УДК 517.983

СЛАБОВОЗМУЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. Ф. Журавлев, Н. П. Фомин

Житомир. нац. агроэкол. у-т
бульв. Старый, 7, Житомир, 10008, Украина
e-mail: vfz2008@ukr.net
npfomin@mail.ru

We consider weakly perturbed Fredholm equations with degenerate kernel in Banach spaces. We obtain conditions for $\varepsilon = 0$ to be a bifurcation point for solutions of weakly perturbed operator equations in Banach spaces. A convergent scheme for finding solutions in the form of the series $\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ in powers of ε is proposed.

Розглядаються слабкозбурені рівняння Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах. Отримано умови біфуркації з точки $\varepsilon = 0$ розв'язків слабкозбурених операторних рівнянь у банахових просторах. Запропоновано збіжну ітераційну процедуру знаходження розв'язків у вигляді ряду $\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ за степенями ε.

Исследование условий разрешимости и построение решений слабовозмущенных интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром в банаховых пространствах продолжают развитие методов теории возмущений, в частности методов малого параметра Ляпунова – Пуанкаре [1] и Вишика – Люстерника [2].

Эти методы были успешно применены при построении решений слабовозмущенных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений с нетеровой линейной частью [3 – 5] в евклидовых пространствах. Предложенный в [6] подход к исследованию дифференциальных систем в банаховых пространствах был применен А. А. Бойчуком и Е. В. Панасенко [7] к исследованию слабовозмущенных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

Необходимо отметить, что дифференциальная система линейной порождающей краевой задачи ($\varepsilon = 0$) имеет решения при любой правой части, т. е. по классификации С. Г. Крейна [8] является везде разрешимой. Исследование слабовозмущенных не везде разрешимых сингулярных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах проводили А. А. Бойчук, Л. М. Шегда и И. А. Головацкая [9, 10].

Поэтому актуальной является задача исследования условий возникновения решений слабовозмущенных интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром в банаховых пространствах.

Постановка задачи. Рассмотрим в банаховом пространстве B слабовозмущенное уравнение Фредгольма

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = f(t) + \varepsilon\int\limits_a^b K(t,s)z(s)ds, \tag{1}$$

где оператор-функции $M(t)$ и $N(t)$ действуют из действительного банахова пространства $\mathbf{B}$ в это же пространство, сильно непрерывны [6] с нормами $|||M||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|M(t)\|_{\mathbf{B}} = M_0 < \infty$ и $|||N||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|N(t)\|_{\mathbf{B}} = N_0 < \infty$, оператор-функция $K(t,s)$ определена в квадрате $\mathcal{I}\times\mathcal{I}$ и действует из банахова пространства $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$ по каждой переменной, сильно непрерывна по t, s с нормой $|||K||| = \sup_{t,s\in\mathcal{I}}\|K(t,s)\|_{\mathbf{B}} = K_0 < \infty$, вектор-функция $f(t)$ действует из отрезка $\mathcal{I}$ в банахово пространство $\mathbf{B}$: $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}) := \Big\{f(\cdot)\colon \mathcal{I} \to \mathbf{B},\ |||f||| = \sup_{t\in\mathcal{I}}\|f(t)\|\Big\}$, $\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})$ — банахово пространство непрерывных на $\mathcal{I}$ вектор-функций со значениями в $\mathbf{B}$, $\varepsilon << 1$ — малый параметр.

Предположим, что порождающее уравнение, которое получается из (1) при $\varepsilon = 0$,

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z(s)ds = f(t) \tag{2}$$

не имеет решений при произвольной неоднородности $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})$.

В настоящей статье, с использованием теории обобщенного обращения операторов [4, 5] и, в частности, обобщенного обращения интегральных операторов Фредгольма с вырожденным ядром в банаховых пространствах [11], а также теоремы о разрешимости уравнений с обобщенно-обратимыми операторами L [12, 13], рассмотрим задачу об установлении условий возникновения решений уравнения (2), возмущенного малым линейным слагаемым $\varepsilon\int_a^b K(t,s)z(s)ds$, а также построении общего решения уравнения (1).

Прежде всего приведем некоторые сведения, необходимые для дальнейшего изложения.

Предварительные сведения. Пусть $z(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})$ — вектор-функция, которая действует из отрезка $\mathcal{I} = [a,b]$ в банахово пространство $\mathbf{B}$.

Рассмотрим в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ линейное интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром (2).

Обозначим:

$$D = I_{\mathbf{B}} - A, \quad A = \int\limits_a^b N(s)M(s)\,ds, \quad D\colon \mathbf{B}\to\mathbf{B}.$$

В [11] показано, что если D — ограниченный обобщенно-обратимый оператор, то интегральный оператор L — обобщенно обратим.

Для доказательства обобщенной обратимости интегрального оператора построены проекторы

$$(\mathcal{P}_{N(L)}z)(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\int_a^b N(s)z(s)ds, \quad \mathcal{P}_{N(L)}\colon \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}) \to N(L),$$

$$(\mathcal{P}_{Y_L}f)(t) = M(t)\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)f(s)ds, \quad \mathcal{P}_{Y_L}\colon \mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}) \to Y_L$$

и доказано, что они ограничены. Здесь $\mathcal{P}_{N(D)}, \mathcal{P}_{Y_D}$ — ограниченные проекторы на нуль-пространство $N(D)$ и подпространство Y_D оператора D соответственно [14], которые разбивают банахово пространство $\mathbf{B}$ в прямые топологические суммы замкнутых подпространств

$$\mathbf{B} = N(D) \oplus X_D, \quad \mathbf{B} = Y_D \oplus R(D).$$

В дальнейшем класс линейных ограниченных обобщенно-обратимых операторов, действующих из банахова пространства $\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})$ в банахово пространство $\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})$, будем обозначать $\mathbf{GI}(\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}),\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}))$. Очевидно, что оператор из $\mathbf{GI}(\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}),\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B}))$ является нормально разрешимым.

Теорема 1 [11]. *Пусть D принадлежит $\mathbf{GI}(\mathbf{B},\mathbf{B})$. Тогда оператор*

$$(L^-f)(t) = f(t) + M(t)D^-\int_a^b N(s)f(s)ds \tag{3}$$

является ограниченным обобщенно-обратным оператором к интегральному оператору L, где D^- — ограниченный обобщенно-обратный оператор к оператору D.

Теорема 2 [11]. *Пусть D принадлежит $\mathbf{GI}(\mathbf{B},\mathbf{B})$. Тогда соответствующее (2) однородное интегральное уравнение имеет семейство решений*

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c,$$

где c — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{B}$.

Неоднородное интегральное уравнение (2) при выполнении условия

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)f(s)ds = 0$$

и только при нем имеет семейство решений

$$z(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c + (L^-f)(t),$$

где L^- — ограниченный обобщенно-обратный оператор (3) к оператору L.

Основной результат. Для решения поставленной задачи используем метод Вишика – Люстерника [2] и найдем условия возникновения решений интегрального уравнения (1) в виде ряда по степеням малого параметра ε, который содержит ε в отрицательной степени. Решение уравнения (1) будем искать в виде ряда

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t). \tag{4}$$

Подставим ряд (4) в интегральное уравнение (1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

При ε^{-1} приходим к однородному интегральному уравнению

$$z_{-1}(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z_{-1}(s)ds = 0 \tag{5}$$

для определения $z_{-1}(t)$.

По теореме 2 однородное уравнение (5) имеет решение

$$z_{-1}(t,c_{-1}) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c_{-1}, \tag{6}$$

где $c_{-1} \in \mathbf{B}$ — произвольный элемент, который будет определен ниже.

Приравнивая коэффициенты при ε^0, получаем неоднородное интегральное уравнение

$$z_0(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z_0(s)ds = f(t) + \int\limits_a^b K(t,s)z_{-1}(s)ds \tag{7}$$

для определения коэффициента $z_0(t)$ ряда (4).

По теореме 2 линейное неоднородное интегральное уравнение (7) имеет решения тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\left[f(s) + \int\limits_a^b K(s,\tau)z_{-1}(\tau)d\tau\right]ds = 0.$$

Подставив $z_{-1}(t,c_{-1})$ из (6), получим уравнение

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\left[f(s) + \int\limits_a^b K(s,\tau)M(\tau)\mathcal{P}_{N(D)}c_{-1}d\tau\right]ds = 0. \tag{8}$$

Обозначив

$$B_0 = \mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)M(\tau)\mathcal{P}_{N(D)}d\tau ds, \tag{9}$$

из (8) получим операторное уравнение относительно элемента $c_{-1} \in \mathbf{B}$:

$$B_0 c_{-1} = -\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) f(s) ds. \tag{10}$$

Пусть оператор $B_0 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}, Y_D)$ — обобщенно обратим. Тогда он нормально разрешим и существуют ограниченные проекторы $\mathcal{P}_{N(B_0)} \colon \mathbf{B} \to N(B_0)$, $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \colon \mathbf{B} \to Y_{B_0}$ и ограниченный обобщенно-обратный оператор $B_0^- \colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ к оператору B_0.

Уравнение (10) может быть [8]: однозначно разрешимым ($\mathcal{P}_{N(B_0)} \equiv 0$), везде разрешимым ($\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \equiv 0$), неоднозначно и не везде разрешимым ($\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0, \mathcal{P}_{Y_{B_0}} \neq 0$).

Рассмотрим наиболее общий случай, когда уравнение (10) неоднозначно и не везде разрешимо. По теореме 2, в результате обобщенной обратимости оператора B_0, уравнение (10) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) f(s) ds = 0.$$

Последнее условие выполняется, если будет выполнено условие

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_D} = 0, \tag{11}$$

а операторное уравнение (10) при этом будет иметь семейство решений

$$c_{-1} = \mathcal{P}_{N(B_0)} c - B_0^- \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) f(s)\, ds,$$

где c — произвольный элемент банахова пространства $\mathbf{B}$.

Подставив c_{-1} в (6), получим общее решение однородного интегрального уравнения (5)

$$z_{-1}(t) = M(t) \mathcal{P}_{N(D)} \mathcal{P}_{N(B_0)} c - M(t) \mathcal{P}_{N(D)} B_0^- \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) f(s) ds.$$

Обозначив

$$\widetilde{B}_0^- = -\mathcal{P}_{N(D)} B_0^- \mathcal{P}_{Y_D}, \tag{12}$$

окончательно получим

$$z_{-1}(t) = M(t) \mathcal{P}_{N(D)} \mathcal{P}_{N(B_0)} c + M(t) \widetilde{B}_0^- \int_a^b N(s) f(s)\, ds.$$

При выполнении (11) выполнится условие (8) и по теореме 2 неоднородное интегральное уравнение (7) имеет семейство решений

$$z_0(t, c_0) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c_0 + \bar{z}_0(t), \tag{13}$$

где c_0 — произвольный элемент, который будет определен на следующем шаге,

$$\bar{z}_0(t) = L^- \left[f(\cdot) + \int_a^b K(\cdot, s) z_{-1}(s) ds \right](t) =$$

$$= L^- \left(f(\cdot) + \int_a^b K(\cdot, s) M(s) \mathcal{P}_{N(D)} \mathcal{P}_{N(B_0)} ds\, c + \right.$$

$$\left. + \int_a^b K(\cdot, s) M(s) \widetilde{B}_0^- \int_a^b N(\tau) f(\tau) d\tau ds \right)(t) = H_{-1}(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \widetilde{F}_{-1}(t).$$

Здесь

$$H_{-1}(t) = \left(L^-(\widetilde{K}M)(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)} \right)(t),$$

$$\widetilde{F}_{-1}(t) = L^- \left[f(\cdot) + (\widetilde{K}M(\cdot)\widetilde{B}_0^- \int_a^b N(\tau) f(\tau) d\tau \right](t),$$

оператор $\widetilde{K}$ действует на оператор-функцию $M(t)$ по правилу

$$(\widetilde{K}M)(t) = \int_a^b K(t, s) M(s) ds.$$

Из формулы (3) имеем, что действие оператора L^- на вектор-функцию

$$f(t) + \widetilde{K}M(t)\widetilde{B}_0^- \int_a^b N(s) f(s) ds$$

описывается формулой

$$L^- \left[f(\cdot) + \widetilde{K}M(\cdot)\widetilde{B}_0^- \int_a^b N(s) f(s) ds \right](t) = f(t) + \widetilde{K}M(t)\widetilde{B}_0^- \int_a^b N(s) f(s) ds +$$

$$+ M(t) D^- \int_a^b N(s) \left[f(s) + (\widetilde{K}M)(s)\widetilde{B}_0^- \int_a^b N(\tau) f(\tau) d\tau \right] ds.$$

При ε^1 для определения коэффициента $z_1(t)$ получаем уравнение

$$z_1(t) - M(t)\int\limits_a^b N(s)z_1(s)ds = \int\limits_a^b K(t,s)z_0(s)ds. \tag{14}$$

Из критерия разрешимости уравнения (14)

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)z_0(\tau)d\tau ds = 0,$$

с учетом (13) имеем

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\left[M(\tau)\mathcal{P}_{N(D)}c_0 + \bar{z}_0(\tau)\right]d\tau ds = 0.$$

Используя обозначение (9), из последнего уравнения получаем операторное уравнение относительно элемента $c_0 \in \mathbf{B}$:

$$B_0c_0 = -\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\int\limits_a^b K(s,\tau)\bar{z}_0(\tau)d\tau ds = -\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)(\widetilde{K}\bar{z}_0)(s)ds, \tag{15}$$

где

$$(\widetilde{K}\bar{z}_0)(s) = \int\limits_a^b K(s,\tau)\bar{z}_0(\tau)d\tau.$$

Операторное уравнение (15) при выполнении условия (11) имеет семейство решений

$$c_0 = \mathcal{P}_{N(B_0)}c - B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)(\widetilde{K}\bar{z}_0)(s)\,ds = \mathcal{P}_{N(B_0)}c - B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)\times$$

$$\times\left(\widetilde{K}\left[H_{-1}(s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \widetilde{F}_{-1}(s)\right]\right)(s)\,ds = D_0\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \bar{c}_0, \tag{16}$$

где

$$D_0 = I_{\mathbf{B}} - B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)(\widetilde{K}H_{-1})(s)ds,$$

$$\bar{c}_0 = -B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int\limits_a^b N(s)(\widetilde{K}\widetilde{F}_{-1})(s)ds,$$

$I_{\mathbf{B}}$ — тождественный оператор в банаховом пространстве $\mathbf{B}$.

Подставляя (16) в (13) и используя (12), получаем

$$z_0(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\left[D_0\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \bar{c}_0\right] + \bar{z}_0(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}D_0\mathcal{P}_{N(B_0)}c +$$

$$+ M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\bar{c}_0 + H_{-1}(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \widetilde{F}_{-1}(t) = X_0(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \bar{z}_0(t),$$

где

$$X_0(t) = H_{-1}(t) + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}D_0 = H_{-1}(t) +$$

$$+ M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\left[I - B_0^{-}\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)(\widetilde{K}H_{-1})(s)ds\right] =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{N(D)} + \left[I * + M(t)\widetilde{B}_0^{-}\int_a^b N(s)(\widetilde{K}*)ds\right]H_{-1}(t),$$

$$\bar{z}_0(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\bar{c}_0 + \widetilde{F}_{-1}(t) = \left[I * + M(t)\widetilde{B}_0^{-}\int_a^b N(s)\left(\widetilde{K}*\right)ds\right]\widetilde{F}_{-1}(t).$$

Здесь I — тождественный оператор в банаховом пространстве $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B})$.

При выполнении (15) интегральное уравнение (14) имеет семейство решений

$$z_1(t, c_1) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c_1 + \bar{z}_1(t), \tag{17}$$

где $c_1 \in \mathbf{B}$ — произвольный элемент, который будет определен на следующем шаге итерационного процесса,

$$\bar{z}_1(t) = L^{-}\left(\widetilde{K}z_0\right)(t) = L^{-}\widetilde{K}\left(\left[X_0(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \bar{z}_0(t)\right]\right)(t) = H_0(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \widetilde{F}_0(t),$$

$$H_0(t) = L^{-}(\widetilde{K}X_0)(t),$$

$$\widetilde{F}_0(t) = L^{-}\left(\widetilde{K}\left[I * + M(\cdot)\widetilde{B}_0^{-}\int_a^b N(s)\left(\widetilde{K}*\right)ds\right]\widetilde{F}_{-1}(\cdot)\right)(t).$$

Действуя по индукции, для определения коэффициентов $z_i(t)$ при ε^i ряда (4) получаем уравнения

$$z_i(t) - M(t)\int_a^b N(s)z_i(s)\,ds = \int_a^b K(t,s)z_{i-1}(s)ds, \quad i = 1, 2, 3, \ldots. \tag{18}$$

Из критериев разрешимости уравнений (18)

$$\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)z_{i-1}(\tau)\,d\tau\,ds = 0$$

получим операторные уравнения для определения c_i:

$$B_0c_{i-1} = -\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\int_a^b K(s,\tau)\bar{z}_{i-1}(\tau)\,d\tau\,ds = -\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)(\widetilde{K}\bar{z}_{i-1})(s)\,ds. \tag{19}$$

Операторные уравнения (19) при выполнении условия (11) имеют семейства решений

$$c_{i-1} = \mathcal{P}_{N(B_0)}c - B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)(\widetilde{K}\bar{z}_{i-1})(s)\,ds = \mathcal{P}_{N(B_0)}c-$$

$$-\,B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)\left(\widetilde{K}\left[H_{i-2}(s)\mathcal{P}_{N(B_0)}c+\widetilde{F}_{i-2}(t)\right]\right)(s)\,ds = D_{i-1}\mathcal{P}_{N(B_0)}c+\bar{c}_{i-1},$$

где

$$D_{i-1} = I_{\mathbf{B}} - B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)(\widetilde{K}H_{i-2})(s)ds,$$

$$\bar{c}_{i-1} = -B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)(\widetilde{K}\widetilde{F}_{i-2})(s)\,ds.$$

При выполнении условия (11), а следовательно и условий (19), интегральные уравнения (18) имеют семейства решений

$$z_i(t,c_i) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}c_i + \bar{z}_i(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}[D_i\mathcal{P}_{N(B_0)}c+\bar{c}_i] + \bar{z}_i(t) =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{N(D)}D_i\mathcal{P}_{N(B_0)}c + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\bar{c}_i + H_{i-1}(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \widetilde{F}_i(t) =$$

$$= X_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \bar{z}_i(t),$$

где

$$X_i(t) = H_{i-1}(t) + M(t)\mathcal{P}_{N(D)}D_i = H_{i-1}(t)+$$

$$+\,M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\left[I - B_0^-\mathcal{P}_{Y_D}\int_a^b N(s)(\widetilde{K}H_{i-1})(s)ds\right] =$$

$$= M(t)\mathcal{P}_{N(D)} + \left[I* + M(t)\widetilde{B}_0^-\int_a^b N(s)(\widetilde{K}*)ds\right]H_{i-1}(t),$$

$$\bar{z}_i(t) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\bar{c}_i + \widetilde{F}_{i-1}(t) = \left[I * + M(t)\widetilde{B}_0^- \int\limits_a^b N(s) \left(\widetilde{K}*\right) ds \right] \widetilde{F}_{i-1}(t).$$

Проведенные рассуждения позволяют предложить итерационный алгоритм построения семейства решений интегрального уравнения (1):

$$z_i(t, c_i) = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \widetilde{X}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \bar{z}_i(t),$$

$$\widetilde{X}_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i = -1, \\ \left[I * + M(t)\widetilde{B}_0^- \int_a^b N(s) \left(\widetilde{K}*\right) ds \right] H_{i-1}(t), & \text{если} \quad i = \overline{0, \infty}, \end{cases}$$

$$H_{i-1}(t) = \begin{cases} \left(L^-(\widetilde{K}M(\cdot)\mathcal{P}_{N(D)}) \right)(t), & \text{если} \quad i = 0, \\ \left(L^-(\widetilde{K}X_{i-1}(\cdot)) \right)(t), & \text{если} \quad i = \overline{1, \infty}, \end{cases} \tag{20}$$

$$\bar{z}_i(t) = \begin{cases} M(t)\widetilde{B}_0^- \int_a^b N(s)f(s)ds, & \text{если} \quad i = -1, \\ \left[I * + M(t)\widetilde{B}_0^- \int_a^b N(s) \left(\widetilde{K}*\right) ds \right] \widetilde{F}_{i-1}(t), & \text{если} \quad i = \overline{0, \infty}, \end{cases}$$

$$\widetilde{F}_{i-1}(t) = \begin{cases} \left(L^- \left[I * + (\widetilde{K}M)(\cdot)\widetilde{B}_0^- \int_a^b N(s) * ds \right] f(\cdot) \right)(t), & \text{если} \quad i = 0, \\ L^- \left(\widetilde{K} \left[I * + M(\cdot)\widetilde{B}_0^- \int_a^b N(s) \left(\widetilde{K}*\right) ds \right] \widetilde{F}_{i-2}(\cdot) \right)(t), & \text{если} \quad i = \overline{1, \infty}. \end{cases}$$

Таким образом, при выполнении условия (11) слабовозмущенное операторное уравнение (1) имеет семейство решений в виде ряда

$$z(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i \widetilde{X}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c + \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t). \tag{21}$$

Использовав обозначения

$$|||M||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|M(t)\|_{\mathbf{B}} = M_0 < \infty, \quad |||N||| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|N(t)\|_{\mathbf{B}} = N_0 < \infty,$$

$$|||\widetilde{B}_0^-|||_{\mathbf{B}} = \tilde{b}_0 < \infty, \quad |||L^-|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})} = l < \infty,$$

$$|||\widetilde{K}|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})} = \tilde{k} < \infty, \quad |||f(t)|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})} = f < \infty,$$

$$|||\mathcal{P}_{N(D)}|||_{\mathbf{B}} = p < \infty, \quad |||\mathcal{P}_{N(B_0)}|||_{\mathbf{B}} = \tilde{p} < \infty,$$

докажем равномерную сходимость ряда (21) при фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$.

Очевидно, что в силу ограниченности операторов $M(t), \mathcal{P}_{N(D)}$ и $\mathcal{P}_{N(B_0)}$ ряд

$$\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(B_0)}c = M(t)\mathcal{P}_{N(D)}\mathcal{P}_{N(B_0)}c \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i$$

для $\varepsilon < 1$ сходится.

Далее докажем сходимость ряда

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i \widetilde{X}_i \mathcal{P}_{N(B_0)}c. \tag{22}$$

При $i = 0$ имеем

$$|||\widetilde{X}_0(t)|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})} \leq lkM_0p(1 + M_0N_0\tilde{b}_0k).$$

Аналогично при $i = 1$

$$|||\widetilde{X}_1|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})} \leq lk(1 + M_0N_0\tilde{b}_0k)|||\widetilde{X}_0|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})}.$$

Продолжая этот процесс, для операторов $\widetilde{X}_i$ получаем оценки

$$|||\widetilde{X}_i|||_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I},\mathbf{B}_1)} \leq [lk(1 + M_0N_0\tilde{b}_0k)]^i|||\widetilde{X}_0|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})}.$$

Тогда для каждого $t \in \mathcal{I}$ имеем

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i \widetilde{X}_i(t)\mathcal{P}_{N(B_0)}c \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i K_1^i|||\widetilde{X}_0(t)|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})}|||\mathcal{P}_{N(B_0)}|||_{\mathbf{B}}|||c|||_{\mathbf{B}},$$

где $K_1 = lk(1 + M_0N_0\tilde{b}_0k)$. Следовательно, при фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, где $\varepsilon_* < K_1^{-1}$, ряд (22) равномерно сходится.

Аналогично доказывается сходимость ряда

$$\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t).$$

Для оценки коэффициентов $\bar{z}_i(t)$, $i = \overline{1, \infty}$, получаем

$$|||\bar{z}_i(t)|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})} \leq k^i l^{i+1}(1 + M_0N_0\tilde{b}_0k)^{i+2}|||f(t)|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})}.$$

Тогда для каждого $t \in \mathcal{I}$ имеем

$$\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t) \leq \varepsilon^{-1}M_0N_0\tilde{b}_0|||f(t)|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})} + \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i k^i l^{i+1}(1 + M_0N_0\tilde{b}_0k)^{i+2}|||f(t)|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})} =$$

$$= \varepsilon^{-1}M_0N_0\tilde{b}_0|||f(t)|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})} + \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i K_1^i l(1 + M_0N_0\tilde{b}_0k)^2|||f(t)|||_{\mathbf{C}(\mathcal{I},\mathbf{B})}$$

и для фиксированного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, где $\varepsilon_* < K_1^{-1}$, ряд $\sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(t)$ равномерно сходится.

Пусть $\varepsilon_* < \min(1, K_1^{-1})$, тогда для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ ряд (21) будет равномерно сходящимся.

Теорема 3. *Пусть оператор D принадлежит $\mathbf{GI}(\mathbf{B}, \mathbf{B})$ и порождающее уравнение (2) при произвольной неоднородности $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B})$ не имеет решений.*

Тогда если оператор B_0 принадлежит $\mathbf{GI}(\mathbf{B}, \mathbf{B})$ и

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_D} = 0,$$

то слабовозмущенное уравнение (1) при произвольной неоднородности $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B})$ имеет семейство решений в виде абсолютно сходящегося при произвольных фиксированных $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ ряда

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t),$$

коэффициенты которого определяются с помощью итерационного алгоритма (20).

Замечание 1. Если $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$, то операторные уравнения (10), (15) и т. д. на каждом шаге итерационного процесса будут n-нормальными и однозначно разрешимыми [8]. Тогда при выполнении условия

$$\mathcal{P}_{Y_{B_0}} \mathcal{P}_{Y_D} = 0$$

уравнение (1) будет иметь единственное решение в виде ряда (4), коэффициенты которого определяются с помощью итерационного алгоритма (20), в котором $\mathcal{P}_{N(B_0)} = 0$, а обобщенно-обратный оператор B_0^- будет левым обратным $(B_0)_l^{-1}$ [15].

Замечание 2. Если $\mathcal{P}_{Y_{B_0}} = 0$, то операторные уравнения (10), (15) и т. д. на каждом шаге итерационного процесса будут d-нормальными и всюду разрешимыми [8]. Тогда условие (11) будет всегда выполнено и уравнение (1) при произвольной $f(t)$ будет иметь семейство решений в виде ряда (4), коэффициенты которого определяются с помощью итерационного алгоритма (20), в котором обобщенно-обратный оператор B_0^- будет правым обратным $(B_0)_r^{-1}$ [15].

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950. — 472 с.
2. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, вып. 3. — С. 3 – 80.
3. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1990. — 96 с.
4. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.
5. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — 323 p.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
7. *Бойчук А. А., Панасенко Є. В.* Слабкозбурені крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 3. — С. 291 – 304.
8. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.

9. *Boichuk A. A., Shegda L. M.* Bifurcation of solutions of singular Fredholm boundary value problems // Different. Equat. — 2011. — **47**, № 4. — P. 453 – 461.

10. *Головацька І. А.* Слабкозбурені системи інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 2. — С. 151 – 164.

11. *Zhuravl'ov V. P.* Generalized inversion of Fredholm integral operators with degenerate kernels in Banach spaces // J. Math. Sci. — 2015. — **212**, № 3. — P. 275 – 289.

12. *Boichuk A. A., Zhuravlev V. F., Pokutnyi A. A.* Normally solvable operator equations in a Banach space // Ukr. Math. J. — 2013. — **65**, № 2. — P. 179 – 192.

13. *Журавльов В. П.* Лінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах // Буков. мат. журн. — 2014. — **2**, № 4. — С. 57 – 66.

14. *Попов М. М.* Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні'07. — 2007. — Вип. 13. — С. 78 – 116.

15. *Zhuravlev V. F.* Solvability criterion and representation of solutions of n-normal and d-normal linear operator equations in a Banach space // Ukr. Math. J. — 2010. — **62**, № 2. — P. 186 – 202.

Получено 17.10.16