УДК 517.9

# ПРО СТІЙКІСТЬ ТОРОЇДАЛЬНОГО МНОГОВИДУ ОДНОГО КЛАСУ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

**М. М. Перестюк, Ю. М. Перестюк**

*Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка*
*вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна*
*e-mail: Perestyuknn@gmail.com*
*Perestyuk@gmail.com*

*We study the stability of an invariant toroidal manifold for a class of linear extensions of a dynamical system on a torus. The obtained result is used to study existence of an invariant manifold of a nonlinear differential system.*

*Исследуется вопрос устойчивости инвариантного тороидального многообразия одного класса линейного расширения динамической системы на торе. Полученный результат используется для исследования вопроса существования инвариантного многообразия нелинейной системы дифференциальных уравнений.*

У прямому добутку $m$-вимірного тора $T_m$ та евклідового простору $R^n$ розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \tag{1}$$

де $\varphi = \operatorname{col}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n)$, $a(\varphi)$, $P(\varphi)$ — відповідно векторна та матрична неперервні $2\pi$-періодичні по кожній компоненті $\varphi_j$, $j = \overline{1, m}$, функції, визначені на $m$-вимірному торі $T_m$. Щодо функції $a(\varphi)$ вимагатимемо, щоб вона задовольняла умову Ліпшиця по $\varphi$ з деякою сталою Ліпшиця $L$, тобто для будь-яких двох точок $\varphi', \varphi'' \in T_m$

$$\|a(\varphi') - a(\varphi'')\| \leq L\|\varphi' - \varphi''\|. \tag{2}$$

У даній роботі ми встановимо деякі достатні умови асимптотичної стійкості тривіального тора системи (1) і застосуємо ці результати до дослідження більш складних, у порівнянні з системою (1), нелінійних систем диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку $T_m \times R^n$.

У подальшому нам знадобиться деяке узагальнення нерівності Важевського [2]. Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок першого з рівнянь системи (1) і розглянемо систему рівнянь відносно $x$

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x. \tag{3}$$

Згідно з теоремою Важевського [2] будь-який розв'язок $x_t(t_0, \varphi, x_0)$, $x_{t_0}(t_0, \varphi, x_0) = x_0$ цієї системи допускає оцінку

$$\|x_0\| e^{\int_{t_0}^{t} \lambda(\varphi_s(\varphi))ds} \leq \|x_t(t_0, \varphi, x_0)\| \leq \|x_0\| e^{\int_{t_0}^{t} \Lambda(\varphi_s(\varphi))ds}, \tag{4}$$

© М. М. Перестюк, Ю. М. Перестюк, 2016

де $\lambda(\varphi)$ і $\Lambda(\varphi)$ — відповідно найменше і найбільше з власних чисел симетричної матриці

$$\hat{P}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(P(\varphi) + P^T(\varphi)\right),$$

$P^T(\varphi)$ — транспонована по відношенню до $P(\varphi)$ матриця.

З нерівності (4) випливає оцінка

$$\|x_0\|e^{\lambda(t-t_0)} \leq \|x_t(t_0,\varphi,x_0)\| \leq \|x_0\|e^{\Lambda(t-t_0)}, \quad t \geq t_0,$$

в якій

$$\lambda = \min_{\varphi\in T_m} \lambda(\varphi), \quad \Lambda = \max_{\varphi\in T_m} \Lambda(\varphi).$$

На основі цієї оцінки можна зробити такий висновок: якщо в системі (1) матриця $P(\varphi)$ така, що $\Lambda < 0$, то тривіальний тор цієї системи є експоненціально стійким, оскільки матрицант $\Omega^t_{t_0}(\varphi)$ системи (3) допускає оцінку

$$\|\Omega^t_{t_0}(\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad \varphi \in T_m, \quad K \geq 1, \quad \gamma > 0. \tag{5}$$

Покажемо, що аналогічний висновок про експоненціальну стійкість тривіального тора системи рівнянь (1) можна зробити при слабших умовах на матрицю $P(\varphi)$.

Нагадаємо [5], що точку $\varphi \in T_m$ динамічної системи на торі

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) \tag{6}$$

називають блукаючою, якщо існують її окіл $U(\varphi)$ і додатне число $T$ такі, що

$$U(\varphi)\bigcap\varphi_t(U(\varphi)) = \varnothing \quad \text{для} \quad t \geq T.$$

Позначимо множину блукаючих точок через $W$, а множину неблукаючих точок через $\Omega = T_m \setminus W$. Множина $W$ блукаючих точок є інваріантною і відкритою множиною, тому що разом з $\varphi$ блукаючими є всі точки околу $U(\varphi)$.

Множина $\Omega$ неблукаючих точок, внаслідок компактності тора $T_m$, є непорожньою замкненою інваріантною множиною.

Очевидно, $\Omega$ є і компактною множиною, як замкнена множина тора.

Як показано в [5], будь-який розв'язок системи (6) з часом наближається до множини неблукаючих точок, точніше: яке б не було $\varepsilon > 0$, будь-яка фазова точка $\varphi_t(\varphi)$ знаходиться лише скінченний проміжок часу, що не перевищує $T(\varepsilon)$, поза $\varepsilon$-околом $U_\varepsilon(\Omega)$ множини $\Omega$.

Скористаємося властивістю неблукаючих точок для доведення такої теореми.

**Теорема 1.** *Якщо в системі рівнянь (1) матриця $P(\varphi)$ така, що найбільше з власних чисел $\Lambda(\varphi)$ симетричної матриці $\hat{P}(\varphi)$ є від'ємним на множині $\Omega$ неблукаючих точок динамічної системи (6), то тривіальний тор системи (1) є експоненціально стійким.*

***Доведення.*** Зафіксуємо достатньо малий $\varepsilon$-окіл $U_\varepsilon(\Omega)$ множини $\Omega$. Оскільки $\Lambda(\varphi) < 0$ для всіх $\varphi \in \Omega$ і $\Omega$ є замкненою компактною множиною, то можна вказати достатньо мале додатне число $\varepsilon_0$ таке, що для кожного $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ $\Lambda(\varphi) < -\gamma(\varepsilon)$ для всіх $\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)$, де $\gamma(\varepsilon)$ — додатна монотонно незростаюча функція параметра $\varepsilon$, $\gamma(\varepsilon) \to \gamma(0)$ при $\varepsilon \to 0$, де

$$-\gamma(0) = \max_{\varphi \in \Omega} \Lambda(\varphi).$$

Якщо $\varphi_t(\varphi)$ — неблукаюча траєкторія, то для будь-якого розв'язку з нерівності (4) маємо оцінку

$$\|x_t(t_0, \varphi, x_0)\| \leq \|x_0\| e^{-\gamma(0)(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad \varphi \in \Omega.$$

Якщо ж $\varphi_t(\varphi)$ — блукаюча траєкторія, то можна вказати таке додатне число $T(\varepsilon)$, що поза множиною $U_\varepsilon(\Omega)$ час перебування такої траєкторії не перевищує $T(\varepsilon)$. Тому з нерівності (4) маємо оцінку

$$\|x_t(t_0, \varphi, x_0)\| \leq \|x_0\| e^{\Lambda T(\varepsilon)}\, e^{-\gamma(\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad \varphi \in W.$$

Таким чином, в умовах теореми будь-який розв'язок $x_t(t_0, \varphi, x_0)$ системи (3) для довільного $\varphi \in T_m$ експоненціально прямує до нуля при $t \to \infty$, а тому матрицант $\Omega_{t_0}^t(\varphi)$ цієї системи допускає оцінку вигляду (5), що й завершує доведення теореми.

Наведемо ще один клас систем (1), в яких тривіальний тор є асимптотично стійким.

**Теорема 2.** *Якщо в системі рівнянь (1) матрична функція $P(\varphi)$ задовольняє умову*

$$\langle P(\varphi)x, x\rangle \leq \gamma(\varphi)\langle x, x\rangle \tag{7}$$

*для всіх $\varphi \in T_m$ і $x \in R^n$, де $\gamma(\varphi)$ — неперервна $2\pi$-періодична по кожній компоненті $\varphi_j$, $j = \overline{1, n}$, функція, від'ємна на множині $\Omega$ неблукаючих точок динамічної системи (6), то тривіальний тор вихідної системи (1) є асимптотично стійким.*

***Доведення.*** Для будь-якого розв'язку $x_t(t_0, \varphi, x_0)$ системи рівнянь (3) маємо

$$\frac{d}{dt}\|x_t(t_0, \varphi, x_0)\|^2 = \frac{d}{dt}\langle x_t(t_0, \varphi, x_0), x_t(t_0, \varphi, x_0)\rangle =$$
$$= 2\langle P(\varphi_t(\varphi))x_t(t_0, \varphi, x_0), x_t(t_0, \varphi, x_0)\rangle \leq 2\gamma(\varphi_t(\varphi))\|x_t(t_0, \varphi, x_0)\|^2.$$

Інтегруючи останню нерівність, отримуємо

$$\|x_t(t_0, \varphi, x_0)\| \leq e^{\int_{t_0}^t \gamma(\varphi_S(\varphi))dS}\|x_0\|, \quad t \geq t_0, \quad \varphi \in T_m.$$

Міркуючи, як і при доведенні попередньої теореми, переконуємось, що з останньої нерівності випливає експоненціальна стійкість тривіального тора вихідної системи.

Для доведення стійкості (нестійкості) інваріантного тора можна застосувати прямий метод Ляпунова. Сформулюємо тут одну теорему, яка частково доповнює класичні дослідження в цьому напрямку, наведені в монографіях [3, 7].

**Теорема 3.** *Нехай для системи рівнянь (1) існує додатно визначена квадратична форма*

$$V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x\rangle$$

*з симетричною матрицею $S(\varphi)$ така, що повна похідна її, складена в силу вихідної системи (1), тобто квадратична форма*

$$\frac{d}{dt}V(\varphi,x) = \langle\hat{S}(\varphi)x,x\rangle,$$

*де*

$$\hat{S}(\varphi) = \frac{\partial S(\varphi)}{\partial\varphi}\,a(\varphi) + S(\varphi)P(\varphi) + P^T(\varphi)S(\varphi),$$

*є від'ємно визначеною на множині $\Omega$ неблукаючих точок системи (6). Тоді тривіальний тор системи рівнянь (1) є експоненціально стійким.*

***Доведення.*** Насамперед зауважимо, що $V(\varphi,x)$ допускає оцінку

$$\lambda(\varphi)\langle x,x\rangle \le V(\varphi,x) \le \Lambda(\varphi)\langle x,x\rangle, \quad \varphi\in T_m, \quad x\in R^n,$$

де $\lambda(\varphi)$ і $\Lambda(\varphi)$ — відповідно найменше та найбільше власне число симетричної матриці $S(\varphi)$. Похідну від $V(\varphi,x)$, складену в силу системи (1), тобто квадратичну форму $\langle\hat{S}(\varphi),x,x\rangle$, як від'ємно визначену для $\varphi\in\Omega$, можна оцінити аналогічно:

$$-\hat{\Lambda}(\varphi)\langle x,x\rangle \le \langle\hat{S}(\varphi)x,x\rangle \le -\hat{\lambda}(\varphi)\langle x,x\rangle, \quad \varphi\in\Omega, \quad x\in R^n.$$

Тут $\hat{\lambda}(\varphi)$ і $\hat{\Lambda}(\varphi)$– відповідно найменше і найбільше з власних чисел симетричної матриці

$$-\frac{1}{2}(\hat{S}(\varphi)+\hat{S}^T(\varphi)).$$

Зафіксуємо тепер достатньо малий $\varepsilon$-окіл $U_\varepsilon(\Omega)$ множини $\Omega$. Як стверджувалось вище, можна вказати таке додатне число $T = T(\varepsilon)$, що час перебування будь-якої траєкторії $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi\in T_m$, на множині блукаючих точок $T_m\setminus U_\varepsilon(\Omega)$ не перевищує $T = T(\varepsilon)$.

З огляду на додатну визначеність квадратичної форми $V(\varphi,x)$ і від'ємну визначеність її похідної на множині $\Omega$ можемо стверджувати існування такого додатного числа $\varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$, справджуються оцінки

$$\lambda(\varepsilon)\langle x,x\rangle \le V(\varphi,x) \le \Lambda(\varepsilon)\langle x,x\rangle, \quad \varphi\in U_\varepsilon(\Omega), \quad x\in R^n,$$

$$-\hat{\Lambda}(\varepsilon)\langle x,x\rangle \le \frac{d}{dt}V(\varphi,x) \le -\hat{\lambda}(\varepsilon)\langle x,x\rangle, \quad \varphi\in U_\varepsilon(\Omega), \quad x\in R^n,$$

де

$$\lambda(\varepsilon) = \min_{\varphi\in U_\varepsilon(\Omega)}\lambda(\varphi), \quad \Lambda(\varepsilon) = \max_{\varphi\in U_\varepsilon(\Omega)}\Lambda(\varphi),$$

$$\hat{\lambda}(\varepsilon) = \min_{\varphi\in U_\varepsilon(\Omega)}\hat{\lambda}(\varphi), \quad \hat{\Lambda}(\varepsilon) = \max_{\varphi\in U_\varepsilon(\Omega)}\hat{\Lambda}(\varphi),$$

Далі міркуємо таким чином: якщо $\varphi\in U_\epsilon(\Omega)$ і для всіх $t>0$ $\varphi_t(\varphi)\in U_\epsilon(\Omega)$, то для будь-якого розв'язку $x_t(t_0,\varphi,x_0)\equiv x(t)$ системи (3) маємо

$$\lambda(\varepsilon)\langle x(t),x(t)\rangle \le V(\varphi_t(\varphi),x(t)) \le \Lambda(\varepsilon)\langle x(t),x(t)\rangle,$$

$$-\hat{\Lambda}(\varepsilon)\langle x(t),x(t)\rangle \le \frac{d}{dt}V(\varphi_t(\varphi),x(t)) \le -\hat{\lambda}(\varepsilon)\langle x(t),x(t)\rangle.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{1}{\Lambda(\varepsilon)}\left(V(\varphi_t(\varphi), x(t))\right) \le \langle x(t), x(t)\rangle \le -\frac{1}{\hat{\lambda}(\varepsilon)}\frac{d}{dt}V(\varphi_t(\varphi), x(t)),$$

а тому

$$\frac{dv}{dt}\left(\varphi_t(\varphi), x(t)\right) \le -\frac{\hat{\lambda}(\varepsilon)}{\Lambda(\varepsilon)}V(\varphi_t(\varphi), x(t)).$$

Таким чином,

$$V(\varphi_t(\varphi), x_t(t_0, \varphi, x_0)) \le V(\varphi, x_0)e^{\frac{-\hat{\lambda}(\varepsilon)}{\Lambda(\varepsilon)}(t-t_0)}.$$

Отже,

$$x_t(t_0, \varphi, x_0) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Нехай тепер $\varphi \in T_m \setminus U_\varepsilon(\Omega)$, або ж $\varphi \in U_\varepsilon(\Omega)$, але не для всіх $t > 0$ $\varphi_t(\varphi) \in U_\varepsilon(\Omega)$, тобто траєкторія $\varphi_t(\varphi)$ може залишати $U_\varepsilon(\Omega)$ на деякий час, а пізніше знову повертатися в $\varepsilon$-окіл множини $\Omega$, але час перебування такої траєкторії поза множиною $U_\varepsilon(\Omega)$ сумарно не може перевищувати $T$.

З'ясуємо, на яку величину зможе змінитися $\|x_t(t_0, \varphi, x_0)\|$, або ж функція $V(\varphi, x)$ уздовж цього розв'язку, якщо траєкторія $\varphi_t(\varphi)$ перебуває поза множиною $U_\varepsilon(\Omega)$.

Виходячи з нерівності Важевського, маємо оцінку зміни будь-якого розв'язку $x_t(t_0, \varphi, x_0)$ протягом будь-якого часового проміжку довжини $T$:

$$\|x_{t+T}(\tau, \varphi, x(\tau))\| \le e^{\Lambda(t+T-\tau)}\|x(\tau, x_0)\|, \quad t \ge \tau,$$

$$\|x_{t+T}(\tau, \varphi, x_\tau(t_0, \varphi, x_0))\| \le e^{\Lambda T}\|x_\tau(t_0, \varphi, x_0)\|,$$

де

$$\Lambda = \max_{\varphi \in T_m} \Lambda(\varphi).$$

Таким чином, можемо записати величину зміни функції $V(\varphi, x)$ уздовж такого розв'язку на часовому проміжку $T$:

$$V(\varphi_{\tau+T}(\varphi), x_{\tau+T}(\tau, \varphi, x_\tau(t_0, \varphi, x_0))) \le Ke^{2\Lambda T}V(\varphi_\tau(\varphi), x_\tau(t_0, \varphi, x_0)),$$

де

$$K = \max_{\varphi \in T_m}\|S(\varphi)\|.$$

Позначаючи через $\tau^*(\varphi)$ момент часу входження траєкторії $\varphi_t(\varphi)$ в множину $U_\varepsilon(\Omega)$, після якого вона не виходить з цієї множини, маємо оцінку

$$V(\varphi_t(\varphi), x_t(t_0, \varphi, x_0)) \le V(\varphi_{\tau^*}(\varphi), x_{\tau^*}(t_0, \varphi, x_0))e^{-\frac{\hat{\lambda}(\varepsilon)}{\Lambda(\varepsilon)}(t-\tau^*(\varphi))}$$

для $t \ge \tau^*(\varphi)$. Враховуючи попередню нерівність, остаточно отримуємо

$$V(\varphi_t(\varphi), x_t(t_0, \varphi, x_0)) \le Ke^{2\Lambda T}e^{-\frac{\hat{\lambda}(\varepsilon)}{\Lambda(\varepsilon)}(t-t_0)}, \quad t \ge t_0.$$

Звідси робимо висновок, що

$$\|x_t(t_0, \varphi, x_0)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

тобто тривіальний тор вихідної системи (1) є експоненціально стійким, що і завершує доведення теореми 3.

Природно може виникнути питання про існування квадратичної форми $V(\varphi, x)$, що задовольняє умову теореми 3.

Наведемо приклад, коли така форма існує і дає змогу стверджувати про експоненціальну стійкість тривіального тора системи (1).

**Теорема 4.** *Нехай у системі (1) $P(\varphi)$ є сталою матрицею $P(\varphi) = P_0$ на множині $\Omega$. Якщо дійсні частини власних чисел $\operatorname{Re}\lambda_j(P_0)$ матриці $P_0$ від'ємні, то існує додатно визначена квадратична форма $v(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x\rangle$ з симетричною матрицею $S(\varphi)$ така, що її похідна в силу системи (1) є від'ємно визначеною квадратичною формою на множині $\Omega$, а отже, тривіальний тор системи (1) є асимптотично стійким.*

***Доведення.*** Запишемо систему рівнянь (1) у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P_0 x + (P(\varphi) - P_0)x$$

і розглянемо систему зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = P_0 x.$$

Оскільки за умовою теореми дійсні частини власних чисел матриці $P_0$ всі від'ємні, то можна стверджувати [4, с. 67] (теорема 1), що для будь-якої від'ємно визначеної квадратичної форми $U(x)$ рівняння

$$\langle \operatorname{grad} V(x), P_0 x\rangle = U(x)$$

у класі квадратичних форм має єдиний розв'язок, який обов'язково є додатно визначеною квадратичною формою.

Покладемо в останньому рівнянні $U(x) = -\langle x, x\rangle$ і за функцію $V(x)$ візьмемо додатно визначену квадратичну форму — розв'язок рівняння

$$\langle \operatorname{grad} V(x), P_0 x\rangle = -\langle x, x\rangle.$$

Повна похідна від квадратичної форми $V(x)$, складена в силу системи (1), має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x) = \langle \operatorname{grad} V(x), P(\varphi)x\rangle = \langle \operatorname{grad} V(x), P_0 x\rangle + \langle \operatorname{grad} V(x), (P(\varphi) - P_0)x\rangle =$$

$$= -\langle x, x\rangle + \langle \operatorname{grad} V(x), (P(\varphi) - P_0)x\rangle.$$

Оскільки $P(\varphi) = P_0$ на множині неблукаючих точок $\Omega$, то знайдено квадратичну форму $V(x)$, яка задовольняє умови попередньої теореми, а тому тривіальний тор системи (1) є асимптотично стійким, що і завершує доведення теореми 4.

Доведені теореми дають можливість стверджувати про існування тороїдальних інваріантних множин систем вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi), \tag{8}$$

в яких $a(\varphi)$ і $P(\varphi)$ такі ж, як і в системі (1), а $f(\varphi)$ — довільна неперервна $2\pi$-періодична по кожній компоненті $\varphi_j$, $j = \overline{1,m}$, функція.

Справді, умови кожної з теорем 1 – 4 гарантують для матриціанта $\Omega_\tau^t(\varphi)$ лінійної однорідної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x$$

оцінку

$$\|\Omega_\tau^t(\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)}, \quad t \geq \tau, \quad \varphi \in T_m, \tag{9}$$

з деякими додатними сталими $K$ і $\gamma$. Тому система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)) \tag{10}$$

має сім'ю обмежених на всій осі $t \in R$ розв'язків

$$x_t(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_\tau^t(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau,$$

залежних від $\varphi \in T_m$ як від параметра, а тому

$$x = U(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) \tag{11}$$

і є інваріантною тороїдальною множиною системи рівнянь (8).

Переконаємося, що ця множина є асимптотично стійкою.

Дійсно, оскільки функція $U(\varphi)$ задовольняє систему рівнянь з частинними похідними

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial \varphi}, a(\varphi) \right\rangle = P(\varphi)U + f(\varphi),$$

то заміна змінних $x = U(\varphi) + y$ питання про асимптотичну стійкість множини $x = U(\varphi)$ зводить до з'ясування стійкості інваріантного тривіального тора системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{y} = P(\varphi)y.$$

Відповідь на це питання дають саме теореми 1 – 4.

Зауважимо, що зображення (11) інваріантної тороїдальної множини $x = U(\varphi)$ є нічим іншим як зображенням через функцію $G_0(\tau, \varphi)$ Гріна – Самойленка задачі про інваріантні тори [7], яка в даному випадку має вигляд

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau \leq 0, \\ 0, & \tau > 0. \end{cases}$$

Як ілюстративний приклад розглянемо систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = \cos\varphi \cdot x + f(\varphi), \tag{12}$$

в якій $a(\varphi)$ — $2\pi$-періодична скалярна ліпшицева функція на колі (одновимірному торі), $x$ — скалярна змінна, $f(\varphi)$ — неперервна $2\pi$-періодична функція.

Вважатимемо, що функція $a(\varphi)$ дорівнює нулю лише в одній точці $\varphi = \pi$, а в інших точках проміжку $[0, 2\pi]$ набуває значень одного знака.

В такому випадку множиною $\Omega$ неблукаючих точок динамічної системи на колі $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ є лише точка $\varphi = \pi$ і в цій точці $P(\varphi) = \cos\varphi = -1$.

Покладемо $V(x) = x^2$, тоді

$$\frac{dv}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt} = 2\cos\varphi \cdot x^2$$

є від'ємно визначеною на $\Omega$, а тому тривіальний розв'язок системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = \cos\varphi \cdot x$$

є асимптотично стійким, а система (12) для будь-якої неперервної $2\pi$-періодичної функції має асимптотично стійкий інваріантний многовид

$$x = U(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} e^{\int_\tau^0 \cos(\varphi_s(\varphi))dS} f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau.$$

Теорему 3 можна застосувати для дослідження стійкості тривіального тора нелінійної по $x$ системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, x)x, \tag{13}$$

в якій матрична функція $P(\varphi, x)$ є неперервною по $\varphi \in T_m$ і $x$, $\|x\| \leq a_0$, $a_0$ — деяке додатне число.

Анонсуємо тут ще одне твердження в цьому напрямку.

Якщо для системи рівнянь (13) існує додатно визначена квадратична форма $V(\varphi, x) = \langle S(\varphi)x, x\rangle$ така, що повна похідна її, складена в силу рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, 0)x,$$

є від'ємно визначеною на множині неблукаючих точок динамічної системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, $\varphi \in T_m$, то тривіальний тор системи рівнянь (13) асимптотично стійкий.

## Література


1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1969. — 248 с.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 480 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1992. — 272 с.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 530 с.
5. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 552 с.
6. *Перестюк М. О., Фекета П. В.* Про збереження інваріантного тора багаточастотних систем // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 11. — С. 1498 – 1505.
7. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 304 с.


*Одержано 26.08.16*