УДК 517.9

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. Н. Витюк

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
Ин-т математики, экономики и механики
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65026, Украина
e-mail: vva@te.net.ua

А. В. Михайленко

Одес. нац. эконом. ун-т
ул. Преображенская, 8, Одесса, 65082, Украина
e-mail: 8012@mail.ru

We find sufficient conditions for existence of solutions to a boundary-value problem for a nonlinear differential equation that contains a mixed Riemann – Liouville fractional order derivative.

Отримано достатні умови існування розв'язків крайової задачі для нелінійного диференціального рівняння, яке містить мішану похідну Рімана – Ліувілля дробового порядку.

1. Введение. Пусть $P = [0,a] \times [0,b]$, $0 < a, b < \infty$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $r = (\alpha;\beta)$, $\theta = (0;0)$. Через $C(P)$, $AC(P)$, $L(P)$ обозначим соответственно пространства непрерывных, абсолютно непрерывных и суммируемых функций $f\colon P \to R$, причем

$$\|f(x,y)\|_C = \max_P |f(x,y)|.$$

Левосторонний смешанный интеграл и производная Римана – Лиувилля порядка r определяются соответственно так [1]:

$$f_r(x,y) = I_\theta^{(\alpha;\beta)} f(x,y) = I_\theta^r f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x-t)^{\alpha-1}(y-s)^{\beta-1} f(t,s)\,ds\,dt,$$

$$D_\theta^r f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma(m-\beta)} \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x-t)^{n-\alpha-1}(y-s)^{m-\beta-1} f(t,s)\,ds\,dt,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $n = [\alpha]+1, m = [\beta]+1$. При этом

$$I_\theta^\theta f(x,y) = f(x,y), \quad I_\theta^{(1;1)} f(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y f(t,s)\,ds\,dt.$$

Краевые задачи для гиперболических уравнений с данными на границе всей области начали исследовать сравнительно недавно. Первые работы в этом направлении принадлежали Дж. Адамару [10], А. Губеру [11], Д. Манжерону [2, 3] и др. Исследованию краевых задач с данными на всей границе области для дифференциальных уравнений и систем гиперболического типа посвящены работы Б. И. Пташника [9] и его учеников.

Изучение краевых задач вида

$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} = F(x,y,u(x,y)), \tag{1}$$

$$u(x,j) = u(i,y) = 0, \quad 0 \le x,y \le 1, \quad i = j = 0,1, \tag{2}$$

началось с работы [2]. В [3] рассмотрена краевая задача

$$\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} - A(x,y)u(x,y) = f(x,y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}\right|_{x=b} = 0. \tag{4}$$

Для этой задачи построена функция Грина такая, что

$$u(x,y) = \int\limits_0^a \int\limits_0^b G(x,y;t,s) f(t,s)\,ds dt.$$

Вопросам разрешимости и приближенному решению краевых задач вида (1), (2) посвящены многие работы (см., например, [4–6]).

Пусть $0 < \alpha, \beta \le 1$, $p = (1+\alpha; 1+\beta)$, $q = (1-\alpha; 1-\beta)$. В статье [7] получены достаточные условия разрешимости краевой задачи

$$D_\theta^p u(x,y) = F\left(x,y,u(x,y), D_\theta^r u(x,y)\right), \tag{5}$$

$$u_q(x,0) = u_q(x,b) = u_q(0,y) = u_q(a,y) = 0, \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b. \tag{6}$$

Пусть $v(x,y) = u_q(x,y)$. Тогда $D_\theta^r u(x,y) = v_{xy}(x,y)$. В статье [8] рассматриваются условия существования и единственности решений уравнения (5), которые удовлетворяют краевым условиям

$$v(x,0) = v_{xy}(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a; \quad v(0,y) = v_{xy}(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b. \tag{7}$$

Заметим, что при $\alpha = \beta = 1$ условия (6) преобразуются в условия вида (2), а условия (7) — в условия (4). В настоящей работе получены достаточные условия разрешимости краевой задачи

$$D_\theta^p u(x,y) = F[u(x,y)] \equiv F(x,y,u(x,y)), \tag{8}$$

$$u(x,0) = u(0,y) = 0, \quad u_x(a,y) = u_y(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, \quad 0 \le b \le b. \tag{9}$$

Основы дробного интегродифференцирования и некоторые его приложения можно найти в [1, 15–17].

2. Вспомогательные результаты. В этом пункте приведены обозначения, определения и утверждения, используемые в данной статье.

Определение 1 [14]. *Непрерывная функция $z(x,y)\colon P \to R$ называется абсолютно непрерывной, если и только если она допускает представление*

$$z(x,y) = u(x) + v(y) - u(0) + \int_0^x \int_0^y \tilde{v}(t,s)\,ds\,dt,$$

где $u(x) \in AC([0,a])$, $v(y) \in AC([0,b])$, $\tilde{v}(x,y) \in L(P)$, $u(0) = v(0)$.

Определение 2 [1]. *Функция $u(x)\colon J \to R$, $J = [0,a]$, принадлежит множеству $AC^n(J)$, если $u^{(k)}(x) \in C(J)$, $k = \overline{0, n-2}$, а $u^{(n-1)}(x) \in AC(J)$.*

Пусть

$$D^k_{xy} u(x,y) = \frac{\partial^{2k} u(x,y)}{\partial x^k \partial y^k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем $D^0_{xy} u(x,y) = u(x,y)$.

Определение 3 [12]. *Функция $u(x,y)\colon P \to R$ принадлежит множеству $AC^n(P)$, если $D^k_{xy} u(x,y) \in AC(P)$, $k = \overline{0, n-1}$.*

Лемма 1. *Пусть $u(x) \in AC([0,a])$, $v(y) \in AC([0,b])$ и $u(0) = v(0) = 0$. Тогда $z(x,y) = u(x)\,v(y) \in AC(P)$.*

В работе [13] рассмотрена задача

$$D^{1+\alpha} y(x) = f(x), \quad 0 < x < a, \quad 0 < \alpha \le 1, \tag{10}$$

$$y(0) = y'(a) = 0, \tag{11}$$

где $f(x)\colon J \to R$ — измеримая функция, причем $|f(x)| \le M$. Пусть $\delta > 0$. Выражения

$$f_\delta(x) = I^\delta_0 f(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^x (x-t)^{\delta-1} f(t)\,dt, \quad I^1_0 f(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

$$D^\delta_0 f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\delta)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x (x-t)^{n-\delta-1} f(t)\,dt,$$

где $n = [\delta] + 1$, а $[\delta]$ — целая часть δ, называем соответственно левосторонним интегралом и левосторонней производной Римана – Лиувилля порядка δ.

Если $\delta = 1 + \alpha$, $0 < \alpha \le 1$, то

$$D^{1+\alpha}_0 y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t)\,dt = y''_{1-\alpha}(x).$$

Определение 4 [13]. *Функцию $y(x) \in C(J) \cap C^1((0,a])$ называем решением краевой задачи (10), (11), если $y_{1-\alpha}(x) \in AC^2(J), y(x)$ удовлетворяет условиям (11) и дифференциальному уравнению (10) почти всюду на J.*

Лемма 2 [13]. *При сделанных предположениях относительно функции $f(x)$ краевая задача (10), (11) имеет единственное решение*

$$y(x) = \int\limits_0^a G(x,t)f(t)dt,$$

где

$$G(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{x^\alpha(a-t)^{\alpha-1} - a^{\alpha-1}(x-t)^\alpha}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)}, & 0 \le t \le x, \\ \\ -\dfrac{x^\alpha(a-t)^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}, & x \le t < a. \end{cases}$$

Лемма 3 [19]. *Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, а $f(x,y)\colon P \to R$ — измеримая и ограниченная функция, то $\mu(x,y) = I_\theta^{(\alpha;\beta)} f(x,y) \in C(P)$ и $\mu(x,0) = \mu(0,y) = 0$. Если $f(x)\colon [0,a] \to R$ — измеримая и ограниченная функция, то $\tau(x) = I_0^\alpha f(x) \in C([0,a])$ и $\tau(0) = 0$.*

3. Существование решений. Далее считаем, что $0 < \alpha, \beta \le 1$, $p = (1+\alpha; 1+\beta)$, $q = (1-\alpha; 1-\beta)$. Согласно определению смешанной дробной производной Римана–Лиувилля получаем

$$D_\theta^p u(x,y) = D_{0,x}^{1+\alpha} D_{0,y}^{1+\beta} u(x,y) = \frac{\partial^4 u_q(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2},$$

где

$$D_{0,x}^{1+\alpha} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha} u(t,y)dt,$$

$$D_{0,y}^{1+\beta} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int\limits_0^y (y-s)^{-\beta} u(x,s)ds.$$

Определение 5. *Функция $v(x,y)\colon P \to R$ принадлежит множеству $S(P)$, если:*

(i) $v(x,y) \in AC(P), v_x(x,y) \in C\left((0,a] \times [0,b]\right), v_y(x,y) \in C\left([0,a] \times (0,b]\right)$;

(ii) $u_q(x,y) \in AC^2(P)$;

(iii) $v(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям (9).

Определение 6. *Решением краевой задачи (8), (9) называем такую функцию $u(x,y) \in \in S(P)$, которая удовлетворяет уравнению (8) при $(x,y) \in P$.*

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$D_\theta^p u(x,y) = f(x,y), \quad f(x,y) \in C(P). \tag{12}$$

Лемма 4. *Решение уравнения (12), которое удовлетворяет условиям (9), представимо в виде*

$$u(x,y) = \int_0^a \int_0^b G(x,t)G(y,s)f(t,s)dsdt, \tag{13}$$

где

$$G(y,s) = \begin{cases} -\dfrac{y^\beta (b-s)^{\beta-1} - b^{\beta-1}(y-s)^\beta}{b^{\beta-1}\Gamma(1+\beta)}, & 0 \le s \le y, \\ -\dfrac{y^\beta (b-s)^{\beta-1}}{b^{\beta-1}\Gamma(1+\beta)}, & y \le s < b. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (12), (9) в смысле определения 6. Полагаем

$$v(x,y) = D_{0,y}^{1+\beta} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^y (y-s)^{-\beta} u(x,s)ds. \tag{14}$$

Следовательно, при каждом фиксированном y функция $v(x,y)$ является решением уравнения

$$D_{0,x}^{1+\alpha} v(x,y) = f(x,y). \tag{15}$$

Поскольку

$$v_x(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^y (y-s)^{-\beta} u(x,s)ds,$$

то, учитывая, что согласно (9) $u(0,y) = u_x(a,y) = 0$, получаем

$$v(0,y) = v_x(a,y) = 0. \tag{16}$$

Таким образом, при фиксированном y $v(x,y)$, как функция x, является решением краевой задачи (15), (16). В силу леммы 2

$$v(x,y) = \int_0^a G(x,t)f(t,y)dt \equiv w(x,y). \tag{17}$$

Из (14) и (9) следует, что при каждом x $u(x,y)$, как функция y, является решением краевой задачи

$$D_{0,y}^{1+\beta} u(x,y) = w(x,y), \quad u(x,0) = u_y(x,b) = 0.$$

Согласно лемме 2

$$u(x,y) = \int_0^b G(y,s)w(x,s)ds = \int_0^b G(y,s)\left(\int_0^a G(x,t)f(t,s)dt\right)ds =$$

$$= \int_0^a \int_0^b G(x,t)G(y,s)f(t,s)dsdt.$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 1. *Пусть функция* $F(x,y,u)\colon P\times R\to R$ *непрерывна и* $|F(x,y,u)|\le M$. *Тогда краевая задача (8), (9) эквивалентна интегральному уравнению*

$$u(x,y) = \int_0^a \int_0^b G(x,t)G(y,s)F(t,s,u(t,s))dsdt. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $u(x,y)\in AC(P)$ — решение краевой задачи (8), (9). Тогда $\sigma(x,y) = F(x,y,u(x,y))\in C(P)$ и, согласно лемме 3, $u(x,y)$ представимо в виде (18). Пусть, далее, $u(x,y)\in C(P))$ — решение интегрального уравнения (18). Докажем, что $u(x,y)$ является решением краевой задачи (8), (9).

Пусть $(x,y)\in(0,a)\times(0,b)$. Используя выражения для функций $G(x,t)$ и $G(y,s)$, получаем

$$u(x,y) = \frac{1}{a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}\left[\int_0^x\int_0^y \left(x^\alpha(a-t)^{\alpha-1} - a^{\alpha-1}(x-t)^\alpha\right)\left(y^\beta(b-s)^{\beta-1} -\right.\right.$$

$$\left. - b^{\beta-1}(y-s)^\beta\right)\sigma(s,t)dsdt + \int_x^a\int_0^y x^\alpha(a-t)^{\alpha-1}\left(y^\beta(b-s)^{\beta-1} -\right.$$

$$\left.-b^{\beta-1}(y-s)^\beta\right)\sigma(s,t)dsdt+$$

$$+\int_0^x\int_y^b \left(x^\alpha(a-t)^{\alpha-1} - a^{\alpha-1}(x-t)^\alpha\right)y^\beta(b-s)^{\beta-1}\sigma(s,t)dsdt+$$

$$\left.+\int_x^a\int_y^b x^\alpha(a-t)^{\alpha-1}y^\beta(b-s)^{\beta-1}\sigma(s,t)dsdt\right].$$

После простых преобразований имеем

$$u(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta \gamma}{a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+\beta)} - \frac{x^\alpha}{a^{\alpha-1}\,\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} \int\limits_0^a \int\limits_0^y (a-t)^{\alpha-1}\times$$

$$\times (y-s)^\beta\,\sigma(t,s)dsdt - \frac{y^\beta}{b^{\beta-1}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} \int\limits_0^x \int\limits_0^b (x-t)^\alpha (b-s)^{\beta-1}\sigma(t,s)dsdt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x-t)^\alpha (y-s)^\beta\,\sigma(t,s)dsdt = A_1 - A_2 - A_3 + A_4, \tag{19}$$

$$\gamma = \int\limits_0^a \int\limits_0^b (a-t)^{\alpha-1}(b-s)^{\beta-1}\sigma(t,s)dsdt.$$

Согласно (19) $u(x,0) = u(0,y) = 0$. Докажем, что $u(x,y) \in AC(P)$. Согласно лемме 1 $A_1(x,y) \in AC(P)$. Покажем, что $A_3(x,y) \in AC(P)$. Пусть

$$\phi(t) = \int\limits_0^b (b-s)^{\beta-1}\sigma(t,s)ds.$$

Проверим, что $\phi(t) \in C([0,a])$. Пусть $t_1, t_2 \in [0,a]$. Тогда

$$|\phi(t_1) - \phi(t_2)| \le \int\limits_0^b (b-s)^{\beta-1}|\sigma(t_1,s) - \sigma(t_2,s)|ds \le$$

$$\le w(\sigma,\delta,0) \int\limits_0^b (b-s)^{\beta-1}ds \le \frac{b^\beta}{\beta}\, w(\sigma,\delta,0),$$

где

$$w(\sigma,\delta,0) = \sup_s \sup_{|t_1-t_2|\le\delta} |\sigma(t_1,s) - \sigma(t_2,s)|$$

— частный модуль непрерывности [18] функции $\sigma(t,s) \in C(P)$. Далее надо учесть, что $w(\sigma,\delta,0) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Используя полугрупповое свойство дробного интегрирования и лемму 3, имеем

$$r(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^\alpha \left(\int\limits_0^b (b-s)^{\beta-1} \sigma(t,s) ds \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^\alpha \phi(t) dt = I_0^{1+\alpha} \phi(x) = I_0^1 I_0^\alpha \phi(x) =$$

$$= \int\limits_0^x \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \phi(\tau) d\tau \right) dt \in AC([0,a]).$$

Согласно лемме 1 при $u(x) = r(x)$, $v(y) = y^\beta$ получаем, что $A_3(x,y) \in AC(P)$. Аналогично доказываем, что $A_2(x,y) \in AC(P)$.

На основании определения смешанного дробного интеграла Римана – Лиувилля и его полугруппового свойства выражение для $A_4(x,y)$ запишем в виде

$$A_4(x,y) = I_\theta^{(1+\alpha;1+\beta)} \sigma(x,y) = I_\theta^{(1;1)} \left(I_\theta^{(\alpha;\beta)} \sigma(x,y) \right).$$

Поскольку в силу леммы 3 $\mu(x,y) = I_\theta^{(\alpha;\beta)} \sigma(x,y) \in C(P)$, то

$$A_4(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y \mu(t,s) ds dt \in AC(P).$$

Докажем, что $u_x(x,y) \in C\left((0,a] \times [0,b]\right)$ и $u_x(a,y) = 0$. В соответствии с (19) получаем

$$u_x(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} \left(\frac{\alpha x^{\alpha-1} y^\beta \gamma}{a^{\alpha-1} b^{\beta-1}} - \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}} \int\limits_0^a \int\limits_0^y (a-t)^{\alpha-1} (y-s)^\beta \sigma(t,s) ds dt - \right.$$

$$- \frac{\alpha y^\beta}{b^{\beta-1}} \int\limits_0^x \int\limits_0^b (x-t)^{\alpha-1} (b-s)^{\beta-1} \sigma(t,s) ds dt +$$

$$\left. + \alpha \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x-t)^{\alpha-1} (y-s)^\beta \sigma(t,s) ds dt \right) =$$

$$= B_1(x,y) - B_2(x,y) - B_3(x,y) + B_4(x,y).$$

Очевидно, что $B_1(x,y) \in C((0,a] \times [0,b])$. Далее

$$B_2(x,y) = \frac{x^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}\,\Gamma(\beta+1)} \int\limits_0^y (y-s)^\beta \psi(s)ds,$$

$$\psi(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^a (a-t)^{\alpha-1}\sigma(t,s)dt \in C([0,b]).$$

Учтем, что

$$\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int\limits_0^y (y-s)^\beta \psi(s)ds = I_0^{\beta+1}\psi(y) = I_0^1\left(I_0^\beta \psi(y)\right) \in C([0,b]),$$

так как в силу леммы 3 $I_0^\beta \phi(y) \in C([0,b])$. Следовательно, $B_2(x,y) \in C((0,a] \times [0,b])$.

Пусть

$$\tau(x,y) = I_\theta^{(\alpha;\beta)}\sigma(x,y) \in C(P).$$

Тогда

$$B_3(x,y) = \frac{y^\beta}{\beta b^{\beta-1}}\,\tau(x,b) \in C(P).$$

Рассмотрим $B_4(x,y)$ и согласно лемме 3 запишем его в виде

$$B_4(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\beta)} \int\limits_0^x \int\limits_0^y (x-t)^{\alpha-1}(y-s)^\beta \sigma(t,s)dsdt = I_\theta^{(\alpha;1+\beta)}\sigma(x,y) \in C(P).$$

Очевидно, что $u_x(a,y) = 0$. Аналогично доказываем, что $u_y(x,y) \in C\left([0,a] \times (0,b]\right)$ и $u_y(x,b) = 0$.

Докажем, что $u_q(x,y) \in AC^2(P)$. При непосредственном вычислении дробных интегралов для $u(x,y)$ в виде (19) имеем

$$u_q(x,y) = I_\theta^{(1-\alpha;1-\beta)}u(x,y) = xy\gamma - \frac{x}{a^{\alpha-1}} \int\limits_0^y (y-\tau)\left(\int\limits_0^a (a-z)^{\alpha-1}\sigma(z,\tau)dz\right)d\tau -$$

$$- \frac{y}{b^{\beta-1}} \int\limits_0^x (x-z)\left(\int\limits_0^b (b-\tau)^{\beta-1}\sigma(z,\tau)d\tau\right)dz + I_\theta^{(2;2)}\sigma(x,y) =$$

$$= K_1(x,y) - K_2(x,y) - K_3(x,y) + K_4(x,y). \tag{20}$$

Очевидно, что $K_1(x,y) \in AC(P), K_4(x,y) \in AC(P)$. Второе слагаемое представим в виде

$$K_2(x,y) = \frac{x}{a^{\alpha-1}} \int\limits_0^y (y-\tau)\psi(\tau)d\tau, \quad \psi(\tau) = \int\limits_0^a (a-z)^{\alpha-1}\sigma(z,\tau)dz \in C([0,b]).$$

Поскольку

$$\int\limits_0^y (y-\tau)\psi(\tau)d\tau = \int\limits_0^y \left(\int\limits_0^s \psi(\tau)d\tau\right) ds,$$

то согласно лемме 1 $K_2(x,y) \in AC(P)$. Аналогично доказываем, что $K_3(x,y) \in AC(P)$.

Используя (20), получаем

$$D^1_{xy}u_q(x,y) = \gamma - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \int\limits_0^y \left(\int\limits_0^a (a-z)^{\alpha-1}\sigma(z,\tau)dz\right) d\tau -$$

$$- \frac{1}{b^{\beta-1}} \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^b (b-\tau)^{\beta-1}\sigma(z,\tau)d\tau\right) dz + I_\theta^{(1;1)}\sigma(x,y).$$

Очевидно, что $D^1_{xy}u_q(x,y) \in AC(P)$. Согласно определению смешанной производной Римана – Лиувилля $D^p_\theta u(x,y) = D^2_{xy}u_q(x,y) = \sigma(x,y) = F(x,y,u(x,y))$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть непрерывная функция $F(x,y,u)\colon P\times R \to R$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и условию Липшица $|F(x,y,u) - F(x,y,v)| \le L|u-v|$, причем*

$$\rho = \frac{La^{\alpha+1}b^{\beta+1}}{\alpha\beta\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} < 1.$$

Тогда существует единственное решение краевой задачи (8), (9).

Доказательство. Для $u(x,y) \in C(P)$ определим оператор

$$Tu(x,y) = \int\limits_0^a \int\limits_0^b G(x,t)G(y,s)F[u(t,s)]dsdt.$$

Пусть $u(x,y) \in C(P)$ и $w(x,y) = Tu(x,y)$. Как и при доказательстве теоремы 1, показываем, что $w(x,y) \in S(P) \subset C(P)$. Следовательно, оператор T действует в пространстве $C(P)$ и его неподвижная точка является решением краевой задачи (8), (9).

Докажем, что оператор T является оператором сжатия. Пусть $w_k(x,y) = Tu_k(x,y)$, $u_k(x,y) \in C(P)$, $k = 1,2$. Тогда

$$|w_1(x,y) - w_2(x,y)| \le \int\limits_0^a \int\limits_0^b |G(x,t)|\,|G(y,s)|L|u_1(t,s) - u_2(t,s)|dsdt \le$$

$$\le \sup_x \int\limits_0^a |G(x,t))|dt \sup_y \int\limits_0^b |G(y,s)|ds\, L\|u_1(x,y) - u_2(x,y)\|_C. \qquad (21)$$

Пусть $0 < x < a$. Тогда

$$\int_0^a |G(x,t)|dt \leq \int_0^x |G(x,t)|dt + \int_x^a |G(x,t)|dt =$$

$$= \frac{1}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)} \left[\int_0^x \left(x^\alpha (a-t)^{\alpha-1} - a^{\alpha-1}(x-t)^\alpha \right) dt + \int_x^a x^\alpha (a-t)^{\alpha-1} dt \right]. \tag{22}$$

Из (22) при $\alpha = 1$ получаем

$$\sup_x \int_0^a |G(x,t)|dt \leq \frac{a^2}{2}.$$

Пусть $0 < \alpha < 1$. Согласно (21) имеем

$$\int_0^a |G(x,y)|dt = \frac{1}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} (a^\alpha - (a-x)^\alpha) - \frac{a^{\alpha-1}x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{x^\alpha (a-x)^\alpha}{\alpha} \right) =$$

$$= \frac{1}{a^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x^\alpha a^\alpha}{\alpha} - \frac{a^{\alpha-1}x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) =$$

$$= \left(\frac{x^\alpha a}{\alpha} - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \leq \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(1+\alpha)}. \tag{23}$$

Аналогично получаем

$$\sup_y \int_0^b |G(y,s)|ds \leq \frac{b^{\beta+1}}{\beta\Gamma(1+\beta)}. \tag{24}$$

Из (21), (23), (24) следует, что

$$\|Tu_1(x,y) - Tu_2(x,y)\|_C \leq \rho \|u_1(x,y) - u_2(x,y)\|_C.$$

Согласно принципу сжимающих отображений оператор T имеет единственную неподвижную точку, которая будет решением краевой задачи (8), (9).

Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. *Mangeron D.* Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale all derivate parziale di qaunt con le caratteristiche reali dopi. // Rend. Accad. sci. fis. e mat. Napoli. — 1932. — **2**. — P. 28–40.

3. *Mangeron D.* New methods for determining solutions of mathematical models governing polyvibrating phenomena // Bull. Inst. politech. Iasi. — 1968. — **14**, № 1–2. — P. 433–436.
4. *Birkhoff G., Gordon W. J.* The draftman's and related equations // J. Approxim. Theory. — 1968. — **1**. — P. 199–208.
5. *Seifert P.* Fehlerabschätzungen für differenzenverfahren bei einer hyperbolischen Differentialgleichung // Beitr. Numer. Math. — 1974. — **2**. — S. 193–209.
6. *Витюк А. Н.* О множестве решений краевой задачи для гиперболического дифференциального включения // Дифференц. уравнения. — 1999. — **35**, № 6. — С. 780–783.
7. *Витюк А. Н., Михайленко А. В.* О разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения дробного порядка // Дифференц. уравнения. — 2011. — **47**, № 12. — С. 1803–1807.
8. *Михайленко А. В.* Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения дробного порядка // Вiсн. Одес. нац. ун-ту. Математика, механiка. — 2010. — **15**, вип. 19. — С. 88–93.
9. *Пташник Б. И.* Некорректные краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев: Наук. думка, 1984. — 263 с.
10. *Hadamard J.* Equations aux derivees partielles, le cas hyperbolique // L'Enseignement Math. — 1936. — **35**, № 1. — P. 25–29.
11. *Huber A.* Die erste Randwertaufgabe für geschlossene Bereiche bei der Gleichung $u_{xy} = f(x, y)$ // Monatsh. Math. und Phys. — 1932. — **39**. — S. 79–100.
12. *Vityuk A. N., Mykhailenko A. V.* Darboux problem for differential equation with mixed regularized derivative of fractional order // Nonlinear Stud. — 2013. — **20**, № 4. — P. 571–580.
13. *Витюк А. Н., Михайленко А. В.* Краевая задача для дифференциального уравнения дробного порядка // Вiсн. Одес. нац. ун-ту. — 2014. — **19**, вип. 2(22). — С. 19–26.
14. *Walczak S.* Absolutely continuous functions of several variables and their application // Bull. Polon. Acad. Sci. Math. — 1987. — **35**, № 11–12. — P. 733–744.
15. *Вiрченко Н. О., Рибак В. Я.* Основи дробового iнтегродиференцiювання. — Київ: ТОВ „Задруга", 2007. — 361 с.
16. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. I.* Theory and application of fractional differential equation // Norht-Holland Math. Stud. — 2006. — **204**. — 523 p.
17. *Чикрий А. А., Матичин И. И.* О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2001. — **17**, № 2. — С. 256–270.
18. *Тиман А. Ф.* Теория функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.
19. *Витюк А. Н., Михайленко А. В.* Об одном классе дифференциальных уравнений // Нелiнiйнi коливання. — 2008. — **11**, № 3. — С. 293–304.

Получено 22.01.15