатся дополнительные слагаемые $\Delta(t) = -H_1(t,1)\Delta_1$ и Δ_1, называемые начальными скачками интегрального члена и решения.

Литература

1. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб. — 1948. — **22 (64)**, № 2. — С. 193 – 204.
2. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. — 1952. — **31 (73)**, № 3. — С. 575 – 586.
3. *Понтрягин Л. С.* Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. — 1957. — **21**, № 3. — С. 605 – 626.
4. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975. — 248 с.
5. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. — М.: Изд-во АН СССР, 1937. — 112 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
7. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, № 5. — С. 3 – 122.
8. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.
9. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
10. *Иманалиев М. И.* Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. — Фрунзе: Илим, 1972. — 356 с.
11. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // Докл. АН СССР. — 1960. — **132**, № 6. — С. 1242 – 1245.
12. *Касымов К. А.* Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // Успехи мат. наук. — 1962. — **17**, № 5. — С. 187 – 188.
13. *Абильдаев Е. А., Касымов К. А.* Асимптотические оценки решений сингулярно возмущенных краевых задач с начальными скачками для линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1992. — **28**, № 10. — С. 1659 – 1668.
14. *Касымов К. А., Жакипбекова Д. А., Нургабыл Д. Н.* Представление решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения с малым параметром при старших производных // Вестн. Каз. нац. ун-та им. аль-Фараби. Сер. мат., мех., информ. — 2001. — №3. — С. 73 – 78.

Получено 23.08.13,
после доработки — 03.02.15