УДК 517.9

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

А. Н. Станжицкий

Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко
просп. Глушкова, 4, Киев, 03680, Украина
e-mail: ostanzh@gmail.com

А. О. Цуканова

Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”
просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина
e-mail: shugaray@mail.ru

We prove a theorem on existence and uniqueness of a mild solution to the Cauchy problem for one stochastic differential equation of neutral type in a weighted Hilbert space.

Доведено теорему існування та єдиності м’якого розв’язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння нейтрального типу в гільбертовому просторі.

1. Введение. Множество работ посвящено вопросам существования и единственности решения стохастических дифференциальных уравнений при заданных начально-краевых условиях в различных функциональных пространствах [5, 7, 10 – 14], в частности гильбертовых [1, 3, 4, 8, 9]. Особый интерес вызывают нелинейные стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, существенным признаком которых является наличие эффекта запаздывания, — нелинейные ***стохастические дифференциальные уравнения нейтрального типа*** — и свойства их решений. В работе [9] рассмотрена начальная задача для абстрактного функционального уравнения такого типа в гильбертовом пространстве и доказана теорема о существовании и единственности ее ***мягкого решения***. Однако условия этой теоремы в общем виде сложно проверять для конкретных прикладных задач. Важным является вопрос о нахождении коэффициентных условий существования и единственности решения, т. е. условий, выраженных в терминах коэффициентов уравнения, а поэтому удобных для проверки. Это возможно осуществить лишь в частных случаях, одному из которых посвящена настоящая статья. Ее структура такова: пункт 2 содержит постановку задачи, пункт 3 — предварительные сведения, пункт 4 — формулировку основного результата, его доказательству посвящен пункт 5, в пункте 6 получен результат-следствие.

2. Постановка задачи. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство. Рассматривается задача Коши для стохастического интегро-дифференциального уравнения реакции-диффузии нейтрального типа

$$d\left(u(t,x)+\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(t,x,u(\alpha(t),\xi),\xi)\,d\xi\right) = (\Delta_x u(t,x) + f(t,u(\alpha(t)),x))\;dt+$$

$$+\,\sigma(t,u(\alpha(t)),x)dW(t,x),\quad 0<t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^d, \tag{1}$$

$$u(t,x)=\phi(t,x),\quad -r\le t\le 0,\quad x\in\mathbb{R}^d,\quad r>0,$$

где $T>0$ — фиксированное число, $\Delta_x \equiv \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2$ — d-мерный оператор Лапласа, $\partial_{x_i}^2 \equiv \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $i\in\{1,\ldots,d\}$, $W(t,x)$ — $L_2(\mathbb{R}^d)$-значный Q-винеровский процесс, $\{f,\sigma\}\colon [0,T]\times \times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ и $b\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ — некоторые заданные функции, $\phi\colon[-r,0]\times \times\mathbb{R}^d\times\Omega\to\mathbb{R}$ — начальные данные, а $\alpha\colon[0,T]\to[-r,\infty)$ — функция запаздывания. Для задачи (1) докажем теорему о существовании и единственности мягкого решения.

3. Предварительные сведения. В данном пункте приведены обозначения и некоторые известные результаты, необходимые для дальнейшего. Пусть поток σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t\ge 0\}$ генерируется $L_2(\mathbb{R}^d)$-значным Q-винеровским процессом $W(t,x)=\sum_{n=1}^\infty \sqrt{\lambda_n}e_n(x)\beta_n(t)$, где $\{\beta_n(t), n\in\{1,2,\ldots\}\}\subset\mathbb{R}$ — независимые броуновские движения, $\{\lambda_n, n\in\{1,2,\ldots\}\}$ — последовательность положительных чисел, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n<\infty, \tag{2}$$

а $\{e_n(x), n\in\{1,2,\ldots\}\}$ — ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R}^d)$ такой, что

$$\sup_{n\in\{1,2,\ldots\}}\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d}|e_n(x)|\le 1. \tag{3}$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения из теории уравнений в частных производных.

Лемма 1 [2, с. 47]. *Если в однородной задаче Коши*

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x)&=\Delta_x u(t,x),\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}^d,\\ u(0,x)&=g(x),\quad x\in\mathbb{R}^d,\end{aligned} \tag{4}$$

начальные данные g принадлежат $C(\mathbb{R}^d)\cap L_1(\mathbb{R}^d)$, то ее решение задается в виде интеграла Пуассона

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t,x-\xi)g(\xi)\,d\xi, \tag{5}$$

где

$$\mathcal{K}(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{4t}\right\}, & t > 0, \\ \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

— ядро теплопроводности, причем $u \in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$.

Лемма 2. *Если* g *принадлежит* $L_1(\mathbb{R}^d)$, *то для функции (5) справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{|x|\to\infty} u(t,x) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} \partial_t u(t,x) = 0. \tag{6}$$

Доказательство следует из теорем о дифференцируемости интеграла Лебега по параметру и возможности предельного перехода в нем.

В дальнейшем производные понимаются в обычном смысле.

Лемма 3 [6, с. 319]. *Для производных ядра* $\mathcal{K}$ *справедлива оценка*

$$|\partial_t^r \partial_x^s \mathcal{K}(t,x)| \le c_{r,s} t^{-\frac{d}{2}-r-\frac{s}{2}} \exp\left\{-\frac{c_0|x|^2}{t}\right\}, \quad c_{r,s} > 0, \quad 0 < c_0 < \frac{1}{4}.$$

Из лемм 1–3 вытекает следующий результат.

Лемма 4 [2, с. 360]. *Если* g *принадлежит* $L_1(\mathbb{R}^d)$ *и*

$$|\nabla_x g| \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \|D_x^2 g\| \in L_2(\mathbb{R}^d), \tag{7}$$

то для вторых производных функции (5) справедлива оценка

$$\sup_{0\le t\le T} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\Delta_x u(t,x))^2\, dx = \sup_{0\le t\le T} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \|D_x^2 u(t,x)\|^2\, dx \le C \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left\|D_x^2 g(x)\right\|^2\, dx, \tag{8}$$

где $C > 0$ *— некоторая постоянная, зависящая лишь от* T, $\nabla_x \equiv (\partial_{x_1} \ldots \partial_{x_d})^{\mathrm{T}}$, $D_x^2 \equiv$
$\equiv \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1} & \ldots & \partial_{x_1 x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_d x_1} & \ldots & \partial^2_{x_d} \end{pmatrix}$ *— оператор Гессе,* $\|\cdot\|$ *— соответствующая норма матрицы.*

Определение 1. *Положительная ограниченная функция* $\rho \in L_1(\mathbb{R}^d)$ *называется допустимым весом, если для каждого* $T > 0$ *существует константа* $C_\rho(T) > 0$ *такая, что для любого* $0 \le t \le T$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t, x-\xi)\rho(x)\, dx \le C_\rho(T)\rho(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Замечание 1. Типичными примерами допустимых весов являются функции

$$\rho(x) = \exp\{-r|x|\}, \quad r > 0, \quad \rho(x) = \frac{1}{1+|x|^r}, \quad r > d.$$

Замечание 2. Не сужая общности, будем считать, что $0 < \rho \leq 1$.

Здесь и в дальнейшем $L_2^\rho(\mathbb{R}^d)$ обозначает весовое гильбертово пространство с допустимым весом и нормой $\|f\|_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \rho(x)\, dx}$.

Лемма 5 [16; 17, с. 188]. *Операторы* $S(t)\colon L_2^\rho(\mathbb{R}^d) \to L_2^\rho(\mathbb{R}^d)$, *генерирующие решение задачи (4) по правилу*

$$u(t,x) = (S(t)g(\cdot))(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t, x-\xi) g(\cdot)\, d\xi, \tag{9}$$

образуют (C_0)*-полугруппу операторов, инфинитезимальным генератором которой является* Δ_x. *При этом справедлива оценка*

$$\|(S(t)g(\cdot))(x)\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} \leq C_\rho(T)\|g(x)\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad g \in L_2^\rho(\mathbb{R}^d). \tag{10}$$

Пусть $p \geq 2$. Через $\mathfrak{B}_{p,T,\rho}$ обозначим банахово пространство всех $L_2^\rho(\mathbb{R}^d)$-значных $\mathcal{F}_t$-измеримых для почти всех $0 \leq t \leq T$ случайных процессов $\Phi\colon [0,T] \times \Omega \to L_2^\rho(\mathbb{R}^d)$, непрерывных по t для почти всех $\omega \in \Omega$, с нормой $\|\Phi\|_{\mathfrak{B}_{p,T,\rho}} = \sqrt[p]{\sup\limits_{0\leq t\leq T} \mathbf{E}\|\Phi(t)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}}$. В следующем пункте будет сформулирована теорема о существовании и единственности для $0 \leq t \leq T$ мягкого решения задачи (1) в пространстве $\mathfrak{B}_{p,T,\rho}$.

4. Основной результат. В дальнейшем будем считать выполненными следующие предположения:

4.1) $\alpha\colon [0,T] \to [-r, \alpha(T)]$ — функция из $C^1([0,T])$ с $0 < \alpha' \leq 1$;

4.2) $\{f, \sigma\}\colon [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $b\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — измеримые по совокупности своих аргументов функции;

4.3) начальная функция $\phi\colon [-r, 0] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_0$-измерима, независима от $W(t,x)$, $t \geq 0$, и такая, что

$$\sup_{-r\leq t\leq 0} \mathbf{E}\|\phi(t)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} < \infty. \tag{11}$$

Определение 2. *Непрерывный случайный процесс* $u\colon [-r,T] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$ *называется мягким решением задачи (1), если он:*

1) $\mathcal{F}_t$*-измерим для почти всех* $-r \leq t \leq T$;

2) является решением интегро-дифференциального уравнения вида

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t, x-\xi) \left(\phi(0) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(0,\xi,\phi(-r,\zeta),\zeta)\, d\zeta \right) d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(t,x,u(\alpha(t),\xi),\xi)\, d\xi -$$

$$- \int\limits_0^t \left(\Delta_x \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t-s, x-\xi) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(s,\xi,u(\alpha(s),\zeta),\zeta)\, d\zeta \right) \, d\xi \right) ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t-s, x-\xi) f(s, u(\alpha(s)), \xi)\, d\xi\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t-s, x-\xi) \sigma(s, u(\alpha(s)), \xi) e_n(\xi)\, d\xi \right) d\beta_n(s),$$

$$0 \le t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$u(t,x) = \phi(t,x), \quad -r \le t \le 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad r > 0;$$

3) удовлетворяет условию

$$\mathbf{E} \int\limits_0^T \|u(t)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\, dt < \infty.$$

Для так определенного решения справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что выполняются предположения 4.1 – 4.3, а также:*

1) функции $\{f, \sigma\}$ удовлетворяют условиям линейного роста и Липшица по второму аргументу, т. е. существует $L > 0$ такое, что

$$|f(t,u,x)| + |\sigma(t,u,x)| \le L(1 + |u|), \quad 0 \le t \le T, \quad u \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{12}$$

$$|f(t,u,x) - f(t,v,x)| + |\sigma(t,u,x) - \sigma(t,v,x)| \le L|u - v|,$$
$$0 \le t \le T, \quad \{u, v\} \subset \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d; \tag{13}$$

2) функция b удовлетворяет условиям

$$\sup_{0 \le t \le T} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(t,x,0,\xi)| d\xi \right)^2 \rho(x) dx < \infty, \tag{14}$$

$$\sup_{0 \le t \le T} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(t,x,0,\xi)| d\xi dx < \infty, \tag{15}$$

а также условию Липшица по третьему аргументу вида

$$|b(t,x,u,\xi) - b(t,x,v,\xi)| \le l(t,x,\xi)|u-v|, \quad 0 \le t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^d, \quad \{u,v\} \subset \mathbb{R}, \tag{16}$$

где функция $l\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ *такая, что*

$$\sup_{0\le t\le T} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{l^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}\, d\xi \right) \rho(x)dx < \infty, \tag{17}$$

$$\sup_{0\le t\le T} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{l^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}\, d\xi}\, dx < \infty; \tag{18}$$

3) для любого $x \in \mathbb{R}^d$ *существуют производные* $\partial_{x_i} b$, $\partial_{x_i x_j} b$, $\{i,j\} \subset \{1,\ldots,d\}$, *при этом для градиента* $\nabla_x b$ *и матрицы* $D_x^2 b$ *выполняется условие линейного роста по третьему аргументу вида*

$$\begin{gathered} |\nabla_x b(t,x,u,\xi)| + \|D_x^2 b(t,x,u,\xi)\| \le \psi(t,x,\xi)(1+|u|), \\ 0 \le t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^d, \quad u \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{19}$$

а для матрицы $D_x^2 b$ *— условие Липшица вида*

$$\begin{gathered} \left\| D_x^2 b(t,x,u,\xi) - D_x^2 b(t,x,v,\xi) \right\| \le \psi(t,x,\xi)|u-v|, \\ 0 \le t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^d, \quad \{u,v\} \subset \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{20}$$

где функция $\psi\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ *удовлетворяет условиям*

$$\sup_{0\le t\le T} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(t,x,\xi)d\xi \right)^2 dx < \infty, \tag{21}$$

$$\sup_{0\le t\le T} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\psi^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}\, d\xi\, dx < \infty, \tag{22}$$

причем для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^d$ *существуют окрестность* $B_\delta(x_0)$ *и неотрицательная функция* $\varphi(t,\xi,x_0,\delta)$ *такая, что*

$$\sup_{0\le t\le T} \frac{\varphi(t,\cdot,x_0,\delta)}{\sqrt{\rho(\cdot)}} \in L_2(\mathbb{R}^d), \delta \in \mathbb{R}^+, \tag{23}$$

$$|\psi(t,x,\xi) - \psi(t,x_0,\xi)| \le \varphi(t,\xi,x_0,\delta)|x-x_0|, \quad 0 \le t \le T, \quad |x-x_0| < \delta, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{24}$$

Тогда если

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{l^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}\,d\xi\right)\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}} < \frac{1}{4^{p-1}}, \tag{25}$$

то задача (1) имеет единственное на $0\le t\le T$ *мягкое решение* $u\in\mathfrak{B}_{p,T,\rho}$.

5. Доказательство теоремы 1. Доказательство базируется на классической теореме Банаха о неподвижной точке. Для этого рассмотрим оператор $\Psi\colon\mathfrak{B}_{p,T,\rho}\to\mathfrak{B}_{p,T,\rho}$:

$$(\Psi u)(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t,x-\xi)\left(\phi(0)+\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(0,\xi,\phi(-r,\zeta),\zeta)d\zeta\right)d\xi-\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(t,x,u(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi-$$

$$-\int\limits_0^t\left(\Delta_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t-s,x-\xi)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(s,\xi,u(\alpha(s),\zeta),\zeta)d\zeta\right)d\xi\right)ds+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t-s,x-\xi)f(s,u(\alpha(s)),\xi)d\xi ds+$$

$$+\int\limits_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(t-s,x-\xi)\sigma(s,u(\alpha(s)),\xi)e_n(\xi)d\xi\right)d\beta_n(s)=\sum_{j=0}^4 I_j(t),$$

$$0\le t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^d,$$

$$u(t,x)=\phi(t,x),\quad -r\le t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^d,$$

и докажем, что он сжимающий. Покажем сначала, что Ψu принадлежит $\mathfrak{B}_{p,T,\rho}$ для любого $u\in\mathfrak{B}_{p,T,\rho}$. Для этого оценим $\|I_j(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}=\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\|I_j(s)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}$, $j\in\{0,\ldots,4\}$.

Оценим $\|I_0(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}$:

$$\|I_0(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}=\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s,x-\xi)\left(\phi(0)+\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(0,\xi,\phi(-r,\zeta),\zeta)d\zeta\right)d\xi\right\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\le$$

$$\le 2^{p-1}\left(\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s,x-\xi)\phi(0)d\xi\right\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}+\right.$$

$$+\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s,x-\xi)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}(b(0,\xi,\phi(-r,\zeta),\zeta)-\right.\right.$$

$$-b(0,\xi,0,\zeta)+b(0,\xi,0,\zeta))d\zeta\Bigg)d\xi\Bigg\|^p_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)}\Bigg) \le$$

$$\le 2^{p-1}\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s,x-\xi)\phi(0)d\xi\Bigg\|^p_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)} +$$

$$+4^{p-1}\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s,x-\xi)\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}(b(0,\xi,\phi(-r,\zeta),\zeta)-b(0,\xi,0,\zeta))d\zeta\Bigg)d\xi\Bigg\|^p_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)}+$$

$$+4^{p-1}\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s,x-\xi)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(0,\xi,0,\zeta)d\zeta\Bigg)d\xi\Bigg\|^p_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)} = I_0^1+I_0^2+I_0^3.$$

Использовав (10) и (11), оценим I_0^1:

$$I_0^1 = 2^{p-1}\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s,x-\xi)\phi(0)d\xi\Bigg\|^p_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)} \le 2^{p-1}C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)\mathbf{E}\|\phi(0)\|^p_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)}<\infty.$$

Оценим I_0^2, использовав (10), (11), (16), (17) и неравенство Коши – Буняковского:

$$I_0^2 = 4^{p-1}\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s,x-\xi)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}(b(0,\xi,\phi(-r,\zeta),\zeta)-b(0,\xi,0,\zeta))d\zeta\right)d\xi\Bigg\|^p_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)} \le$$

$$\le 4^{p-1}C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}|b(0,x,\phi(-r,\zeta),\zeta)-b(0,x,0,\zeta)|d\zeta\Bigg\|^p_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= 4^{p-1}C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)\mathbf{E}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}|b(0,x,\phi(-r,\zeta),\zeta)-b(0,x,0,\zeta)|d\zeta\right)^2\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}} \le$$

$$\le 4^{p-1}C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)\mathbf{E}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{l(0,x,\zeta)}{\sqrt{\rho(\zeta)}}|\phi(-r,\zeta)|\sqrt{\rho(\zeta)}d\zeta\right)^2\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}} \le$$

$$\le 4^{p-1}C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)\mathbf{E}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{l^2(0,x,\zeta)}{\rho(\zeta)}\,d\zeta\right)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\phi^2(-r,\zeta)\rho(\zeta)\,d\zeta\right)\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}} =$$

$$= 4^{p-1} C_\rho^{\frac{p}{2}}(T) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{l^2(0,x,\zeta)}{\rho(\zeta)} d\zeta \right) \rho(x) dx \right)^{\frac{p}{2}} \mathbf{E} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \phi^2(-r,\zeta)\rho(\zeta) d\zeta \right)^{\frac{p}{2}} =$$

$$= 4^{p-1} C_\rho^{\frac{p}{2}}(T) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{l^2(0,x,\zeta)}{\rho(\zeta)} d\zeta \right) \rho(x) dx \right)^{\frac{p}{2}} \mathbf{E} \|\phi(-r)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} < \infty.$$

Оценим I_0^3, использовав (10) и (14):

$$I_0^3 = 4^{p-1} \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(s, x-\xi) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(0,\xi,0,\zeta) d\zeta \right) dx \right\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} \le$$

$$\le 4^{p-1} C_\rho^{\frac{p}{2}}(T) \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(0,x,0,\zeta)| d\zeta \right\|^p =$$

$$= 4^{p-1} C_\rho^{\frac{p}{2}}(T) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(0,x,0,\zeta)| d\zeta \right)^2 \rho(x) dx \right)^{\frac{p}{2}} < \infty.$$

На основании этих трех оценок получаем

$$\|I_0(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}} < \infty. \tag{26}$$

Оценим $\|I_1(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}$ с учетом (11), (14), (16), (17) и неравенства Коши – Буняковского:

$$\|I_1(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}} = \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(s,x,u(\alpha(s),\xi),\xi) d\xi \right\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(s,x,u(\alpha(s),\xi),\xi) d\xi \right)^2 \rho(x) dx \right)^{\frac{p}{2}} \le$$

$$\le 2^{\frac{p}{2}} \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(s,x,u(\alpha(s),\xi),\xi) - b(s,x,0,\xi)| d\xi \right)^2 \rho(x) dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(s,x,0,\xi)| d\xi \right)^2 \rho(x) dx \right)^{\frac{p}{2}} \le$$

$$\leq 2^{p-1}\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{l(s,x,\xi)}{\sqrt{\rho(\xi)}}\,|u(\alpha(s),\xi)|\sqrt{\rho(\xi)}d\xi\right)^2\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}+$$

$$+\,2^{p-1}\sup_{0\leq s\leq t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}|b(s,x,0,\xi)|d\xi\right)^2\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}\leq$$

$$\leq 2^{p-1}\sup_{0\leq s\leq t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{l^2(s,x,\xi)}{\rho(\xi)}d\xi\right)\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}u^2(\alpha(s),\xi)\rho(\xi)d\xi\right)^{\frac{p}{2}}+$$

$$+\,2^{p-1}\sup_{0\leq s\leq t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}|b(s,x,0,\xi)|d\xi\right)^2\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}\leq$$

$$\leq 2^{p-1}\sup_{0\leq s\leq t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{l^2(s,x,\xi)}{\rho(\xi)}\,d\xi\right)\rho(x)\,dx\right)^{\frac{p}{2}}\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\|u(\alpha(s))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}+$$

$$+\,2^{p-1}\sup_{0\leq s\leq t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}|b(s,x,0,\xi)|d\xi\right)^2\rho(x)\,dx\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Пусть $0<t^*<\alpha(T)$ такая, что $\alpha(t^*)=0$. Имеем

$$\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\|u(\alpha(s))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\leq\sup_{0\leq s\leq t^*}\mathbf{E}\|u(\alpha(s))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}+\sup_{t^*\leq s\leq t}\mathbf{E}\|u(\alpha(s))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}=$$

$$=\sup_{-r\leq s\leq 0}\mathbf{E}\|\phi(s)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}+\sup_{0\leq s\leq\alpha(t)}\mathbf{E}\|u(s)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\leq$$

$$\leq\sup_{-r\leq s\leq 0}\mathbf{E}\|\phi(s)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}+\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\|u(s)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}<\infty,$$

откуда следует, что

$$\|I_1(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}<\infty. \tag{27}$$

Оценим $\|I_2(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}$ с учетом замечания 2, неравенства Коши – Буняковского и теоремы Фубини:

$$\|I_2(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}=\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^s\left(\Delta_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau,x-\xi)\times\right.\right.$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau, \xi, u(\alpha(\tau), \zeta) d\zeta \right) d\xi \Bigg) d\tau \Bigg\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_0^s \left(\Delta_x \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(s-\tau, x-\xi) \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau, \xi, u(\alpha(\tau), \zeta), \zeta) d\zeta \right) d\xi \right) d\tau \right)^2 \rho(x) dx \right)^{\frac{p}{2}} \le$$

$$\le t^{\frac{p}{2}} \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} \left(\int\limits_0^s \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\Delta_x \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(s-\tau, x-\xi) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau, \xi, u(\alpha(\tau), \zeta), \zeta) d\zeta \right) d\xi \right)^2 dx d\tau \right)^{\frac{p}{2}} \le$$

$$\le C^{\frac{p}{2}} t^{\frac{p}{2}} \mathbf{E} \left(\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left\| D_x^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau, x, u(\alpha(\tau), \zeta), \zeta) d\zeta \right\|^2 dx d\tau \right)^{\frac{p}{2}}, \tag{28}$$

если выполнены условия леммы 4, в которой $g(\tau, x) = \int_{\mathbb{R}^d} b(\tau, x, u(\alpha(\tau), \zeta), \zeta) d\zeta$, $u(\tau, x) = = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(s-\tau, x-\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^d} b(\tau, \xi, u(\alpha(\tau), \zeta), \zeta) d\zeta \right) d\xi$. Проверим для такой функции g справедливость леммы 4. Для этого докажем, что:

1) для любого $0 \le \tau \le t$ с вероятностью единица $\int_{\mathbb{R}^d} b(\tau, \cdot, u(\alpha(\tau), \zeta), \zeta) d\zeta \in L_1(\mathbb{R}^d)$;

2) условие (7) выполняется.

1. Действительно, в силу (11), (15), (16), (18) и неравенства Коши – Буняковского имеем

$$\mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau, x, u(\alpha(\tau), \zeta), \zeta) d\zeta \right| dx \le \mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{l(\tau, x, \zeta)}{\sqrt{\rho(\zeta)}} |u(\alpha(\tau), \zeta)| \sqrt{\rho(\zeta)} d\zeta\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(\tau, x, 0, \zeta)| d\zeta\, dx \le \left(\sup_{0 \le \tau \le t} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{l^2(\tau, x, \zeta)}{\rho(\zeta)} d\zeta}\, dx \right) \times$$

$$\times \sqrt{\sup_{0 \le \tau \le t} \mathbf{E} \|u(\alpha(\tau))\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}} + \sup_{0 \le \tau \le t} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(\tau, x, 0, \zeta)|\, d\zeta dx \le$$

$$\leq \left(\sup_{0\leq\tau\leq t} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{l^2(\tau,x,\zeta)}{\rho(\zeta)}\, d\zeta dx} \right) \sqrt{\sup_{-r\leq\tau\leq 0} \mathbf{E}\|\phi(\tau)\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} + \sup_{0\leq\tau\leq t} \mathbf{E}\|u(\tau)\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}} +$$

$$+ \sup_{0\leq\tau\leq t} \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(\tau,x,0,\zeta)| d\zeta dx < \infty,$$

откуда с вероятностью единица следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau,x,u(\alpha(\tau),\zeta),\zeta) d\zeta \right| dx < \infty.$$

2. Докажем дифференцируемость функции g при $x = x_0$ — произвольной точке из $\mathbb{R}^d$. Пусть $B_\delta(x_0)$ — окрестность из п. 3. Тогда в силу (19) и (24) имеем

$$|\nabla_x b(\tau,x,u(\alpha(\tau),\zeta),\zeta)| \leq \psi(\tau,x,\zeta)(1+|u(\alpha(\tau),\zeta)|) \leq$$
$$\leq (|\psi(\tau,x,\zeta)-\psi(\tau,x_0,\zeta)| + \psi(\tau,x_0,\zeta))(1+|u(\alpha(\tau),\zeta)|) \leq$$
$$\leq (\varphi(\tau,\zeta,x_0,\delta)|x-x_0| + \psi(\tau,x_0,\zeta))(1+|u(\alpha(\tau),\zeta)|) \leq$$
$$\leq (\delta\varphi(\tau,\zeta,x_0,\delta) + \psi(\tau,x_0,\zeta))(1+|u(\alpha(\tau),\zeta)|).$$

Покажем, что $(\delta\varphi(\tau,\cdot,x_0,\delta)+\psi(\tau,x_0,\cdot))(1+|u(\alpha(\tau),\cdot)|) \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Учитывая неравенство Коши – Буняковского и (11), (21) – (23), получаем

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d} (\delta\varphi(\tau,\zeta,x_0,\delta) + \psi(\tau,x_0,\zeta))(1+|u(\alpha(\tau),\zeta)|) d\zeta = \delta \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(\tau,\zeta,x_0,\delta)}{\sqrt{\rho(\zeta)}} \sqrt{\rho(\zeta)} d\zeta +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(\tau,x_0,\zeta) d\zeta + \delta\mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(\tau,\zeta,x_0,\delta)}{\sqrt{\rho(\zeta)}} |u(\alpha(\tau),\zeta)| \sqrt{\rho(\zeta)} d\zeta +$$

$$+ \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\psi(\tau,x_0,\zeta)}{\sqrt{\rho(\zeta)}} |u(\alpha(\tau),\zeta)| \sqrt{\rho(\zeta)} d\zeta \leq \delta \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi^2(\tau,\zeta,x_0,\delta)}{\rho(\zeta)}\, d\zeta} \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho(\zeta) d\zeta} +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(\tau,x_0,\zeta) d\zeta + \left(\delta \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi^2(\tau,\zeta,x_0,\delta)}{\rho(\zeta)}\, d\zeta} + \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\psi^2(\tau,x_0,\zeta)}{\rho(\zeta)}\, d\zeta} \right) \times$$

$$\times \sqrt{\sup_{0\leq\tau\leq t} \mathbf{E}\|u(\alpha(\tau))\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}} \leq \delta \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi^2(\tau,\zeta,x_0,\delta)}{\rho(\zeta)}\, d\zeta} \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho(\zeta)\, d\zeta} +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(\tau,x_0,\zeta)d\zeta+\left(\delta\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\varphi^2(\tau,\zeta,x_0,\delta)}{\rho(\zeta)}d\zeta}+\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi^2(\tau,x_0,\zeta)}{\rho(\zeta)}d\zeta}\right)\times$$

$$\times\sqrt{\sup_{-r\le\tau\le 0}\mathbf{E}\|\phi(\tau)\|^2_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)}+\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\|u(\tau)\|^2_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)}}<\infty,$$

откуда с вероятностью единица следует справедливость требуемого условия

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}(\delta\varphi(\tau,\zeta,x_0,\delta)+\psi(\tau,x_0,\zeta))(1+|u(\alpha(\tau),\zeta)|)d\zeta<\infty.$$

Таким образом, из локальной теоремы о дифференцируемости интеграла по параметру следуют существование $\nabla_x g(\tau,x)$ и равенство

$$\nabla_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,x,u(\alpha(\tau),\zeta),\zeta)d\zeta=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\nabla_x b(\tau,x,u(\alpha(\tau),\zeta),\zeta)d\zeta. \qquad (29)$$

Покажем теперь, что $\nabla_x\int_{\mathbb{R}^d}b(\tau,\cdot,u(\alpha(\tau),\zeta),\zeta)d\zeta\in L_2(\mathbb{R}^d)$. В силу (11), (19), (21), (22), (29) и неравенства Коши – Буняковского получаем

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,x,u(\alpha(\tau),\zeta),\zeta)\,d\zeta\right|^2dx\le\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\nabla_x b(\tau,x,u(\alpha(\tau),\zeta),\zeta)|d\zeta\right)^2dx\le$$

$$\le\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(\tau,x,\zeta)(1+|u(\alpha(\tau),\zeta)|)d\zeta\right)^2dx\le 2\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(\tau,x,\zeta)d\zeta\right)^2dx+$$

$$+2\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi^2(\tau,x,\zeta)}{\rho(\zeta)}\,d\zeta dx\right)\mathbf{E}\|u(\alpha(\tau))\|^2_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)}\le 2\sup_{0\le\tau\le t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(\tau,x,\zeta)d\zeta\right)^2dx+$$

$$+2\sup_{0\le\tau\le t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi^2(\tau,x,\zeta)}{\rho(\zeta)}\,d\zeta dx\right)\mathbf{E}\|u(\alpha(\tau))\|^2_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)}\le 2\sup_{0\le\tau\le t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(\tau,x,\zeta)d\zeta\right)^2dx+$$

$$+2\left(\sup_{0\le\tau\le t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi^2(\tau,x,\zeta)}{\rho(\zeta)}\,d\zeta dx\right)\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\|u(\alpha(\tau))\|^2_{L^\rho_2(\mathbb{R}^d)}\le$$

$$\le 2\sup_{0\le\tau\le t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(\tau,x,\zeta)d\zeta\right)^2dx+2\left(\sup_{0\le\tau\le t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi^2(\tau,x,\zeta)}{\rho(\zeta)}\,d\zeta\,dx\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{-r\le\tau\le 0}\mathbf{E}\|\phi(\tau)\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}+\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\|u(\tau)\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\right)<\infty,$$

откуда с вероятностью единица следует требуемое условие

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,x,u(\alpha(\tau)),\zeta),\zeta)d\zeta\right|^2dx<\infty.$$

Для $D_x^2\int_{\mathbb{R}^d}b(\tau,x,u(\alpha(\tau),\zeta),\zeta)d\zeta$ выполнение условия (7) доказывается аналогично. Из изложенного следует, что в (28)

$$\|I_2(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}\le C^{\frac{p}{2}}t^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left\|D_x^2\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,x,u(\alpha(\tau),\zeta),\zeta)d\zeta\right\|^2dxd\tau\right)^{\frac{p}{2}}\le$$

$$\le C^{\frac{p}{2}}t^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left\|D_x^2b(\tau,x,u(\alpha(\tau),\zeta),\zeta)\right\|\,d\zeta\right)^2dxd\tau\right)^{\frac{p}{2}}\le$$

$$\le 2^{\frac{p}{2}}C^{\frac{p}{2}}t^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(\tau,x,\zeta)d\zeta\right)^2dxd\tau+\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi^2(\tau,x,\zeta)}{\rho(\zeta)}\,d\zeta dxd\tau\right)\|u(\alpha(\tau))\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{p}{2}}\le$$

$$\le 2^{p-1}C^{\frac{p}{2}}t^{\frac{p}{2}}\left(\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(\tau,x,\zeta)d\zeta\right)^2dxd\tau\right)^{\frac{p}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi^2(\tau,x,\zeta)}{\rho(\zeta)}\,d\zeta dxd\tau\right)^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}\|u(\alpha(\tau))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\right)\le 2^{p-1}C^{\frac{p}{2}}t^p\times$$

$$\times\left(\sup_{0\le\tau\le t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(\tau,x,\zeta)d\zeta\right)^2dx\right)^{\frac{p}{2}}+\sup_{0\le\tau\le t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi^2(\tau,x,\zeta)}{\rho(\zeta)}\,d\zeta dx\right)^{\frac{p}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sup_{-r\le\tau\le 0}\mathbf{E}\|\phi(\tau)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}+\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\|u(\tau)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\right)\right)<\infty. \qquad (30)$$

Учитывая (10) – (12), оцениваем $\|I_3(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}$,:

$$\|I_3(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}} = \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau,x-\xi)f(\tau,u(\alpha(\tau)),\xi)d\xi d\tau\right\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau,x-\xi)f(\tau,u(\alpha(\tau),\xi),\xi)d\xi d\tau\right)^2\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}} \le$$

$$\le t^{\frac{p}{2}}\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left(\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau,x-\xi)f(\tau,u(\alpha(\tau),\xi),\xi)d\xi\right)^2\rho(x)dxd\tau\right)^{\frac{p}{2}} \le$$

$$\le L^p t^{\frac{p}{2}}\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left(\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau,x-\xi)(1+|u(\alpha(\tau),\xi)|)d\xi\right)^2\rho(x)dxd\tau\right)^{\frac{p}{2}} \le$$

$$\le 2^{\frac{p}{2}}L^p t^{\frac{p}{2}}\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left(\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau,x-\xi)d\xi\right)^2\rho(x)dxd\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau,x-\xi)|u(\alpha(\tau),\xi)|d\xi\right)^2\rho(x)dxd\tau\right)^{\frac{p}{2}} =$$

$$= 2^{\frac{p}{2}}L^p t^{\frac{p}{2}}\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left(\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dxd\tau+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^s\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau,x-\xi)|u(\alpha(\tau))|d\xi\right\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}d\tau\right)^{\frac{p}{2}} \le$$

$$\le 2^{p-1}L^p t^{\frac{p}{2}}\left(\sup_{0\le s\le t}\left(\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dxd\tau\right)^{\frac{p}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left(\int\limits_0^s\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau,x-\xi)|u(\alpha(\tau))|d\xi\right\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}d\tau\right)^{\frac{p}{2}}\right) \le$$

$$\le 2^{p-1}L^p t^{\frac{p}{2}}\left(t^{\frac{p}{2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}+C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)\mathbf{E}\left(\int\limits_0^t\|u(\alpha(\tau))\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}d\tau\right)^{\frac{p}{2}}\right) \le$$

$$\leq 2^{p-1}L^p t^{\frac{p}{2}}\left(t^{\frac{p}{2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}+C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)t^{\frac{p-2}{2}}\mathbf{E}\int\limits_0^t\|u(\alpha(\tau))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}d\tau\right)=$$

$$=2^{p-1}L^p t^{\frac{p}{2}}\left(t^{\frac{p}{2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}+C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)t^{\frac{p-2}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\mathbf{E}\left(\int\limits_0^{t^*}\|u(\alpha(\tau))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}d\tau+\int\limits_{t^*}^t\|u(\alpha(\tau))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}d\tau\right)\right)=$$

$$=2^{p-1}L^p t^{\frac{p}{2}}\left(t^{\frac{p}{2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}+C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)t^{\frac{p-2}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\mathbf{E}\left(\int\limits_{-r}^0\|\phi(\alpha(\tau))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\frac{1}{\alpha'(\tau)}\,d\alpha(\tau)+\int\limits_0^{\alpha(t)}\|u(\alpha(\tau))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\frac{1}{\alpha'(\tau)}d\alpha(\tau)\right)\right).$$

Из предположения 4.1 следует существование $c>0$ такой, что $\dfrac{1}{\alpha'(\tau)}\leq c,\ 0\leq\tau\leq t.$ Поэтому

$$2^{p-1}L^p t^{\frac{p}{2}}\left(t^{\frac{p}{2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}+C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)t^{\frac{p-2}{2}}\mathbf{E}\left(\int\limits_{-r}^0\|\phi(\alpha(\tau))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\frac{1}{\alpha'(\tau)}\,d\alpha(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_0^{\alpha(t)}\|u(\alpha(\tau))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\frac{1}{\alpha'(\tau)}d\alpha(\tau)\right)\right)\leq$$

$$\leq 2^{p-1}L^p t^{\frac{p}{2}}\left(t^{\frac{p}{2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}+cC_\rho^{\frac{p}{2}}(T)t^{\frac{p-2}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\mathbf{E}\left(\int\limits_{-r}^0\|\phi(\tau)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}d\tau+\int\limits_0^{\alpha(t)}\|u(\tau)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}d\tau\right)\right)\leq 2^{p-1}L^p t^{\frac{p}{2}}\left(t^{\frac{p}{2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}+\right.$$

$$\left.+cC_\rho^{\frac{p}{2}}(T)t^{\frac{p-2}{2}}\left(r\sup_{-r\leq\tau\leq 0}\mathbf{E}\|\phi(\tau)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}+\alpha(t)\sup_{0\leq\tau\leq\alpha(t)}\mathbf{E}\|u(\tau)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\right)\right)\leq$$

$$\leq 2^{p-1}L^pt^p\left(\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}+cC_\rho^{\frac{p}{2}}(T)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sup_{-r\leq\tau\leq 0}\mathbf{E}\|\phi(\tau)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}+\sup_{0\leq\tau\leq t}\mathbf{E}\|u(\tau)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\right)\right)<\infty. \tag{31}$$

Оценим $\|I_4(s)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}$ при $p>2$. В силу леммы 7.2 из [18, с. 182] имеем

$$\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^s S(s-\tau)\sigma(\tau,u(\alpha(\tau)),\xi)dW(\tau,x)\right\|^p\leq$$

$$\leq C_p\mathbf{E}\left(\int\limits_0^s\|S(s-\tau)\sigma(\tau,u(\alpha(\tau)),\xi)\|^2_{L_2^0}d\tau\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{32}$$

Здесь $\|\cdot\|_{L_2^0}$ — соответствующая норма Гильберта–Шмидта, входящая в конструкцию стохастического интеграла по Q-винеровскому процессу [18, с. 91]. В данном случае неравенство (32) принимает вид

$$\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^s S(s-\tau)\sigma(\tau,u(\alpha(\tau)),\xi)dW(\tau,x)\right\|^p\leq$$

$$\leq C_p\mathbf{E}\left(\int\limits_0^s\sum_{n=1}^\infty\lambda_n\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau,x-\xi)\sigma(\tau,u(\alpha(\tau),\xi),\xi)e_n(\xi)d\xi\right)^2\rho(x)dx\right)d\tau\right)^{\frac{p}{2}}\leq$$

$$\leq C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)L^pC_p\mathbf{E}\left(\int\limits_0^s\sum_{n=1}^\infty\lambda_n\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}(1+|u(\alpha(\tau),x)|)^2e_n^2(x)\rho(x)dx\right)d\tau\right)^{\frac{p}{2}}\leq$$

$$\leq 2^{\frac{p}{2}}\left(\sum_{n=1}^\infty\lambda_n\right)^{\frac{p}{2}}C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)L^pC_p\left(\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dxd\tau+\int\limits_0^s\|u(\alpha(\tau))\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}d\tau\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Обозначим $2^{\frac{p}{2}}\left(\sum_{n=1}^\infty\lambda_n\right)^{\frac{p}{2}}C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)L^pC_p$ через A. Тогда последнее выражение не превышает следующего:

$$2^{\frac{p-2}{2}}At^{\frac{p}{2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}+2^{\frac{p-2}{2}}A\left(\int\limits_0^s\|u(\alpha(\tau))\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}d\tau\right)^{\frac{p}{2}}\leq$$

$$\leq 2^{\frac{p-2}{2}}At^{\frac{p}{2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}+2^{\frac{p-2}{2}}At^{\frac{p-2}{2}}\int\limits_0^s\|u(\alpha(\tau))\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}d\tau<\infty. \tag{33}$$

При $p = 2$ оценка (33) устанавливается аналогично.

Учитывая оценки (26), (27) (30), (31) и (33), для $u \in \mathfrak{B}_{p,T,\rho}$ получаем

$$\|\Psi u\|^p_{\mathfrak{B}_{p,T,\rho}} = \left\|\sum_{j=0}^{4} I_j(t)\right\|^p_{\mathfrak{B}_{p,T,\rho}} \leq 5^{p-1}\sum_{j=0}^{4}\|I_j(t)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,T,\rho}} < \infty,$$

т. е. оператор Ψ переводит пространство $\mathfrak{B}_{p,T,\rho}$ в себя.

Установим теперь сжатие. Поскольку для любых $\{u,v\} \subset \mathfrak{B}_{p,t,\rho}$

$$\|\Psi u - \Psi v\|^p_{\mathfrak{B}_{p,T,\rho}} = \left\|\sum_{j=1}^{4}(I_j(s)(u) - I_j(s)(v))\right\|^p_{\mathfrak{B}_{p,T,\rho}} \leq 4^{p-1}\sum_{j=1}^{4}\|I_j(s)(u) - I_j(s)(v)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,T,\rho}},$$

оценим $\|I_j(s)(u) - I_j(s)(v)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,T,\rho}}$, $j \in \{1,\ldots,4\}$, с учетом оценок (27), (30), (31) и (33):

$$\|I_1(s)(u) - I_1(s)(v)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}} =$$

$$= \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}(b(s,x,u(\alpha(s),\xi),\xi) - b(s,x,v(\alpha(s),\xi),\xi))d\xi\right\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq \sup_{0\leq s\leq t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{l^2(s,x,\xi)}{\rho(\xi)}d\xi\right)\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}\sup_{0\leq s\leq t}\|u(s) - v(s)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0\leq s\leq t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{l^2(s,x,\xi)}{\rho(\xi)}d\xi\right)\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}\|u - v\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}},$$

$$\|I_2(s)(u) - I_2(s)(v)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}} = \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^s\left(\Delta_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau, x-\xi)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}(b(\tau,\xi,u(\alpha(\tau),\zeta),\zeta) - b(\tau,\xi,v(\alpha(\tau),\zeta),\zeta))d\zeta\right)d\xi\right)d\tau\right\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq Ct^p\sup_{0\leq\tau\leq t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi^2(\tau,x,\zeta)}{\rho(\zeta)}\,d\zeta dx\right)^{\frac{p}{2}}\sup_{0\leq\tau\leq t}\|u(\tau) - v(\tau)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= Ct^p\sup_{0\leq\tau\leq t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi^2(\tau,x,\zeta)}{\rho(\zeta)}d\zeta dx\right)^{\frac{p}{2}}\|u - v\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}},$$

$$\|I_3(s)(u)-I_3(s)(v)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}=$$

$$=\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau,x-\xi)(f(\tau,u(\alpha(\tau)),\xi)-f(\tau,v(\alpha(\tau)),\xi))d\xi d\tau\right\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\le$$

$$\le cC_\rho^{\frac{p}{2}}(T)L^pt^p\sup_{0\le\tau\le t}\|u(\tau)-v(\tau)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}=cC_\rho^{\frac{p}{2}}(T)L^pt^p\|u-v\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}},$$

$$\|I_4(s)(u)-I_4(s)(v)\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}=\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_0^s\sum_{n=1}^\infty\sqrt{\lambda_n}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathcal{K}(s-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times(\sigma(\tau,u(\alpha(\tau)),\xi)-\sigma(\tau,v(\alpha(\tau)),\xi))e_n(\xi)d\xi\Bigg)d\beta_n(\tau)\Bigg\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}\le$$

$$\le\left(\sum_{n=1}^\infty\lambda_n\right)^{\frac{p}{2}}C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)L^pC_p\left(\int\limits_0^t\|u(\alpha(\tau))-v(\alpha(\tau))\|^2_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}d\tau\right)^{\frac{p}{2}}\le$$

$$\le c\left(\sum_{n=1}^\infty\lambda_n\right)C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)L^pC_pt^{\frac{p}{2}}\sup_{0\le\tau\le t}\|u(\tau)-v(\tau)\|^p_{L_2^\rho(\mathbb{R}^d)}=$$

$$=c\left(\sum_{n=1}^\infty\lambda_n\right)C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)L^pC_pt^{\frac{p}{2}}\|u-v\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}},$$

откуда для любых $\{u,v\}\subset\mathfrak{B}_{p,t,\rho}$ получаем

$$\|\Psi u-\Psi v\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}\le 4^{p-1}\left(\sup_{0\le s\le t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{l^2(s,x,\xi)}{\rho(\xi)}\,d\xi\right)\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}}+\right.$$

$$+Ct^p\sup_{0\le\tau\le t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\psi^2(\tau,x,\zeta)}{\rho(\zeta)}\,d\zeta dx\right)^{\frac{p}{2}}+$$

$$\left.+c\,C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)L^pt^p+c\left(\sum_{n=1}^\infty\lambda_n\right)C_\rho^{\frac{p}{2}}(T)L^pC_pt^{\frac{p}{2}}\right)\times$$

$$\times\|u-v\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}=\gamma(t)\|u-v\|^p_{\mathfrak{B}_{p,t,\rho}}.$$

В силу (25) первое слагаемое в γ меньше единицы. Тогда, выбрав малое $0\le t_1\le T$, получим, что $0\le\gamma(t_1)<1$. Это означает, что оператор Ψ, определенный в банаховом пространстве $\mathfrak{B}_{p,t_1,\rho}$, является сжимающим, и поэтому имеет единственную неподвижную точку — решение $u\in\mathfrak{B}_{p,t_1,\rho}$ уравнения $\Psi u=u$. Эту процедуру можно повторить конечное число раз на других достаточно малых отрезках $[t_1,t_2],[t_2,t_3],\ldots,[t_{n-2},t_{n-1}],[t_{n-1},T]$, составляющих $[0, T]$, и получить решение как объединение решений на этих отрезках, что и доказывает теорему.

Пример. Рассмотрим задачу Коши

$$d\left(u(t,x)+\int\limits_{\mathbb{R}}\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\left\{-t-|\xi|-2x^2\right\}\sin u(t-h,\xi)d\xi\right)=$$
$$=\left(\Delta_x u(t,x)+f(t,x)\cos u(t-h,x)\right)dt+g(t,x)\sin u(t-h,x)dW(t,x),$$
$$0<t\leq T,\quad x\in\mathbb{R},$$
$$u(t,x)=\phi(t,x),\quad h\leq t\leq 0,\quad x\in\mathbb{R},\quad h>0, \tag{34}$$

где $0 < \boldsymbol{c} < \dfrac{\sqrt[p]{16}}{8\sqrt{\pi}}$, $\{f, g\}$ — измеримые ограниченные функции, и проверим для нее выполнение условий теоремы 1.

Условия (12) — (15), очевидно.

Проверим условие (16):

$$|b(t,x,u,\xi)-b(t,x,v,\xi)|=\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\left\{-t-|\xi|-2x^2\right\}|\sin u-\sin v|\leq$$
$$\leq\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\left\{-t-|\xi|-2x^2\right\}|u-v|=l(t,x,\xi)|u-v|,$$

т. е. получили условие (16), в котором $l(t,x,\xi)=\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\{-t-|\xi|-2x^2\}$.

Проверим условия (17) и (18) для l:

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{l^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}d\xi\right)\rho(x)dx=$$
$$=\sup_{0\leq t\leq T}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\boldsymbol{c}\rho(\xi)\exp\{-2t-2|\xi|-4x^2\}}{\rho(\xi)}\,d\xi\right)\rho(x)dx=$$
$$=\boldsymbol{c}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\exp\{-2t\}\right)\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\{-2|\xi|\}d\xi\right)\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\{-4x^2\}\rho(x)dx\leq$$
$$\leq\boldsymbol{c}\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\{-4x^2\}dx=\frac{\boldsymbol{c}\sqrt{\pi}}{2}<\infty,$$

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int\limits_{\mathbb{R}}\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{l^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}\,d\xi}\,dx=\sup_{0\leq t\leq T}\int\limits_{\mathbb{R}}\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\boldsymbol{c}\rho(\xi)\exp\{-2t-2|\xi|-4x^2\}}{\rho(\xi)}\,d\xi}\,dx=$$

$$= \sqrt{\boldsymbol{c}}\left(\sup_{0\le t\le T}\exp\{-t\}\right)\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\left\{-2x^2\right\}dx\right)\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\{-2|\xi|\}d\xi} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{c}\pi}{2}} < \infty,$$

т. е. условия (17) и (18) выполняются.

Выполнимость условий (19) – (25) получаем из следующих преобразований:

$$|\partial_x b(t,x,u,\xi)| = 4x\exp\left\{-x^2\right\}\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\left\{-t-|\xi|-x^2\right\}|\sin u| \le$$

$$\le 2\sqrt{\frac{2}{e}}\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\left\{-t-|\xi|-x^2\right\}(1+|u|) = \psi_1(t,x,\xi)(1+|u|),$$

$$|\partial_x^2 b(t,x,u,\xi)| \le 4(1+4x^2)\exp\left\{-x^2\right\}\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\left\{-t-|\xi|-x^2\right\}|\sin u| \le$$

$$\le \frac{20}{e}\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\left\{-t-|\xi|-x^2\right\}(1+|u|) = \psi_2(t,x,\xi)(1+|u|),$$

$$|\partial_x^2 b(t,x,u,\xi) - \partial_x^2 b(t,x,v,\xi)| = 4\left|1-4x^2\right|\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\left\{-t-|\xi|-2x^2\right\}|\sin u - \sin v| \le$$

$$\le \frac{20}{e}\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\{-t-|\xi|-x^2\}|u-v| = \psi_2(t,x,\xi)|u-v|,$$

т. е. получили выполнение условий (19) и (20), где $\psi(t,x,\xi) = \max\{\psi_1(t,x,\xi),\psi_2(t,x,\xi)\} = \frac{20}{e}\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\{-t-|\xi|-x^2\}$.

Проверим для ψ выполнение условий (21), (22) и (24):

$$\sup_{0\le t\le T}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(t,x,\xi)d\xi\right)^2 dx = \frac{400}{e^2}\sup_{0\le t\le T}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\left\{-t-|\xi|-x^2\right\}d\xi\right)^2 dx =$$

$$= \frac{400\boldsymbol{c}}{e^2}\left(\sup_{0\le t\le T}\exp\{-2t\}\right)\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\sqrt{\rho(\xi)}\exp\{-|\xi|\}d\xi\right)^2\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\left\{-2x^2\right\}dx \le$$

$$\le \frac{400\boldsymbol{c}}{e^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\rho(\xi)d\xi\right)\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\{-2|\xi|\}d\xi = \frac{400\boldsymbol{c}}{e^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}}\rho(\xi)d\xi < \infty,$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\psi^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}d\xi dx = \frac{400}{e^2}\sup_{0\le t\le T}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\boldsymbol{c}\rho(\xi)\exp\left\{-2t-2|\xi|-2x^2\right\}}{\rho(\xi)}d\xi\, dx =$$

$$= \frac{400\boldsymbol{c}}{e^2}\left(\sup_{0\le t\le T}\exp\{-2t\}\right)\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\{-2|\xi|\}d\xi\right)\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\left\{-2x^2\right\}dx = \frac{400\boldsymbol{c}}{e^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} < \infty,$$

т. е. получили выполнение условий (21) и (22). Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}$ и докажем, что существует функция $\varphi(t,\xi,x_0,\delta)$, $\delta \in \mathbb{R}^+$, из условия (24), удовлетворяющая (23):

$$|\psi(t,x,\xi) - \psi(t,x_0,\xi)| \le \frac{20}{e}\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\{-t-|\xi|\}(\delta+2|x_0|)|x-x_0| = \varphi(t,\xi,x_0,\delta)|x-x_0|,$$

т. е. для функции ψ выполняется условие (24), в котором функция

$$\varphi(t,\xi,x_0,\delta) = \frac{20}{e}\sqrt{\boldsymbol{c}\rho(\xi)}\exp\{-t-|\xi|\}(\delta+2|x_0|).$$

Проверим для нее выполнение условия (23):

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi^2(t,\xi,x_0,\delta)}{\rho(\xi)}\,d\xi = \frac{400}{e^2}(\delta+2|x_0|)^2 \sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}} \frac{\boldsymbol{c}\rho(\xi)\exp\{-2t-2|\xi|\}}{\rho(\xi)}\,d\xi =$$

$$= \frac{400\boldsymbol{c}}{e^2}(\delta+2|x_0|)^2\left(\sup_{0\le t\le T}\exp\{-2t\}\right)\int_{\mathbb{R}}\exp\{-2|\xi|\}d\xi = \frac{400\boldsymbol{c}}{e^2}(\delta+2|x_0|)^2 < \infty.$$

Условие (25) принимает вид

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{l^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}d\xi\right)\rho(x)dx\right)^{\frac{p}{2}} = \left(\frac{\boldsymbol{c}\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{p}{2}} < \left(\frac{\sqrt[p]{16}}{8\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{p}{2}} = \left(\frac{\sqrt[p]{16}}{16}\right)^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{4^{p-1}},$$

что означает выполнение условий теоремы 1 для задачи (34).

6. Следствие из теоремы. Для частного случая (1) — начальной задачи вида

$$\begin{gathered} d\left(u(t,x) + \int_{\mathbb{R}^d} b(t,x,\xi)u(t-h,\xi)d\xi\right) = \left(\Delta_x u(t,x) + f(t,u(t-h),x)\right)dt+ \\ +\sigma(t,u(t-h),x)dW(t,x), \quad 0 < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ u(t,x) = \phi(t,x), \quad -h \le t \le 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad h > 0, \end{gathered} \tag{35}$$

— справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) $\{f,\sigma\}\colon [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *— функции из п. 1 теоремы 1;*

2) $b\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *— измеримая функция такая, что*

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{b^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}\,d\xi\right)\rho(x)dx < \infty, \quad \sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbb{R}^d}\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d}\frac{b^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)}\,d\xi}\,dx < \infty;$$

3) для любого $x \in \mathbb{R}^d$ существуют производные $\partial_{x_i} b$, $\partial_{x_i x_j} b$, $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, d\}$, и для градиента $\nabla_x b$ и матрицы $D_x^2 b$ выполняются условия

$$|\nabla_x b(t,x,\xi)| + \left\|D_x^2 b(t,x,\xi)\right\| \le \psi(t,x,\xi), \quad 0 \le t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^d,$$

где функция ψ удовлетворяет условиям п. 3 теоремы 1.

Тогда если

$$\sup_{0 \le t \le T} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{b^2(t,x,\xi)}{\rho(\xi)} d\xi \right) \rho(x) dx \right)^{\frac{p}{2}} < \frac{1}{4^{p-1}},$$

то задача (35) имеет единственное на $0 \le t \le T$ мягкое решение $u \in \mathfrak{B}_{p,T,\rho}$.

Литература

1. *Boukfaoui Y. El., Erraoui M.* Remarks on the existence and approximation for semilinear stochastic differential equations in Hilbert spaces // Stochast. Anal. and Appl. — 2002. — № 20. — P. 495 – 518.
2. *Evans L. C.* Partial differential equations. — Amer. Math. Soc., 1998. — 662 p.
3. *Govindan T. E.* Autonomous semilinear stochastic Volterra integro-differential equations in Hilbert spaces // Dynam. Syst. and Appl. — 1994. — № 2. — P. 51 – 74.
4. *Govindan T. E.* Stability of mild solutions of stochastic evolution equations with variable delay // Stochast. Anal. and Appl. — 2002. — **5**, № 2. — P. 1059 – 1077.
5. *Kolmanovskii V., Koroleva N., Maizenberg T. etc.* Neutral stochastic differential delay equations with Markovian switching // Stochast. Anal. and Appl. — 2002. — **4**, № 21. — P. 819 – 847.
6. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasi-linear equations of parabolic type. — M.: Nauka, 1967 (english transl.: Math. Monographs. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. — 1968. — **23**. — 649 p.)
7. *Liu K., Xia X.* On the exponential stability in mean square of neutral stochastic functional differential equations // Syst. Control Lett. — 1999. — **4**, № 37. — P. 207 – 215.
8. *Mahmudov N. I.* Existence and uniqueness results for neutral FSDEs in Hilbert spaces // Stochast. Anal. and Appl. — 2006. — **1**, № 24. — P. 79 – 97.
9. *Samoilenko A. M., Mahmudov N. I., Stanzhitskii A. N.* Existence, uniqueness and controllability results for neutral FSDEs in Hilbert spaces // Dynam. Syst. and Appl. — 2008. — **17**. — P. 53 – 70.
10. *Mao X.* Asymptotic properties of neutral stochastic differential delay equations // Stochast. Rep. — 2000. — **3** – **4**, № 68. — P. 273 – 290.
11. *Mao X., Liao X. X.* Exponential stability in mean square of neutral stochastic differential difference equations // Dynam. Contin. Discrete Impuls. Syst. — 1999. — **4**, № 6. — P. 569 – 586.
12. *Mao X., Rodkina A., Koroleva N.* Razumikhin-type theorems for neutral stochastic functional-differential equations // Funct. Different. Equat. — 1998. — **1** – **2**, № 5. — P. 195 – 211.
13. *Mao X.* Razumikhin-type theorems on exponential stability of neutral stochastic functional-differential equations // SIAM J. Math. Anal. — 1997. — **2**, № 28. — P. 389 – 401.
14. *McKibben M.* Second-order neutral stochastic evolution equations with heredity // Appl. Math. Stochast. Anal. — 2004. — **2**, № 2004. — P. 177 – 192.
15. *Sigurd A., Manthey R.* Invariant measures for stochastic heat equations with unbounded coefficients // Stochast. Process. and Appl. — 2003. — **103**. — P. 237 – 256.
16. *Tessitore G., Zabczyk J.* Invariant measures for stochastic heat equations // Probab. and Math. Statistics. — 1998. — **18**. — P. 271 – 287.
17. *Zabczyk J., Da Prato G.* Ergodicity for infinite dimensional systems. — Cambridge Univ. Press, 1996. — 449 p.
18. *Zabczyk J., Da Prato G.* Stochastic equations in infinite dimensions. — Cambridge Univ. Press, 1992. — 455 p.

Получено 29.02.16