УДК 517.9

СЛАБОНЕЛИНЕЙНАЯ МАТРИЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, Д. В. Сысоев

Донбас. гос. пед. ун-т
ул. Генерала Батюка, 19, Славянск Донецкой обл., 84116, Украина

We find necessary and sufficient conditions for existence of solutions of a nonlinear matrix boundary-value problem for a system of ordinary differential equations in the case of a parametric resonance. We construct a convergent iteration scheme for finding approximate solutions of the problem. As an example of an application of the proposed iteration scheme, we find approximations to solutions of a periodic boundary-value problem for a Riccati type equation with parametric excitation. To control the accuracy of the approximations that were found, we introduce residuals into the initial equation.

Встановлено необхідні і достатні умови існування розв'язків нелінійної матричної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжну ітераційну схему для знаходження наближень до розв'язків нелінійної матричної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу. Як приклад застосування запропонованої ітераційної схеми, знайдено наближення до розв'язків періодичної крайової задачі для рівняння типу Ріккаті з параметричним збудженням. Для контролю точності знайдених наближень до розв'язків періодичної крайової задачі для рівняння типу Ріккаті запропоновано нев'язки у вихідному рівнянні.

Традиционное изучение периодических и нетеровых краевых задач в критических случаях было связано с предположением, что дифференциальное уравнение, а также краевое условие известны и фиксированы [1, 2]; кроме того, изучение периодических задач в случае параметрического резонанса было связано с исследованием прежде всего вопросов устойчивости [3–5]. В то же время, при изучении периодических краевых задач в случае параметрического резонанса, связанных с многочисленными приложениями в электронике [3], теории плазмы [6], нелинейной оптике, механике [7] и станкостроении [8], наряду с нахождением решений периодических краевых задач требуется вычисление собственной функции соответствующего дифференциального уравнения. Таким образом, основным отличием данной статьи является изучение вопросов разрешимости нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса в зависимости от собственной функции краевой задачи.

Существенным отличием данной статьи является матричная запись неизвестной, обобщающая вид как матричного дифференциального уравнения, так и краевого условия. В статье установлены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения, а также условия разрешимости и схема построения решений нелинейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения. Используемая классификация нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса в зависимости от простоты или кратности уравнения для порождающих констант существенно отличается от аналогичной классификации периодических задач в случае параметрического резонанса [4, 5] и соответствует общей классификации периодических и нетеровых краевых задач [1, 2]. Кроме того, полученное для нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса уравнение для порождающих констант существенно отличается от традиционного уравнения для порождающих констант при отсутствии параметрического резонанса зависимостью от малого параметра как самого уравнения, так и его корней.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о построении решений [9]

$$Z(t,\varepsilon)\colon Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a;b], \quad Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0;\varepsilon_0], \quad Z(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

матричного дифференциального уравнения

$$Z'(t,\varepsilon) = AZ(t,\varepsilon) + Z(t,\varepsilon)B + F(t,\varepsilon) + \varepsilon\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{1}$$

подчиненных краевому условию

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) = \mathcal{A} + \varepsilon J(Z(\cdot,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon), \quad \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}. \tag{2}$$

Решение матричной краевой задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$Z_0'(t,\varepsilon) = AZ_0(t,\varepsilon) + Z_0(t,\varepsilon)B + F(t,\varepsilon), \quad \mathcal{L}Z_0(\cdot,\varepsilon) = \mathcal{A}. \tag{3}$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$ и $B \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta}$ — постоянные матрицы. Нелинейный матричный оператор

$$\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)\colon \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \to \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

предполагаем дифференцируемым в смысле Фреше [10, с. 636] по первому аргументу в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемым по μ в малой окрестности решения порождающей задачи (3) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$. Нелинейность $\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ и неоднородность порождающей задачи $F(t,\varepsilon)$ считаем непрерывными по t на отрезке $[a,b]$ и по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Кроме того, $\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon)\colon \mathbb{C}^1[a;b] \to \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}.$$

Вообще говоря, предполагаем, что $\alpha \neq \beta \neq \delta \neq \gamma$. Нелинейный матричный функционал

$$J(Z(\cdot,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon)\colon C[a,b] \to \mathbb{R}^m$$

непрерывно дифференцируем по Z в малой окрестности решения порождающей задачи (3) и непрерывно дифференцируем по μ в малой окрестности решения порождающей задачи (3) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$, а также непрерывен по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$.

Условия разрешимости и структура решения линейной дифференциальной системы (3) были приведены в монографии [11]. Конструктивные условия разрешимости и структура периодического решения линейной дифференциальной системы (3) при условии $\alpha = \beta$ получены в статье [9] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в статье [12].

Таким образом, задача о построении решений матричного дифференциального уравнения (1), подчиненного краевому условию (2), является обобщением периодической задачи для матричного уравнения Риккати [9], нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1], а также задачи Коши для матричного уравнения Бернулли [13].

Как известно [11, с. 211], общее решение

$$W(t,\Theta) = U(t)\cdot\Theta\cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

задачи Коши

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(a) = \Theta,$$

определяют $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные фундаментальные матрицы:

$$U'(t) = AU(t), \quad U(a) = I_\alpha, \quad V'(t) = BV(t), \quad V(a) = I_\beta.$$

Общее решение $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ задачи Коши [9]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad Z(a) = \Theta, \tag{4}$$

имеет вид

$$Z(t,\Theta) = W(t,\Theta) + K[F(s)](t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

где

$$K[F(s)](t) := \int\limits_a^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(t)V^{-1}(s)ds$$

— оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (4). Подставляя общее решение матричного дифференциального уравнения (4) в краевое условие (3), получаем линейное алгебраическое уравнение [14 – 16]

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\Theta) = \mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot) \tag{5}$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Определим оператор $\mathcal{M}[\mathcal{B}]\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{B}$, а также обратный оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{M}[\mathcal{B}]\}\colon \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектору-столбцу $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Пусть $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, $j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta$, — естественный базис [18] пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ и c_j — константы, определяющие разложение матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ по векторам $\Xi^{(j)}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при этом

$$\mathcal{L}W(\cdot,\Theta) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j, \quad \Theta = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)}c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta.$$

Таким образом, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{Q}\cdot c = \mathcal{M}[\mathcal{A}] - \mathcal{M}\{\mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} \tag{6}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$, равносильному уравнению (5). Здесь

$$\mathcal{Q} := \left[\mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(1)}]\mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(2)}]\ldots\mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(\alpha\cdot\beta)}]\right], \quad \mathcal{Q}^{(j)} := \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\beta\times\delta}.$$

Уравнение (6) разрешимо тогда и только тогда, когда [1, 14–16]

$$P_{\mathcal{Q}^*_d}\mathcal{M}\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} = 0, \tag{7}$$

где $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\delta\cdot\gamma} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$, матрица $P_{\mathcal{Q}^*_d}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$ матрицы $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta}$. При условии (7), и только при нем, общее решение уравнения (6)

$$c = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} + P_{\mathcal{Q}_r}c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

определяет общее решение [14, 15] матричного уравнения (5):

$$\Theta = \mathcal{M}^{-1}\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\}\} + \mathcal{M}^{-1}[P_{\mathcal{Q}_r}c_r],$$

которое, в свою очередь, определяет общее решение матричного дифференциального уравнения (4), подчиненного краевому условию (3):

$$Z(t,\Theta_r) = W(t,\Theta_r) + G[F(s);\mathcal{A}](t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}[P_{\mathcal{Q}_r}c_r].$$

Здесь $P_{\mathcal{Q}}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q})$, матрица $P_{\mathcal{Q}_r} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$,

$$G[F(s);\mathcal{A}](t) := W\left\{t, \mathcal{M}^{-1}\left\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}[\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)]\right\}\right\} + K[F(s)](t)$$

— обобщенный оператор Грина [17] матричной краевой задачи (3), (4), $\mathcal{Q}^+$ — псевдообратная (по Муру–Пенроузу) матрица [1, 18]. Обозначим индексы

$$\{j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_r\} \subseteq \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\cdot n\}$$

линейно независимых столбцов ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$, при этом

$$W(t,\Theta_r) := \sum_{k=1}^{r} U(t)\cdot \Xi^{(j_k)} V(t)\cdot c_{j_k}, \quad \Theta_r \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

— общее решение однородной части матричного дифференциального уравнения (4), подчиненного краевому условию (3). При условии $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$ будем говорить, что для краевой задачи (3) имеет место критический случай. При этом задача (3) разрешима лишь для тех неоднородностей $F(t)$ и $\mathcal{A}$, для которых выполнено условие (7). В свою очередь, при условии $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ для краевой задачи (3) имеет место некритический случай. При этом задача (3) разрешима для любых неоднородностей $F(t)$ и $\mathcal{A}$. Условие разрешимости (7) является обобщением соответствующих требований [1, 25] на случай матричной краевой задачи (3).

2. Условия разрешимости. Предположим, что для краевой задачи (3) имеет место критический случай, при этом условие (7) выполнено и задача (1), (2) в малой окрестности решения

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G[F(s,\varepsilon);\mathcal{A}](t)$$

порождающей задачи (3) имеет решение

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), \quad \Theta_0(0) := \Theta_0^* \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

для которого в достаточно малой окрестности начального значения собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$ существует непрерывная собственная функция

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad \mu_0(0) := \mu_0^*.$$

Таким образом, приходим к задаче о нахождении решения

$$X(t,\varepsilon)\colon X(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad X(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad X(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

и собственной функции $\zeta(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$ слабонелинейной матричной краевой задачи

$$\begin{gathered} X'(t,\varepsilon) = AX(t,\varepsilon) + X(t,\varepsilon)B + \varepsilon\Phi(Z,\mu(\varepsilon),t,\varepsilon), \\ \mathcal{L}X(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(Z(\cdot,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon), \end{gathered} \tag{8}$$

разрешимой тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\left\{J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)) + X(\cdot,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),\varepsilon) - \right. \\ \left. -\mathcal{L}K[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon)\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\right\} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

В силу непрерывности по Z и μ нелинейной функции $\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ и матричного функционала $J(Z(\cdot,\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи (3) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$ приходим к уравнению

$$\begin{gathered} \mathcal{F}(\Theta_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)) := P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\left\{J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),\varepsilon) - \right. \\ \left. -\mathcal{L}K[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\right\} = 0. \end{gathered}$$

Необходимые условия существования решения матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса определяет следующая лемма, являющаяся обобщением соответствующих утверждений [4, 5, 26].

Лемма. *Предположим, что для матричной краевой задачи (3) имеет место критический случай, при этом выполнено условие разрешимости*

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s,\varepsilon)](\cdot)\} = 0.$$

Предположим также, что в малой окрестности решения

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G[F(s,\varepsilon);\mathcal{A}](t)$$

порождающей задачи (3) матричная краевая задача (1), (2) имеет решение

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), \quad \Theta_0(0) := \Theta_0^* \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

для которого в достаточно малой окрестности начального значения собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$ существует непрерывная собственная функция $\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon)$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{F}(\Theta_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)) := P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\{J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\mathcal{L}K[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\} = 0. \tag{10}$$

По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае [1], а также периодическими краевыми задачами [2] уравнение (10) будем называть уравнением для порождающих констант матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса. Корни уравнения для порождающих констант (10), в данном случае — матрицы $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, а также собственные функции $\mu_0(\varepsilon)$ определяют порождающее решение $Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))$, в малой окрестности которого могут существовать искомые решения исходной матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса. Если же уравнение (10) не имеет корней

$$\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1, \quad \Theta_0(\varepsilon), \quad \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

то исходная матричная краевая задача (1), (2) в случае параметрического резонанса не имеет искомых решений. Фиксируя одно из решений $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ уравнения для порождающих констант (10), а также собственную функцию $\mu_0(\varepsilon)$, приходим к задаче об отыскании решения матричной краевой задачи (1), (2) в окрестности порождающего решения $Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))$. В этой окрестности имеет место разложение [10, с. 636]

$$\begin{aligned}\Phi[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon] &=\\ = \Phi[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon]&+\\ + D_\varphi[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(t,\varepsilon)]&+\\ + A_\varphi[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)]\zeta(\varepsilon) &+ R_\varphi[Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon],\end{aligned}$$

при этом в малой окрестности решения $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ уравнения для порождающих констант (10), а также собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$

$$A_\varphi[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)] := \frac{\partial}{\partial\zeta}\,\Phi[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon]\Big|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0\\ \zeta(\varepsilon)=0}}$$

— $(\alpha\times\beta)$-матрица и $R_\varphi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ — остаток этого разложения. Дифференциал

$$D_\varphi[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(t,\varepsilon)] \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

представляет собой линейный по $X(t,\varepsilon)$ оператор. Аналогично, в окрестности порождающего решения $Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))$, а также собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$ имеет место разложение [10, с. 636]

$$\begin{aligned} J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)) + X(\cdot,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),\varepsilon) \,=\, & J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),\varepsilon)+ \\ & + D_J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(\cdot,\varepsilon))+ \\ & + A_J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon))\zeta(\varepsilon)+ \\ & + J_1(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)) + X(\cdot,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),\varepsilon), \end{aligned}$$

при этом в малой окрестности решения $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ уравнения для порождающих констант (10), а также собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$

$$A_J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon))\zeta(\varepsilon) \,:=\, \frac{\partial}{\partial\zeta}\,J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)) + X(\cdot,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),\varepsilon)\Big|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0\\ \zeta(\varepsilon)=0}}$$

— линейный ограниченный матричный функционал и

$$J_1(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)) + X(\cdot,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),\varepsilon)$$

— нелинейный матричный функционал — остаток этого разложения. С учетом равенства (10), а также последних разложений необходимое и достаточное условие (9) существования решения

$$X(t,\varepsilon) \,=\, W(t,\Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}(t,\varepsilon), \quad \mu(\varepsilon) \,=\, \mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon)$$

нелинейной матричной краевой задачи (8) является уравнением

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{Q}_d^*}M\Big\{ & D_J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(\cdot,\varepsilon)) + A_J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon))\zeta(\varepsilon) + \\ & + J_1(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)) + X(\cdot,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),\varepsilon) - \\ & - \mathcal{L}K\Big\{ D[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(s,\varepsilon)] + \\ & + A[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)]\zeta(\varepsilon) + R[Z(s,\varepsilon),\mu(\varepsilon),s,\varepsilon]\Big\}(\cdot)\Big\} \,=\, 0 \end{aligned}$$

относительно матрицы $\Theta_r(\varepsilon)$ и скалярной функции $\zeta(\varepsilon)$. Здесь $W(t,\Theta_r(\varepsilon))$ — общее решение однородной части краевой задачи (8) и

$$X^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon);$$

$$J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)) + X(\cdot,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon)\Big](t)$$

— частное решение неоднородной матричной краевой задачи (8). Обозначим через $\xi_j(\varepsilon)$ скалярные функции, определяющие разложение матрицы

$$\Theta_r(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)}\xi_j(\varepsilon), \quad \xi_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad j = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta,$$

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, вектор

$$\check{c}(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \xi(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+\alpha\beta}, \quad \xi(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta},$$

и матрицу

$$\mathcal{B}_0(\varepsilon) := \Big[\, \mathcal{B}_0^{(1)}\; \mathcal{B}_0^{(2)}\; \ldots\; \mathcal{B}_0^{(\alpha\beta)}\; \mathcal{B}_0^{(1+\alpha\beta)} \,\Big] \in \mathbb{R}^{d\times(1+\alpha\beta)},$$

где

$$\mathcal{B}_0^{(j)} := P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{D_J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), U(\cdot)\cdot\Xi^{(j)}\cdot V(\cdot)) -$$

$$- \mathcal{L}K\Big\{D[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), U(s)\cdot\Xi^{(j)}\cdot V(s)]\Big\}\Big\}(\cdot) \in \mathbb{R}^d, \quad j = 1,2,\ldots,\alpha\beta,$$

$$\mathcal{B}_0^{(1+\alpha\beta)} := P_{\mathcal{Q}_d^*}M\Big\{A_J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)) - \mathcal{L}K\{A[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)]\}(\cdot)\Big\}.$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие (9) разрешимости нелинейной матричной краевой задачи (8) преобразуется к виду

$$\mathcal{B}_0(\varepsilon)\cdot\check{c}(\varepsilon) = -P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{D_J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X^{(1)}(\cdot,\varepsilon)) + J_1(Z(\cdot,\varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \mathcal{L}K\Big\{D[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X^{(1)}(s,\varepsilon)] + R(Z(s,\varepsilon), \mu(\varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot)\Big\}\Big\}. \qquad (11)$$

Уравнение (11) разрешимо относительно вектора $\check{c}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{1+\alpha\beta}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathcal{B}_0^*}P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{D_J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X^{(1)}(\cdot,\varepsilon)) + J_1(Z(\cdot,\varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \mathcal{L}K\Big\{D[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X^{(1)}(s,\varepsilon)] + R(Z(s,\varepsilon), \mu(\varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot)\Big\}\Big\} = 0.$$

В частности, уравнение (11) разрешимо при условии

$$P_{\mathcal{B}_0^*}(\varepsilon) P_{\mathcal{Q}_d^*} = 0, \quad \mathcal{B}_0^+(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]. \tag{12}$$

В этом случае уравнение (10) имеет по меньшей мере одно решение

$$\check{c}(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+(\varepsilon) \cdot P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M}\Big\{ D_J(Z_0(\cdot, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X^{(1)}(\cdot, \varepsilon)) + J_1(Z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \mathcal{L}K\Big\{ D[Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X^{(1)}(s, \varepsilon)] + R(Z(s, \varepsilon), \mu(\varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot) \Big\} \Big\},$$

где $P_{\mathcal{B}_0^*}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ — матрица-ортопроектор:

$$P_{\mathcal{B}_0^*}(\varepsilon) \colon \mathbb{R}^{d \times d} \to \mathbb{N}(\mathcal{B}_0^*(\varepsilon)).$$

Таким образом, при условии (12) по меньшей мере одно решение нелинейной матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса определяет операторная система

$$Z(t, \varepsilon) = Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), \quad X(t, \varepsilon) = W(t, \Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$X^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[\Phi(Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)) + X(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon);$$

$$J(Z_0(\cdot, \Theta_0(\varepsilon)) + X(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon) \Big](t),$$

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad \Theta_r(\varepsilon) = \mathcal{M}^{-1}[\mathfrak{J}_0\, \check{c}(\varepsilon)], \quad \zeta(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1\, \check{c}(\varepsilon), \tag{13}$$

$$\check{c}(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+(\varepsilon)\, P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M}\Big\{ D_J(Z_0(\cdot, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X^{(1)}(\cdot, \varepsilon)) + J_1(Z(\cdot, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \mathcal{L}K\Big\{ D[Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X^{(1)}(s, \varepsilon)] + R(Z(s, \varepsilon), \mu(\varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot) \Big\} \Big\}.$$

Здесь

$$\mathfrak{J}_0 := \begin{pmatrix} I_{\alpha\beta} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta \times (1+\alpha\beta)}, \quad \mathfrak{J}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times (1+\alpha\beta)}$$

— постоянные матрицы. Для нахождения приближенного решения операторной системы (13) применим метод последовательных приближений [10].

Таким образом, доказано следующее утверждение, которое является обобщением соответствующего утверждения для традиционных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса [4, 5, 26].

Теорема. *Предположим, что для порождающей матричной краевой задачи (3) имеет место критический случай, при этом выполнено условие разрешимости*

$$P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M}\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s, \varepsilon)](\cdot)\} = 0.$$

Предположим также, что уравнение (10) имеет корни

$$\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1, \quad \Theta_0(\varepsilon), \quad \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0].$$

Тогда при условии (12) в малой окрестности решения порождающей задачи (3)

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G[F(s,\varepsilon);\mathcal{A}](t)$$

и в достаточно малой окрестности начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$ по меньшей мере одно решение матричной краевой задачи (1), (2)

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon)$$

и непрерывную собственную функцию $\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$ определяет операторная система (13). Для нахождения этого решения применима итерационная схема

$$Z_{k+1}(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X_{k+1}(t,\varepsilon), \quad X_{k+1}(t,\varepsilon) = W(t,\Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon)) + X^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$X^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X_k(s,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta_k(\varepsilon), s, \varepsilon);$$
$$J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)) + X_k(\cdot,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta_k(\varepsilon), \varepsilon)\Big](t),$$

$$\mu_{k+1}(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \quad \Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon) = \mathcal{M}^{-1}[\mathfrak{J}_0\, \check{c}_{k+1}(\varepsilon)], \quad \zeta_{k+1}(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1\, \check{c}_{k+1}(\varepsilon), \qquad (14)$$

$$\check{c}_{k+1}(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+(\varepsilon)\, P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{D_J(Z_0(\cdot,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)) +$$
$$+ J_1(Z_k(\cdot,\varepsilon), \mu_k(\varepsilon), \varepsilon) - \mathcal{L}K\Big\{D[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X_k^{(1)}(s,\varepsilon)] +$$
$$+ R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X_k(s,\varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta_k(\varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot)\Big\}\Big\}, \quad k = 0,1,2\ldots.$$

Длина отрезка $[0,\varepsilon^*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [1, 2], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого последней системой аналогично [19].

Пример. Условия доказанной теоремы выполняются в случае 2π-периодической задачи для уравнения типа Риккати

$$Z'(t,\varepsilon) = AZ(t,\varepsilon) + Z(t,\varepsilon)B + F(t) + \varepsilon\Phi(Z(t,\varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad \mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) = 0, \qquad (15)$$

где

$$\Phi(Z(t,\varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon) := \mu S_1 Z(t,\varepsilon) S_2 + S_3 Z(t,\varepsilon) S_4 Z^*(t,\varepsilon) S_5,$$

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_4 := S_1, \quad S_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sin 2t \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) := Z(0, \varepsilon) - Z(2\pi, \varepsilon).$$

Общее решение полуоднородной задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (15)

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(0) = \Theta,$$

имеет вид

$$W(t, \Theta) = U(t) \cdot \Theta \cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

где $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные $(U(0) = I_2, V(0) = I_3)$ фундаментальные матрицы:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t & -\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\Xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ и c_j, $j = 1, 2, 3, 4,$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам $\Xi^{(j)}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Общее решение однородной матричной задачи (15) определяет матрица $\mathcal{Q} = 0$ и ее ортопроекторы $P_{\mathcal{Q}} = P_{\mathcal{Q}^*} = I_4$.

Таким образом, для матричной краевой задачи (15) имеет место критический случай. Поскольку для 2π-периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (15) условие (7) выполнено, порождающая 2π-периодическая задача для матричного дифференциального уравнения (15) разрешима для данных неоднородностей $F(t)$ и $\mathcal{A} = 0$. Общее решение порождающей 2π-периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (15)

$$Z_0(t, \Theta_r) = W(t, \Theta_r) + G[F(s); \mathcal{A}](t), \quad \Theta_r = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix},$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$G[F(s); \mathcal{A}](t) = K[F(s)](t),$$

где

$$\mathcal{M}K[F(s)](t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{15}\left(\cos t - 8\cos 2t + 3\cos 3t\right) \\ -\dfrac{2}{15}\left(5\cos t - 8\cos 2t + 3\cos 3t - 5\sin t - 2\sin 2t + 3\sin 3t\right) \\ -\dfrac{2}{15}\left(5\cos t - 8\cos 2t + 3\cos 3t - 5\sin t + 7\sin 2t - 3\sin 3t\right) \\ \dfrac{1}{15}\left(6\cos 2t - 6\cos 3t + 10\sin t - 5\sin 2t\right) \end{pmatrix}.$$

Уравнение (10) для порождающих констант 2π-периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (15) имеет действительный корень

$$\mu = 1, \quad \xi = \begin{pmatrix} \dfrac{32}{15} & \dfrac{16}{15} & \dfrac{16}{15} & \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}^*,$$

которому соответствует матрица полного ранга

$$\mathcal{B}_0 = \frac{60}{\pi}\begin{pmatrix} -10 & 50 & -38 & -72 & 0 \\ -15 & 10 & -14 & 38 & 0 \\ -3 & 70 & -14 & -46 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 14 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в случае 2π-периодической задачи для уравнения (10) выполнены условия теоремы, следовательно, 2π-периодическая задача (10) в малой окрестности порождающего решения

$$Z_0(t) = \begin{pmatrix} 32\cos 2t & 2(8\cos 2t - 7\sin 2t) \\ 4(\sin 2t + 4\cos 2t) & 6\cos 2t - 5\sin 2t \end{pmatrix}$$

разрешима, причем $\mu(0) = 1$.

Заметим, что матрица $\mathcal{B}_0$, ключевая при исследовании матричных краевых задач (1), (2) в случае параметрического резонанса, как и в случае нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, может быть найдена непосредственно из уравнения для порождающих констант (10). Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial \check{c}} P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M}\Bigg\{ J(Z_0(\cdot, \Theta_0(\varepsilon)) + X(\cdot, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \mathcal{L}K[\Phi(Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon)](\cdot)\Bigg\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial(\xi, \zeta)} P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M}\Bigg\{ D_J(Z_0(\cdot, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), W\Bigg(\cdot, \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} \xi_j(\varepsilon)\Bigg) +$$

$$+ X^{(1)}(\cdot, \varepsilon)) + A_J(Z_0(\cdot, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon))\zeta(\varepsilon) -$$

$$- \mathcal{L}K\Bigg\{ D_\varphi\Bigg[Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), W\Bigg(s, \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} \xi_j(\varepsilon)\Bigg) + X^{(1)}(s, \varepsilon)\Bigg] +$$

$$+ A_\varphi[Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)]\zeta(\varepsilon)\Bigg\}(\cdot)\Bigg\}\Bigg|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0 \\ \zeta(\varepsilon)=0}} = \mathcal{B}_0.$$

Предложенная в статье схема исследования матричных краевых задач (1), (2) в случае параметрического резонанса, как и в случае нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогично [1, 21] может быть перенесена на матричные краевые задачи с запаздыванием, а также аналогично [1, 19, 22–24] на автономные матричные краевые задачи.

Литература

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — xiv + 317 p.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
3. *Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д.* О параметрическом возбуждении электрических колебаний // Журн. техн. физики. — 1934. — № 3. — С. 5–29.
4. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
5. *Якубович В. А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука, 1987. — 328 с.
6. *Силин В. П.* Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. — М.: Наука, 1973. — 287 с.
7. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
8. *Копелев Ю. Ф.* Параметрические колебания станков // Металлорежущие станки: Респ. межвед. науч.-техн. сб. — 1984. — Вып. 12. — С. 3–8.
9. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equations // Different. Equat. — 2001. — **37**, № 4. — P. 464–471.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
11. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

12. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukr. Math. J. — 1998. — **50**, № 8. — P. 1162 – 1169.

13. *Деревенский В. П.* Матричные уравнения Бернулли. I // Изв. вузов. Математика. — 2008. — № 2. — С. 14 – 23.

14. *Чуйко С. М.* О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестн. Одес. нац. ун-та. Математика, механика. — 2014. — **19**, вып. 1(21). — С. 49 – 57.

15. *Чуйко С. М.* О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестн. Харьков. нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Математика, прикл. математика и механика. — 2014. — № 1120. — С. 85 – 94.

16. *Чуйко С. М.* О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышев. сб. — 2015. — **16**, вып. 1. — С. 52 – 66.

17. *Чуйко С. М.* Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динам. системы. — 2014. — **4(32)**, № 1, 2. — С. 101 – 107.

18. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 318 с.

19. *Чуйко С. М.* Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 3. — С. 416 – 432.

20. *Чуйко А. С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 2. — С. 278 – 288.

21. *Chuiko S. M., Chuiko A. S.* On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case // Nonlinear Oscillations. — 2012. — **14**, № 3. — P. 445 – 460.

22. *Vejvoda O.* On perturbed nonlinear boundary-value problems // Czech. Math. J. — 1961. — № 11. — P. 323 – 364.

23. *Boichuk A., Chuiko S.* Autonomous weakly nonlinear boundary value problems in critical cases // Different. Equat. — 1992. — № 10. — P. 1353 – 1358.

24. *Chuiko S. M., Boichuk I. A.* An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations. — 2009. — **12**, № 3. — P. 405 – 416.

25. *Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И.* К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова // Дифференц. уравнения. — 2005. — **41**, № 7. — С. 994 – 996.

26. *Чуйко С. М.* Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Нелінійні коливання. — 2014. — **17**, № 1. — С. 137 – 148.

Получено 27.05.15