УДК 517.9

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА И ОСОБЫХ ТОЧЕК ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА*

В. Ф. Чистяков, Е. В. Чистякова

Ин-т динамики систем и теории управления СО РАН
e-mail: chist@icc.ru
chistyak@gmail.com

We study linear systems of ordinary differential equations of higher order with a matrix at the highest order derivative of the sought vector-valued function identically degenerate on its domain. We give definitions of an index and a singular point for such systems, formulate conditions for solvability, and give a formula for a general solution. Algorithms for finding the index and singular points are given.

Вивчаються лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку з тотожно виродженою матрицею в області визначення при старшій похідній шуканої вектор-функції. Дано означення індексу й особливих точок таких систем, сформульовано умови розв'язності та отримано формулу загального розв'язку. Наведено алгоритми обчислення індексу й особливих точок.

1. Введение и постановка проблемы. В настоящее время при анализе сложных электрических цепей и электронных схем часто встречаются системы, включающие в себя взаимосвязанные обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) различных порядков и алгебраические уравнения. Алгебраические уравнения отвечают за наличие в моделях балансовых соотношений, в частности законов сохранения или уравнений состояния, а ОДУ описывают динамику процесса (см., например, [1 – 6]). Системы взаимосвязанных дифференциальных и алгебраических уравнений можно записать в виде векторных ОДУ с вырожденной матрицей в области определения при старшей производной искомой вектор-функции

$$\Lambda_k x := A_k(t)x^{(k)}(t) + A_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + A_0(t)x(t) = f(t), \quad t \in T := [0,1], \qquad (1)$$

где $A_i(t)$, $i = \overline{0,k}$, — $(n \times n)$-матрицы, $x(t)$ и $f(t)$ — искомая и известная вектор-функции соответственно, $x^{(i)}(t) = (d/dt)^i x(t)$, $x^{(0)}(t) = x(t)$,

$$\det A_k(t) = 0 \quad \forall t \in T. \qquad (2)$$

Предполагается, что входные данные имеют необходимую для дальнейших рассуждений и преобразований гладкость.

Системы вида (1), удовлетворяющие условию (2), принято называть в настоящее время дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Для случая систем первого

* Выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 15-01-03228 А, 16-51-540002 Вьет-а).

порядка, когда $k = 1$, ДАУ хорошо изучены (см., например, монографии [3 – 11] и приведенную в них библиографию). ДАУ высокого порядка изучались, например, в работах [6, 12 – 16]. Любые системы вида (1) можно свести заменой переменных к системам первого порядка. Однако при $k > 1$ ДАУ имеют ряд свойств, которые не видны после редукции.

2. Вспомогательные сведения. Оговорим некоторые моменты относительно используемых в работе обозначений.

Для упрощения записи указание зависимости от t в работе будем иногда опускать, если это не вызывает путаницы. Включения $V(t) \in \mathbf{C}^i(T)$, $i \geq 1$, где $V(t)$ — матрица или вектор-функция, означают, что все ее элементы дифференцируемы на T до порядка i включительно. Непрерывности соответствует обозначение $V(t) \in \mathbf{C}(T)$; символом $\mathbf{C}^A(T)$ обозначается пространство вещественно-аналитических матриц. Ниже также используется запись $\mathbf{r}[V(t)] = \max\{\text{rank } V(t),\ t \in T\}$.

Под решением ДАУ (1) будем понимать любую вектор-функцию $x(t) \in \mathbf{C}^k(T)$, которая обращает (1) в тождество на T при подстановке.

В работе используются нормы q-мерного вектора $b = (b_1, b_2, \ldots, b_q)^\top \in \mathbf{R}^q$ и нормы вектор-функции $b(t) = (b_1(t), b_2(t), \ldots, b_q(t))^\top$, $t \in T$ ($\top$ — символ транспонирования), вычисляемые по формулам

$$\|b\|_E^2 = \sum_{j=1}^{q} b_j^2, \quad \|b\|_I = \max_{j\in[1,\cdots,q]} |b_j|,$$

$$\|b\|_{L_2(T)}^2 = \int\limits_0^1 \|b(s)\|_E^2 ds, \quad \|b\|_{\mathbf{C}(T)} = \max_{t\in T} \|b(t)\|_I.$$

Выражение $\lambda\bar{A} + \bar{B}$, где $\bar{A}$, $\bar{B}$ — постоянные матрицы произвольной размерности, λ — скалярный параметр (в общем случае комплексный), называется матричным пучком. Пучок квадратных матриц $\lambda\bar{A} + \bar{B}$ регулярен, если существует $\lambda = \lambda_0$: $\det(\lambda_0\bar{A} + \bar{B}) \neq$ $\neq 0$.

Лемма 1 (см., например, [3, 17]). *Для регулярного пучка $(n \times n)$-матриц $\lambda\bar{A} + \bar{B}$ существуют квадратные матрицы P, Q со свойством $P(\lambda\bar{A} + \bar{B})Q = \operatorname{diag}\{\lambda E_d + J, \lambda N +$ $+E_{n-d}\}$, где E_d, E_{n-d} — единичные матрицы размерности d и $n-d$ соответственно, J, N — некоторые блоки подходящей размерности, и, начиная с некоторого χ, называемого индексом пучка $\lambda\bar{A} + \bar{B}$, имеет место равенство $N^\chi = 0, 1 \leq \chi \leq n-d$.*

Более того, выполняется неравенство $\text{rank}\,\bar{A} \geq d$, где $d = \deg\det(\lambda\bar{A} + \bar{B})$, $\deg$ — степень многочлена. Равенство $\text{rank}\,\bar{A} = d$ имеет место тогда и только тогда, когда $N = 0$.

Определение 1. *Ненулевой многочлен $\det[\lambda A(t) + B(t)]$, $t \in T$, где $A(t)$, $B(t)$ — квадратные матрицы, удовлетворяет критерию „ранг-степень” на T, если:*

1) $\mathbf{r}[A(t)] = r$;

2) $\det[\lambda A(t) + B(t)] = \mathbf{a}_0(t)\lambda^r + \ldots$, $\mathbf{a}_0(t) \neq 0\ \forall t \in T$.

Из леммы 1 следует, что условия 1, 2 определения 1 эквивалентны равенству

$$\text{rank}\, A(t) = \deg\det[\lambda A(t) + B(t)] = r = \text{const}, \quad t \in T.$$

Лемма 2 [17]. *Матричный пучок вида*

$$\lambda\tilde{A}+\tilde{B}=\lambda\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix},$$

где L_j — блоки подходящей размерности, $j=\overline{1,4}$, удовлетворяет критерию „ранг-степень” тогда и только тогда, когда $\det L_4\neq 0$, *причем* $\det\left(\lambda\tilde{A}+\tilde{B}\right)=\lambda^r\det L_4+\ldots.$

Определение 2 (см., например, [3]). *Псевдообратной матрицей к $(m\times n)$-матрице $M(t)$, $t\in T$, называется $(n\times m)$-матрица $M^+(t)$, удовлетворяющая для любых $t\in T$ уравнениям*

$$M(t)M^+(t)M(t)=M(t),\quad M^+(t)M(t)M^+(t)=M^+(t),$$

$$(M^+(t)M(t))^\top=M^+(t)M(t),\quad (M(t)M^+(t))^\top=M(t)M^+(t).$$

Псевдообратная матрица определена единственным образом для любого $t\in T$ и любой $(m\times n)$-матрицы $M(t)$ (см., например, [3]). Если матрица $M(t)$ квадратная и неособенная, то $M^{-1}(t)=M^+(t)$. Согласно [5], существует матрица $M^+(t)\in\mathbf{C}^q(T)$, если $M(t)\in\mathbf{C}^q(T)$, $\operatorname{rank}M(t)=r=\mathrm{const}\ \forall t\in T$. Если $\operatorname{rank}M(t)\neq\mathrm{const}$, $t\in T$, то хотя бы один элемент матрицы $M^+(t)$ имеет разрыв второго рода на T.

Ниже будем использовать операторы вида

$$\mathrm{d}_i[M]=\begin{pmatrix} M \\ (d/dt)M \\ \ldots \\ (d/dt)^iM \end{pmatrix},\quad \mathcal{M}_i[M]=\begin{pmatrix} C_0^0M & 0 & \ldots & 0 \\ C_1^0M^{(1)} & C_1^1M & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_i^0M^{(i)} & C_i^1M^{(i-1)} & \ldots & C_i^iM \end{pmatrix},\tag{3}$$

где $M\equiv M(t)$ — некоторая матрица из $\mathbf{C}^i(T)$, $C_i^j=i!/j!(i-j)!$ — биномиальные коэффициенты. Эти операторы связаны формулой

$$\mathrm{d}_i[M(t)F(t)]=\mathcal{M}_i[M(t)]\mathrm{d}_i[F(t)],\tag{4}$$

где $F(t)$ — некоторая матрица подходящей размерности из $\mathbf{C}^i(T)$, вытекающая из формулы Лейбница для дифференцирования произведений.

3. Общее решение и индекс. Введем следующие понятия из работы [13] с некоторой их модификацией.

Определение 3. *Пространство решений (ПР) однородного ДАУ (1) конечномерно, если все произведения $\tilde{X}_d(t)c$, где $\tilde{X}_d(t)$ — $(n\times d)$-матрица из $\mathbf{C}^k(T)$, c — вектор произвольных постоянных, являются решениями ДАУ и на отрезке T нет других решений. Параметр d называется размерностью ПР системы (1).*

ПР однородного ДАУ (1) бесконечномерно, если оно содержит бесконечное количество линейно независимых решений.

Определение 4. *Система (1) имеет решение типа Коши, если она разрешима для любой вектор-функции $f(t)\in\mathbf{C}^{kn}(T)$ и ее решения представимы в виде линейной комбинации*

$$x(t,c)=X_d(t)c+\psi(t),\tag{5}$$

где $X_d(t)$ — $(n\times d)$*-матрица из* $\mathbf{C}^k(T)$, *со свойством* $\operatorname{rank} \mathrm{d}_{k-1}[X_d(t)] = d\ \forall t \in T, \mathrm{d}_{k-1}[.]$ — *оператор из формул (3),* c — *вектор произвольных постоянных,* $\psi(t)$ — *вектор-функция со свойством* $\Lambda_k\psi(t) = f(t), t \in T$, *и на любом подотрезке* $[\alpha_0, \beta_0] \subseteq T$ *нет решений, отличных от* $x(t,c)$.

Определение 5. *Если существует оператор* $\Omega_l = \sum_{j=0}^{l} L_j(t)(d/d)^j$, *где* $L_j(t)$ — $(n\times n)$*-матрицы из* $\mathbf{C}(T)$, *имеющий свойство* $\Omega_l\circ\Lambda_k y = \sum_{i=0}^{k}\tilde{A}_i(t)y^{(i)}(t)\ \forall y(t) \in \mathbf{C}^{l+k}(T)$, *где* $\tilde{A}_i(t)$ — $(n\times n)$*-некоторые матрицы из* $\mathbf{C}(T)$, $\det\tilde{A}_k(t) \neq 0\ \forall t \in T$, *то он называется левым регуляризирующим оператором (ЛРО) для системы (1), а наименьшее возможное* l — *ее индексом.*

Определение 6. *Если существует оператор* $\tilde{\Omega}_l$, *имеющий свойство*

$$\tilde{\Omega}_l\circ\Lambda_k y = \sum_{i=0}^{k}\tilde{A}_i(t)y^{(i)}(t)\ \ \forall y(t) \in \mathbf{C}^{l+k}(T),$$

где $\det\tilde{A}_k(t) \not\equiv 0, t \in T$, *для которого определен ЛРО, то изолированные точки* $t_\nu \in T$, *в которых* $\det\tilde{A}_k(t_\nu) = 0$, *называются особыми точками системы (1).*

Анонсируем следующий результат.

Лемма 3. *Пусть: 1) в системе (1) матрицы* $A_i(t) \in \mathbf{C}^A(T), i = \overline{0,k}$*; 2) ПР однородного ДАУ конечномерно. Тогда существует оператор* $\tilde{\Omega}_l\colon L_j(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ *из определения 6 и число особых точек на отрезке* T *конечно.*

Более того, если ПР однородной ДАУ бесконечномерно, то существует оператор Ω_μ, *для которого определен ЛРО, имеющий свойство*

$$\Omega_\mu\circ\Lambda_k y = \sum_{i=0}^{k}\begin{pmatrix}\tilde{A}_{i,1}(t)\\ 0\end{pmatrix}y^{(i)}(t)\quad \forall y(t) \in \mathbf{C}^{l+k}(T), \tag{6}$$

где $\tilde{A}_{i,1}(t)$ — *некоторые* $(\nu\times n)$*-матрицы из* $\mathbf{C}^A(T)$, $\nu < n$, $\operatorname{rank}\tilde{A}_{k,1}(t)$ *полный для всех* $t \in T$, *кроме конечного числа точек. Для совместности ДАУ (1) необходимо выполнение равенства* $\Omega_\mu f(t) = \begin{pmatrix} f_1^\top(t) & 0\end{pmatrix}^\top$, *где число нулевых компонент равно* $n-\nu$.

Операторы $\Omega_l, \tilde{\Omega}_l, \Omega_\mu$ можно строить следующим образом. Подействуем оператором $\mathcal{L} = \operatorname{diag}\{0, (d/dt)I_{n-r}\}L(t)$ на ДАУ (1), где $L(t)A_k(t) = \begin{pmatrix}A_{k,1}(t)\\ 0\end{pmatrix}$, $L(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $\det L(t) \neq 0\ \forall t \in T$, нулевой блок имеет размерность $([n-r]\times n)$, $r = \mathbf{r}[A_k(t)]$. В результате получим либо ДАУ порядка k, либо одну из систем с оператором из определений 5, 6 или равенства (6). Если новая система является ДАУ, то процесс повторяем. Произведение μ или l соответствующих операторов вида $\mathcal{L}$ является одним из искомых операторов $\Omega_l, \tilde{\Omega}_l, \Omega_\mu$. Согласно теореме Долежаля [21], матрицы $L(t)$ существуют на всех шагах процесса.

Пример 1. Рассмотрим ДАУ

$$\Lambda_2 x = \begin{pmatrix} t & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ddot{x} + \begin{pmatrix}\gamma+1 & 0\\ t^2 & t\end{pmatrix}\dot{x} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 2t & 1\end{pmatrix}x = 0, \quad t \in T,$$

где γ — вещественный параметр, $\dot{} \equiv d/dt, \ddot{} \equiv d^2/dt^2$. Если $\gamma = 1$, то ПР системы бесконечномерно: любая вектор-функция $(t^j, -t^{j+1})^\top$, $j = 1, 2, \ldots$, является решением ДАУ.

Можно принять

$$\tilde{\Omega}_\mu = F_1 \mathrm{diag}\,\{1, d/dt\} F_0 \mathrm{diag}\,\{1, d/dt\} E_2,$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = 2.$$

Если $\gamma \neq 1$, то можно принять $\Omega_l = \mathrm{diag}\,\{1, d/dt\}\, F_0 \mathrm{diag}\,\{1, d/dt\} E_2$, $l = 2$. Здесь $\tilde{A}_2(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ (4-\gamma-1)t & 2 \end{pmatrix}$. Точка $t = 0$ является особой. На любом отрезке $[\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$ оператор Ω_l является ЛРО и индекс ДАУ равен 2.

Итак, ЛРО может не существовать в двух случаях: 1) ПР однородной системы (1) бесконечномерно; 2) на T существуют особые точки. Для гладких входных данных лемма 3 не является правильной. Можно лишь утверждать, что при бесконечномерном ПР существует отрезок $T_0 \subseteq T$, на котором определен оператор Ω_μ с непрерывными коэффициентами из (6).

Определение 7. *Совокупность системы (1) и ее производных до порядка i включительно:* $\mathrm{d}_i[\Lambda_k x - f] = 0$, $t \in T$, *где* $\mathrm{d}_i[.]$ — *оператор из формул (3), называется i-продолженной системой (1).*

С использованием формулы (4) i-продолженную систему можно записать в виде соотношения

$$D_i[\mathbf{A}(t)]\mathrm{d}_{i+k}[x] = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} O_j & \mathcal{M}_i[A_j(t)] & \tilde{O}_j \end{pmatrix} \mathrm{d}_{i+k}[x] = \mathrm{d}_i[f(t)], \tag{7}$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_k & A_{k-1} & \dots & A_0 \end{pmatrix}$, матрица $D_i[\mathbf{A}(t)]$ имеет размерность $[(i+1)n \times (i+k+1)n]$, нулевые матрицы $O_j, \tilde{O}_j$ имеют размерности $[(i+1)n \times jn]$, $[(i+1)n \times (k-j)n]$, $j = \overline{0,k}$, соответственно. Ниже мы будем использовать разбиение

$$D_i[\mathbf{A}(t)] = \begin{pmatrix} \tilde{B}_i(t) & \Gamma_i[\mathbf{A}(t)] \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $\Gamma_i[\mathbf{A}(t)]$ — блочно-треугольная квадратная матрица с блоками $A_k(t)$ на диагонали.

Замечание 1. Использование продолженных систем восходит еще к А. Картану (см., например, [22]). Для систем ОДУ первого порядка, не разрешенных относительно производных, продолженные системы применялись в работах [23 – 25]. В последующем этот метод стал стандартным при изучении ДАУ для многих авторов (см. монографии из списка литературы и приведенную в них библиографию).

Существуют и другие подходы к определению индекса ДАУ. Согласно [3], система $\bar{A}\dot{x} + \bar{B}x = f(t)$ с регулярным пучком матриц коэффициентов $\lambda\bar{A} + \bar{B}$ имеет индекс, равный χ (см. лемму 1). Попытки определения индекса ДАУ $A_1(t)\dot{x} + A_0(t)x = f(t)$, $t \in T$, через индекс пучка $\lambda A_1(t) + A_0(t)$ натолкнулись на серьезное препятствие: в общем случае индекс этого пучка матриц при любом $t \in T$ может не совпадать с индексом пучка новой системы после замены вида $x = Q(t)y$, где $Q(t)$ — неособенная матрица из $\mathbf{C}^1(T)$ (см. примеры из [5]). В ряде работ индекс определяется через число шагов последовательных преобразований исходного ДАУ к системе с невырожденной матрицей при старшей производной (см., например, монографии [3, 8 – 11] и приведенную в них библиографию). Но может оказаться, что эти трансформации невозможны для ДАУ с гладкими коэффициентами на некотором шаге процесса, а ЛРО определен на T. В работе [18] введено понятие индекса ДАУ при $k = 1$, которое применительно к ДАУ (1) имеет следующий вид.

Определение 8. *Пусть $\mathcal{X} = \{x \equiv x(t)\colon \Lambda_k x - f = 0, t \in T\}$ — множество решений ДАУ (1) — не пусто и, начиная с некоторого натурального l, для любой вектор-функции $x_\varepsilon \equiv x_\varepsilon(t)\colon \ \|\mathrm{d}_{l-1}[\Lambda_k x_\varepsilon - f]\|_{L_2(T)} < \varepsilon$ найдется решение $x(t) \in \mathcal{X}$ такое, что $\|x(t) - -x_\varepsilon(t)\|_{L_2(T)} \leq \kappa\varepsilon$, κ — некоторая константа. Тогда будем говорить, что индекс ДАУ равен l.*

В работе [19] дано обобщение этого понятия на операторные уравнения. Несколько позже похожее понятие появилось в зарубежной литературе, где вместо пространства $L_2(T)$ используются пространства $\mathbf{C}^i(T)$, и оно называется „индексом по возмущению". Индекс по возмущению могут иметь ДАУ с особыми точками и бесконечномерным ПР, но в настоящий момент не существует конструктивного алгоритма для его вычисления. Из утверждения, приводимого ниже, следует вывод: существование ЛРО гарантирует существование индекса по возмущению.

Теорема 1. *Пусть индекс системы (1) равен l. Если $A_i(t) \in \mathbf{C}^m(T)$, $i = \overline{0,k}$, $m = = \max\{(k-1)n+r+1, 2l\}$, $r = \mathbf{r}[A_k(t)]$, то существует решение типа Коши и в формуле (5) вектор-функция*

$$\psi(t) = \int\limits_0^t K(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{l-k} C_j(t)f^{(j)}(t), \quad t \in T, \tag{9}$$

где $K(t,s)$, $C_j(t)$ — некоторые $(n \times n)$-матрицы. При $l < k$ в формуле (9) вектор-функция $\psi(t) = \int_0^t K(t,s)f(s)ds$, и при $k - l = 1$ ядро $K(t,t) \neq 0$, $t \in T$. Если $k - l \geq 2$, то $\mathcal{K}_j(t,t) = 0$, $\mathcal{K}_j(t,s) = \partial^j K(t,s)/\partial t^j$, $j \leq k - l - 2$, где $\mathcal{K}_0(t,s) = K(t,s)$.

Доказательство. Введем обозначение $\zeta = \mathrm{d}_{k-1}[x]$. Тогда мы можем поставить в соответствие системе (1) ДАУ первого порядка

$$\begin{pmatrix} E_\nu & 0 \\ 0 & A_k(t) \end{pmatrix} \dot{\zeta} + \begin{pmatrix} 0 & -E_\nu \\ A_0(t) & \tilde{A}(t) \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T, \tag{10}$$

где $\nu = (k-1)n$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_{k-1} \end{pmatrix}$. Для ДАУ (10) определен ЛРО вида $\mathrm{diag}\,\{E_\nu, \Omega_l\}$. Из [7] следует, что при этом условии для ДАУ (10) существует решение типа Коши вида

$$\zeta(t,c) = \mathcal{X}_d(t)c + \int\limits_0^t \mathrm{K}(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{l-1} \mathcal{C}_j(t)f^{(j)}(t), \quad t \in T, \tag{11}$$

где $\mathcal{X}_d(t)$ — $(kn \times d)$-матрица, и $\mathrm{K}(t,s)$, $\mathcal{C}_j(t)$ — $(kn \times n)$-матрицы. Из формулы (11) и вида вектор-функции ζ следует равенство

$$x^{(k-1)} = \mathcal{X}_{d,k-1}(t)c + \int\limits_0^t \mathrm{K}_{k-1}(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{l-1} \mathcal{C}_{j,k-1}(t)f^{(j)}(t), \quad t \in T, \tag{12}$$

где $\mathcal{X}_{d,k-1}(t)$ — $(n \times d)$-матрицы, $\mathrm{K}_{k-1}(t,s)$, $\mathcal{C}_{j,k-1}(t)$ — $(n \times n)$-матрицы, дифференцируемые в областях определения. В силу связи

$$(k-2)!x = \int\limits_0^t (t-s)^{k-2} x^{(k-1)}(s)ds + \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{c}_j t^j,$$

где $k \geq 2$, $\tilde{c}_j$ — некоторые постоянные векторы, из формулы (12) следует, что $\mathcal{X}_d(t) = \mathrm{d}_{k-1}[X_d(t)]$, в формуле (9) ядро $K(t,s) = (t-s)^{k-2}\mathrm{K}_{k-1}(t,s)/(k-2)!$, а верхний предел в сумме равен $l-k$.

Теорема 1 доказана.

Согласно результатам монографии [7], теорема 1 допускает обращение.

Лемма 4. *Пусть: 1) на T для системы (1) определено решение типа Коши $x(t,c) \in \mathbf{C}^{m_1}(T)$; 2) матрицы $A_k(t), A_{k-1}(t), \ldots, A_0(t) \in \mathbf{C}^{m_2}(T)$, где $m_1 = (k-1)n + r + 2$, $m_2 = 2((k-1)n + r) + 3$. Тогда на T определен ЛРО для системы (1).*

Приведем алгоритм вычисления индекса и матричных коэффициентов ЛРО.

Лемма 5. *Если, начиная с некоторого $i = l$, справедливы равенства*

$$\operatorname{rank} \Gamma_i[\mathbf{A}(t)] = \text{const}, \quad \Gamma_i^+[\mathbf{A}(t)]\Gamma_i[\mathbf{A}(t)] = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & Z_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где $Z_{22}(t)$ — некоторый блок подходящей размерности, то l равно индексу системы (1), причем первые n строк матрицы $\Gamma_l^+[\mathbf{A}(t)]$, разбитые на $(n \times n)$-блоки, можно принять в качестве коэффициентов ЛРО.

Доказательство. Согласно [5], существует матрица $\Gamma_i^+[\mathbf{A}(t)]$ той же гладкости, что и исходная матрица. Разобьем первые n строк матрицы $\Gamma_i^+[\mathbf{A}(t)]$ на $(n \times n)$-блоки

$$\begin{pmatrix} W_0 & W_1 & \ldots & W_l \end{pmatrix}.$$

Если в продолженной системе $D_l[\mathbf{A}(t)]\mathrm{d}_{l+k}[x] = \mathrm{d}_l[f(t)]$ умножить блочные строки на блоки W_j с соответствующими номерами, то получим с учетом разбиения (8) строку, состоящую из матриц $\tilde{A}_j$ в определении 5, где $\tilde{A}_k = E_n$.

Лемма 5 доказана.

Пример 2. Рассмотрим ДАУ, построенное на основе примера из монографии [4]:

$$A(t)\ddot{x} + [E_2 + \dot{A}(t)]\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & w(t) \\ v(t) & 0 \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} 1 & \dot{w}(t) \\ \dot{v}(t) & 1 \end{pmatrix} \dot{x} = f(t), \quad f(t) \in \mathbf{C}^2(T),$$

где $v(t)$, $w(t) \in \mathbf{C}^\infty(T)$, $v(t)w(t) = 0 \; \forall t \in T$. Здесь ЛРО $\Omega_2 = (d/dt)[E_2 - A(t)(d/dt)]$ и индекс системы равен 2. Общее решение системы имеет вид (см. формулы (5), (9))

$$x(t,c) = c + \int\limits_0^t f(s)ds - A(t)f(t), \quad t \in T, \quad d = 2, \quad X_d(t) = K(t,s) = E_2, \quad C_0(t) = A(t).$$

Структура множеств, на которых $v(t) = 0$ или $w(t) = 0$, может быть очень сложной, так как любое замкнутое множество является множеством нулей некоторой дифференцируемой функции. Поэтому часто невозможно разделить систему на дифференциальные уравнения первого и второго порядков, так как не существует матрицы $P(t) \in \mathbf{C}(T)$: $\det P(t) \neq 0$, $P(t)A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall t \in T$. В силу этого не существует непрерывных проекторов на ядро и образ $A(t)$, и методы из работ [3, 8–11] неприменимы.

4. Другие способы вычисления индекса. Вычисление индекса с использованием леммы 5 имеет большой недостаток: нужно вычислять производные входных данных. Начиная с конца 70-х годов прошлого века, получен ряд признаков разрешимости ДАУ на основе изучения свойств соответствующих им матричных пучков.

Лемма 6 [17, 20]. *Если в ДАУ (1) $A_k(t), A_{k-1}(t), \dots, A_0(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, то она имеет индекс 1 тогда и только тогда, когда многочлен $\det[\lambda A_k(t) + A_{k-1}(t)]$ удовлетворяет критерию „ранг-степень" на T. В формуле (5) параметр $d = (k-1)n + r$.*

Более того, если справедливы оценки и равенство

$$\|A_k(t) - \tilde{A}_k(t)\| \leq \varepsilon, \quad \|A_{k-1}(t) - \tilde{A}_{k-1}(t)\| \leq \varepsilon,$$

$$\operatorname{rank} \tilde{A}_k(t) = \operatorname{rank} A_k(t) = r \ \ \forall t \in T, \quad \varepsilon \in [0,]\epsilon_0],$$

то, начиная с некоторого ε_0, многочлен пучка $\det[\lambda \tilde{A}_k(t) + \tilde{A}_{k-1}(t)]$ удовлетворяет критерию „ранг-степень" на T и справедлива оценка $\|\mathbf{a}_0(t) - \tilde{\mathbf{a}}_0(t)\|_{\mathbf{C}(T)} \leq \kappa\varepsilon$, $\kappa = \text{const} > 0$.

Полные сведения в этом направлении можно получить для ДАУ вида (1) с постоянными матрицами коэффициентов

$$\Lambda_k x := A_k x^{(k)}(t) + A_{k-1} x^{(k-1)}(t) + \ldots + A_0 x(t) = f(t), \quad t \in T, \quad f(t) \in \mathbf{C}^{nk}(T). \qquad (13)$$

Поставим в соответствие ДАУ λ-матрицу $\mathcal{A}(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0$.

Теорема 2. *Пусть в ДАУ (13): 1) $\det \mathcal{A}_k = 0$; 2) λ-матрица $\mathcal{A}(\lambda)$ регулярна: существует число λ_0 такое, что $\det \mathcal{A}(\lambda_0) \neq 0$.*

Тогда:

1) для системы (13) определено решение типа Коши в виде (5), где $d = \deg \det \mathcal{A}(\lambda)$;

2) для системы (13) определен ЛРО с постоянными матрицами коэффициентов, где а) если $nk - d$ кратно $n - r$, то индекс ДАУ $l = (nk - d)/(n - r)$, $r = \operatorname{rank} A_k$, б) если $nk - d$ не кратно $n - r$, то $l = [(nk - d)/(n - r)] + 1$;

3) неравенство $l \leq k$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено „доминантное свойство" $d \geq kr$ (при $k = 1$ это критерий „ранг-степень");

4) в формуле (9) ядро интегрального оператора $K(t,s) = K(t-s)$, $C_j(t) = C_j$ — постоянные матрицы, причем справедливы оценки

$$\|\mathrm{d}_{k-1}[X_d(t)]\| \leq \kappa e^{(\gamma_* + \varepsilon)t}, \quad \|K(t-s)\| \leq \kappa_1 e^{[\gamma_* + \varepsilon](t-s)},$$

где κ, κ_1 — некоторые положительные константы, ε — произвольно малое число, γ_* — максимальная вещественная часть корней уравнения $\det \mathcal{A}(\lambda) = 0$, нормы матриц согласованы с нормой вектора $\|.\|_I$.

Первый пункт теоремы доказан в [12]. Второй и третий пункты теоремы доказаны в [26]. Последний пункт следует из представления любого решения однородной системы (13) в виде суммы функций $\mu_j(t)e^{\lambda_j t}$, $j = \overline{1, d}$, где λ_j — корни уравнения $\det \mathcal{A}(\lambda) = 0$, $\mu_j(t)$ — многочлены с постоянными коэффициентами степени не выше kn.

Приведем усиление утверждения из [14], основанное на обобщении критерия „ранг-степень” для многопараметрических пучков матриц.

Теорема 3. *Пусть для системы (1) выполнены условия:*

1) $A_k(t), A_{k-1}(t), \ldots, A_0(t), f(t) \in \mathbf{C}^k(T)$;

2) $\mathbf{r}[A_k(t)] = r_k < n$, $\mathbf{r}[(A_k(t)|A_{k-1}(t))] = r_k + r_{k-1} < n, \ldots \mathbf{r}[(A_k(t)|A_{k-1}(t)|\ldots$ $\ldots|A_{k-j}(t))] = r_k + r_{k-1} + \ldots + r_{k-j}$;

3) $\det[\lambda_k A_k(t) + \lambda_{k-1}A_{k-1}(t) + \ldots + A_{k-j}(t)] = \det \mathcal{A}_k(t, \lambda_k, \lambda_{k-1}, \ldots, \lambda_{k-j+1}) = \mathbf{a}_0(t)\lambda_k^{r_k}\lambda_{k-1}^{r_{k-1}}\ldots\lambda_{k-j+1}^{r_{k-j+1}} + \ldots$, $\mathbf{a}_0(t) \neq 0$ $\forall t \in T$, *где* $\lambda_k, \lambda_{k-1}, \ldots, \lambda_{k-j+1}$ *— скалярные параметры (в общем случае комплексные). Тогда для системы (1) существует ЛРО и* $l = j \leq k$.

Параметр из формулы (5) $d = kr_k + (k-1)r_{k-1} + \ldots + (k-j)r_{k-j}$.

Доказательство. Зафиксируем параметры $\lambda^*_{k-1}, \ldots, \lambda^*_{k-j+1}$ при ненулевых значениях. В силу леммы 1 пучок матриц $\mathcal{A}_k(t, \lambda_k, \lambda^*_{k-1}, \ldots, \lambda^*_{k-j+1})$ удовлетворяет критерию „ранг-степень” на T и $\operatorname{rank} A_k(t) = r_k$ $\forall t \in T$. Следовательно, найдутся неособенные матрицы $P_k(t), Q_k(t) \in \mathbf{C}^k(T)$ такие, что

$$P_k\mathcal{A}_k(t, \lambda_k, \lambda_{k-1}, \ldots, \lambda_{k-j+1})Q_k = \lambda_k \begin{pmatrix} E_{r_k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_{k-1} \begin{pmatrix} A_{k-1,11} & A_{k-1,12} \\ A_{k-1,21} & A_{k-1,22} \end{pmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{pmatrix} A_{k-j,11} & A_{k-j,12} \\ A_{k-j,21} & A_{k-j,22} \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Тогда по лемме 2 и в силу условия 2 настоящей теоремы имеем

$$\det\ P_k\mathcal{A}_k(t, \lambda_k, \lambda_{k-1}, \ldots, \lambda_{k-j+1})Q_k = \det[P_k(t)Q_k(t)]\lambda_k^{r_k} \det\ L_4(t, \lambda_{k-1}, \ldots, \lambda_{k-j+1}),$$

$$L_4(t, \lambda_{k-1}, \ldots, \lambda_{k-j+1}) = [\lambda_{k-1}A_{k-1,22}(t) + \lambda_{k-2}A_{k-2,22}(t) + \ldots + A_{k-j,22}(t)]\,.$$

Зафиксируем параметры $\lambda^*_{k-2}, \ldots, \lambda^*_{k-j+1}$ при ненулевых значениях. В силу третьего условия теоремы пучок матриц $L_4(t, \lambda_{k-1}, \lambda^*_{k-2}, \ldots, \lambda^*_{k-j+1})$ удовлетворяет критерию „ранг-степень” на T и $\operatorname{rank} A_{k-1,22}(t) = r_{k-1}$ $\forall t \in T$. Следовательно, найдутся неособенные матрицы $P_{k-1}(t)$, $Q_{k-1}(t) \in \mathbf{C}^k(T)$ со свойством

$$P_{k-1}L_4(t, \lambda_{k-1}, \ldots, \lambda_{k-j+1})Q_{k-1} = \lambda_{k-1} \begin{pmatrix} E_{r_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_{k-2} \begin{pmatrix} A^1_{k-2,11} & A^1_{k-2,12} \\ A^1_{k-2,21} & A^1_{k-2,22} \end{pmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{pmatrix} A^1_{k-j,11} & A^1_{k-j,12} \\ A^1_{k-j,21} & A^1_{k-j,22} \end{pmatrix}.$$

Итак, умножая справа и слева на матрицы $\operatorname{diag}\{E_{r_k}, P_{k-1}\}P_k$, $Q_k\operatorname{diag}\{E_{r_k}, Q_{k-1}\}$ исходный пучок матриц, приводим его к виду

$$\lambda_k \begin{pmatrix} E_{r_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_{k-1} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{k-1,11} & \tilde{A}_{k-1,12} & \tilde{A}_{k-1,13} \\ \tilde{A}_{k-1,21} & E_{r_{k-1}} & 0 \\ \tilde{A}_{k-1,31} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_{k-2}\tilde{A}_{k-2} + \ldots + \tilde{A}_{k-j}. \qquad (15)$$

Здесь $\tilde{A}_{k-1,31} \equiv 0$, $t \in T$. Если $\tilde{A}_{k-1,31}(t_0) \neq 0$, $t_0 \in T$, то в точке t_0 нарушается условие 2 теоремы: $\max\ \operatorname{rank}(A_k(t_0)|A_{k-1}(t_0)) > r_k + r_{k-1}$. Умножая второй столбец в пучке (15) на блок $\tilde{A}_{k-1,21}$ и вычитая из первого столбца, мы обращаем этот блок в нуль. Преобразование к такому виду достигается умножением слева на матрицу $Q_k \mathrm{diag}\,\{E_{r_k}, Q_{k-1}\}\tilde{Q}$, где матрица $\tilde{Q}$ соответствует преобразованию, обращающему блок $\tilde{A}_{k-1,21}$ в нуль.

Процесс можно продолжить, так как блок

$$L_4^1(t, \lambda_{k-2}, \lambda_{k-3}, \ldots, \lambda_{k-j+1}) = \lambda_{k-2}\tilde{A}^1_{k-2,33} + \lambda_{k-3}\tilde{A}^1_{k-3,33} + \ldots + \tilde{A}^1_{k-j,33}$$

удовлетворяет критерию „ранг-степень” на T и т. д. Произведения матриц преобразований слева и справа являются неособенными на T матрицами $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbf{C}^k(T)$.

Вернемся к системе (1). Умножая систему на матрицу $\mathcal{P}$ и производя замену $x = \mathcal{Q}y$, получаем в общем случае набор подсистем вида

$$y_1^{(k)} + R_{k-1,1}y^{(k-1)} + \ldots + R_{0,1}y = f_1, \ldots, y_j^{(j)} + R_{k-j-1,j}y^{(j-1)} + \ldots + R_{0,j}y = f_j, \quad t \in T,$$

где

$$y^\top = \begin{pmatrix} y_1^\top & y_2^\top, \ldots & y_j^\top \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} f_1^\top & f_2^\top, \ldots & f_j^\top \end{pmatrix}^\top = \mathcal{P}f.$$

При заменах переменных следует учитывать такой факт: например, на первом шаге процесса матрицы $P_k A_k Q_k^{(j)}$, $j = \overline{0,k}$, имеют $n - r_k$ нулевых строк, причем эта замена не меняет остальных уравнений (15), и т. д. В качестве ЛРО можно взять оператор

$$\mathrm{diag}\,\{E_{r_k}, (d/dt)E_{r_{k-1}}, \ldots, (d/dt)^j E_{r_{k-j}}\}\mathcal{P}.$$

Формула для определения параметра d очевидна.

Теорема 3 доказана.

При доказательстве теоремы мы неявно предполагали, что в условии $r_i \geq 1$, $i = \overline{k-1, k-j-1}$. Доказательство усложняется, но теорема остается справедливой при допущении, что некоторые $r_i = 0$.

Пример 3. Система (1) имеет индекс j, если

$$\mathbf{r}[A_k(t)] = r_k < n, \ldots, \mathbf{r}[(A_k(t)|A_{k-1}(t)|\ldots|A_{k-j}(t))] = n, \quad r_i = 0, \quad i = \overline{k-1, k-j-1},$$

$$\det(\lambda_k A_k(t) + \lambda_{k-1}A_{k-1}(t) + \ldots + A_{k-j}(t)) = \mathbf{a}_0(t)\lambda_k^{r_k} + \ldots, \quad \mathbf{a}_0(t) \neq 0 \ \forall t \in T.$$

Пример 4. Пусть

$$\Lambda_2 x := \begin{pmatrix} 1-\mathrm{s}(t) & \mathrm{c}(t) & \mathrm{c}(t) \\ \mathrm{c}(t) & 1+\mathrm{s}(t) & 1+\mathrm{s}(t) \\ \mathrm{c}(t) & 1+\mathrm{s}(t) & 1+\mathrm{s}(t) \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & \mathrm{c}(t) \\ 0 & \gamma(t) & 1+\mathrm{s}(t) \\ \gamma(t)\mathrm{c}(t) & \gamma(t)\mathrm{s}(t) & 1+\mathrm{s}(t) \end{pmatrix} \dot{x} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \mathrm{s}(t) & \mathrm{c}(t) & \mathrm{s}(t) \\ -\mathrm{c}(t) & 1+\mathrm{s}(t) & 1-\mathrm{s}(t) \\ 0 & \mathrm{s}(t) & 2 \end{pmatrix} x = f(t), \quad t \in T,$$

где $\mathrm{s}(t) = \sin g(t)$, $\mathrm{c}(t) = \cos g(t)$, $g(t), \gamma(t)$ — произвольные функции из $\mathbf{C}^3(T)$.

Проверяем условия теоремы 3: $\mathbf{r}[A_2(t)] = 1$, $\mathbf{r}[(A_2(t)|A_1(t))] = 2$,

$$\mathbf{r}[(A_2(t)|A_1(t)|A_0(t))] = 3, \quad \det\,[\lambda_2 A_2(t) + \lambda_1 A_1(t) + A_0(t)] = 2\gamma(t)\lambda_2\lambda_1 + \ldots.$$

Итак, ДАУ имеет индекс 2 при $\gamma(t) \neq 0 \; \forall t \in T$, разрешима при любой $f(t) \in \mathbf{C}^3(T)$ и ее общее решение описывается формулами (5), (9), где параметр $d = 3$. В варианте утверждения из [14] требуется проверять постоянство ранга составных матриц, но для нашего примера надо приложить определенные усилия, чтобы доказать этот факт: миноры, „несущие ранг", могут двигаться по всей матрице при $t \in [0, 1]$.

При аналитических входных данных, выполнении условия 2 и невыполнении в отдельных точках условия 3 теоремы 3 все эти точки $t_j : \mathbf{a}_0(t_j) = 0, t_j \in T$, являются особыми (в частности, это точки перемены ранга матрицы $A_k(t)$). В примере 4 это точки, в которых $\gamma(t_j) = 0$.

Пример 5. Постоянство ранга матрицы $A_k(t)$, $t \in T$, не гарантирует отсутствия на отрезке T особых точек. Рассмотрим два ДАУ с конечномерным ПР:

$$\begin{pmatrix} t(1+e^t) & 0 \\ te^t & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 1+e^t & 1 \\ e^t & 1 \end{pmatrix} x = 0, \quad \begin{pmatrix} t & 0 \\ e^t t & 0 \end{pmatrix} \dot{y} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -e^t & e^t(t-1) \end{pmatrix} y = 0, \quad t \in T.$$

Здесь в первом случае особая точка $t_1 = 0$, а во втором особыми точками являются $t_1 = 0, t_2 = 1$. Коэффициенты многочленов $\det \mathcal{A}_1(t, \lambda_1)$ соответственно имеют вид

$$\mathbf{a}_{0,1}(t) = t, \quad \mathbf{a}_{0,2}(t) = -e^t t(t-1).$$

Общие решения ДАУ таковы: $x(t,c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^\top$, $y(t,c) = \begin{pmatrix} t & 0 \end{pmatrix}^\top c$, $c \in \mathbf{R}^1$. Вырезание особой точки из отрезка интегрирования может менять размерность ПР системы: $x(t,c) = \begin{pmatrix} 1/t & 0 \end{pmatrix}^\top c$, $t \in T_\varepsilon = [\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$. Во второй системе при $t \in T_\varepsilon$ $\operatorname{rank} A_1(t) = \operatorname{const}$, но на T_ε имеется особая точка $t_2 = 1$.

ДАУ, удовлетворяющие теореме 1, имеют важное свойство. Если через точку ($\gamma \in T, x^{(j)}(\gamma) = a_j, j = \overline{0, k-1}$), где a_j — заданные векторы из $\mathbf{R}^n$, проходит решение, то только одно, так как $\operatorname{rank} \mathrm{d}_{k-1}[X_d(\gamma)] = d \; \forall \gamma \in T$. Вторая система в примере 5 имеет бесконечное число решений, проходящих через точку $y(0) = 0$.

5. Применение теории интегро-алгебраических уравнений и вычислительные аспекты определения индекса. Один из способов вычисления индекса ДАУ связан с использованием свойств уравнений вида

$$(\Lambda_0 + V)z := A(t)z(t) + \int_0^t K(t,s)z(s)ds = f(t), \quad \det A(t) \equiv 0, \quad t \in T, \tag{16}$$

где $A(t)$, $K(t,s)$ — $(n \times n)$-матрицы, $z(t)$ и $f(t)$ — искомая и известная вектор-функции соответственно. Системы (16) принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ).

Определение 9. *Если существует оператор*

$$\Omega_l = \sum_{j=0}^{l} L_j(t)(d/d)^j,$$

где $L_j(t)$ — $(n \times n)$-матрицы из $\mathbf{C}(T)$, имеющий свойство

$$\Omega_l \circ (\Lambda_0 + V)y = \tilde{A}(t)z(t) + \int_0^t \Omega_l[K(t,s)]z(s)ds \quad \forall z(t) \in \mathbf{C}^l(T),$$

где $\tilde{A}(t)$ *— некоторая* $(n \times n)$*-матрица из* $\mathbf{C}(T)$, $\det \tilde{A}(t) \neq 0\ \forall t \in T$, *то он называется левым регуляризирующим оператором (ЛРО) для системы (16), а наименьшее возможное* l *— ее индексом.*

Определение 10. *Совокупность системы (16) и ее производных до порядка* i *включительно:* $\mathrm{d}_i[(\Lambda_0 + V)y - f] = 0$, $t \in T$, *где* $\mathrm{d}_i[.]$ *— оператор из формул (3), называется* i*-продолженной системой (16).*

Формулы (4) позволяют i-продолженную систему (16) записать в виде соотношения

$$\Gamma_i[A, K](t)\mathrm{d}_i[x] + \int\limits_0^t \mathrm{d}_i[K(t,s)]z(s)ds = \mathrm{d}_i[f(t)], \quad t \in T, \tag{17}$$

где $\Gamma_i[A, K](t)$ — блочно-треугольная $[(i+1)n \times (i+1)n]$-матрица с блоками в виде матрицы $A(t)$ на диагонали. Остальные элементы являются линейными комбинациями производных матриц $A(t)$, $K(t,t)$ с множителями в виде биномиальных коэффициентов.

Лемма 7 [27]. *Если, начиная с некоторого* $i = l$, *справедливы равенства*

$$\operatorname{rank} \Gamma_i[A, K](t) = \mathrm{const}, \quad \Gamma_i^+[A, K](t)\Gamma_i[A, K](t) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & Z_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где $Z_{22}(t)$ *— некоторый блок подходящей размерности, то* l *равно индексу системы (1), причем первые* n *строк матрицы* $\Gamma_l^+[A, K](t)$*, разбитые на* $(n \times n)$*-блоки, можно принять в качестве коэффициентов ЛРО.*

Интегрируя k раз систему (1), получаем систему интегральных уравнений вида

$$A_k(t)x(t) + \int\limits_0^t \left[\sum_{j=0}^{k-1}(t-s)^j W_j(s)\right] x(s)ds = \int\limits_0^t (t-s)^{k-1} f(s)ds + \sum_{j=0}^{k-1} t^j c_j, \quad t \in T, \tag{18}$$

где $W_j(s)$ — линейные комбинации матриц $A_k(t), A_{k-1}(t), \ldots, A_0(t)$ и их производных, c_j — некоторые постоянные векторы. В силу перестановочности операций дифференцирования и интегрирования индексы систем (1) и (18) совпадают.

Для примера запишем систему вида (18) для ДАУ (1) при $k = 2$. Имеем

$$A_2(t)x(t) + \int\limits_0^t [W_0(s) + (t-s)W_1(s)]\, x(s)ds = \int\limits_0^t (t-s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{1} t^j c_j, \quad t \in T, \tag{19}$$

где $W_0(s) = A_1(s) - 2\dot{A}_2(s)$, $W_1(s) = A_0(s) - \dot{A}_1(s) + \ddot{A}_2(s)$, $c_0 = A_2(0)x(0)$, $c_1 = A_2(0)\dot{x}(0) + [A_1(0) - \dot{A}_2(0)]x(0)$. Рассмотрим матрицы

$$\Gamma_2[A, K](t) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ A_1 - \dot{A}_2 & A_2 & 0 \\ A_0 & A_1 & A_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2[\mathbf{A}(t)] = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ A_1 + \dot{A}_2 & A_2 & 0 \\ A_0 + \dot{A}_1 + \ddot{A}_2 & A_1 + 2\dot{A}_2 & A_2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Матрицы (20) соответствуют системам (19) и (1) при $k = 2$. Итак, переход к ИАУ уменьшает количество производных входных данных, необходимое для вычисления индекса ДАУ.

Малые возмущения входных данных, возникающие, например, при применении разностных аппроксимаций для вычисления производных в матрицах из лемм 5, 7 или из-за ошибок округления, могут сильно искажать результат вычислений.

Пример 6. Система $N\dot{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix} x = f(t)$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеет индекс 2, если $\delta = 0 : \Omega_2 = (d/dt)E_2 - (d/dt)^2 N$. Если $\delta \neq 0$, то индекс равен 1: $\Omega_1 = \operatorname{diag}\{1, d/dt\}$.

Пример 7. Для матрицы $A_\delta = \operatorname{diag}\{1, \delta\}$ имеют место соотношения

$$A_\delta^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\delta \end{pmatrix}, \ \delta \neq 0, \ \left\|A_\delta^+\right\| \to \infty, \ \delta \to 0, \ A_0^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому нужно указать методы приближенного вычисления, позволяющие построить регуляризирующие алгоритмы. Построение этих алгоритмов часто базируется на параметризации исходной задачи. Начнем с анализа методов вычисления произведений матриц из лемм 5, 7.

Лемма 8. *Если выполняется неравенство* $\left\|A - \tilde{A}\right\| \leq \varepsilon$, *где* A *и* $\tilde{A}$ *— некоторые* $(\nu \times \times n)$*-матрицы и* $\operatorname{rank} A < \min\{\nu, n\}$, *то, начиная с некоторых значений положительных параметров* ε, τ, *справедлива оценка*

$$\left\|A^+A - \tilde{G}(\tau)\right\| \leq \tilde{\kappa}_0\tau + \tilde{\kappa}_1\varepsilon/\tau^2,$$

где $\tilde{G}(\tau) = (\tau E_n + \tilde{A}^\top \tilde{A})^{-1}\tilde{A}^\top \tilde{A}, \tilde{\kappa}_0, \tilde{\kappa}_1 = \mathrm{const} > 0$.

Доказательство. Неравенство треугольника позволяет записать

$$\left\|A^+A - \tilde{G}(\tau)\right\| = \left\|A^+A - G(\tau) + G(\tau) - \tilde{G}(\tau)\right\| \leq \left\|A^+A - G(\tau)\right\| + \left\|G(\tau) - \tilde{G}(\tau)\right\|. \quad (21)$$

Для неособенной матрицы M имеет место оценка

$$\left\|M^{-1} - \tilde{M}^{-1}\right\| / \left\|M^{-1}\right\| \leq \varepsilon \operatorname{cond}(M)/(1 - \varepsilon \operatorname{cond}(M)). \quad (22)$$

где число $\operatorname{cond}(M) = \|M\| \left\|M^{-1}\right\|$ называется обусловленностью матрицы M.

Согласно [3], для первого слагаемого в сумме (21) имеем $\|A^+A - G(\tau)\| \leq \kappa_0\tau$. Далее, из определения числа обусловленности следует, что $\operatorname{cond}(\tau E_n + \tilde{A}^\top \tilde{A}) = O(1/\tau)$. Тогда при достаточно малом ε, применяя формулу (22), получаем соотношение

$$\left\|G(\tau) - \tilde{G}(\tau)\right\| = O\left(\varepsilon/\tau^2\right).$$

Лемма 8 доказана.

Из леммы 8 следует, что, связывая параметр регуляризации τ с уровнем возмущений входных данных по правилу $\tau = \kappa\varepsilon^{1/3}$, $\kappa = \mathrm{const} > 0$, получаем неравенство

$$\left\|A^+A - \tilde{G}(\tau)\right\| \leq (\tilde{\kappa}_0 + \tilde{\kappa}_1)\kappa\varepsilon^{1/3}.$$

Способы решения неустойчивых задач линейной алгебры с учетом входных погрешностей можно найти, в частности, в [28].

Для вычисления индекса ДАУ (13) можно использовать такое утверждение.

Лемма 9. *Пусть λ-матрица $\mathcal{A}(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0$ регулярна. Тогда справедливо соотношение*

$$g(m\tau)/g(\tau) = m^l + O(\tau), \quad \tau \to 0, \tag{23}$$

где l — индекс системы (13),

$$g(\tau) = \left\| \left(A_k + \tau A_{k-1} + \ldots + \tau^{k-1} A_1 + \tau^k A_0 \right)^{-1} \right\|,$$

m — натуральное число (больше единицы).

Лемма доказана в работе [5] для ДАУ $\bar{A}\dot{x} + \bar{B}x = f(t)$, где $g(\tau) = \left\| \left(\bar{A} + \tau\bar{B} \right)^{-1} \right\|$, $\chi = l$. В рассматриваемом случае переходим от ДАУ (13) к ДАУ (10) и применяем уже известный результат. При наличии входных возмущений можно указать связь параметра регуляризации τ с уровнем возмущений входных данных по правилу $\tau = \kappa\varepsilon^{1/(l+1)}$ [29].

На практике задаем некоторое m и вычисляем при $\tau \to 0$ соотношение (23) до тех пор, пока не начнут существенно сказываться ошибки округления и входные возмущения (см., например, [28]), после чего делаем заключение о величине индекса системы (13).

Литература

1. *Ушаков Е. И.* Статическая устойчивость электрических систем. — Новосибирск: Наука, 1988. – 271 с.
2. *Влах И., Сингхал К.* Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. — М.: Радио и связь, 1988. — 560 с.
3. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980. — 224 с.
4. *Brenan K. E., Campbell S. L. Petzold L. R.* Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations // Classics Appl. Math. — 1996. — **14**. — 314 p.
5. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск: Наука, 1996. — 278 с.
6. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. — Днепропетровск: Систем. технологии, 2006. — 274 с.
7. *Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.
8. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений. — Новосибирск: Наука, 1996. — 261 с.
9. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ.: Вища шк., 2000. — 294 с.
10. *Kunkel P., Mehrmann V.* Differential-algebraic equations. Analysis and numerical solution. — Zúrich, Switzerland: EMS Publ. House, 2006. — 377 p.
11. *Lamour R., Marz R., Tischendorf C.* Differential-algebraic equations: a projector based analysis. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. — 676 p.
12. *Лузин Н. Н.* К изучению матричной системы теории дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. — 1940. — № 5. — С. 4 – 66.

13. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром // Алгебро-дифференциальные системы и методы их решения: сб. науч. трудов. — Новосибирск: Наука, 1993. — 93 с.
14. *Bulatov M. V., Ming-Gong Lee.* Application of matrix polynomials to the analysis of linear differential-algebraic equations // Different. Equat. — 2008. — **44**, № 10. — P. 1353 – 1360.
15. *Pafyk S. P., Yakovets' V. P.* On the structure of the general solution and conditions of solvability of the Cauchy problem for degenerate linear systems of higher-order differential equations // Ukr. Math. J. — 2011. — **65**, № 2. — P. 328 – 340.
16. *Mehrmann V., Chunchao Shi.* Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order // Numer. Algorithms. — 2006. — **42**. — P. 281 – 307.
17. *Чистяков В. Ф.* Об одной теореме существования решений у сингулярных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Численные методы механики сплошной среды. — 1981. — **12**, № 6. — С. 135 – 149.
18. *Булатов М. В., Чистяков В. Ф.* Один метод численного решения линейных сингулярных систем ОДУ индекса выше единицы // Численные методы анализа и их приложения. — Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1987. — С. 100 – 105.
19. *Чистяков В. Ф.* О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. — Новосибирск: Наука, 1987. — С. 231 – 239.
20. *Чистяков В. Ф.* О связи свойств вырожденных систем и задач вариационного исчисления. — Иркутск, 1989. — 29 с. — (Препринт / ИрВЦ СО АН СССР; № 5).
21. *Silverman L. M., Bucy R. S.* Generalizations of theorem of Dolezal // Math. System Theory. — 1970. — **4**. — P. 334 – 339.
22. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. — Новосибирск: Наука, 1984. — 272 с.
23. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
24. *Чистяков В. Ф.* О связи структуры пучка матриц с существованием решений неявной системы ОДУ // Методы оптимизации и исследования операций. — Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1984. — С. 194 – 202.
25. *Campbell S. L.* Non-BDF methods for the solution of linear time varying implicit differential equations // Proc. Amer. Contr. Conf., San Diego, Calif., 5 – 6 June, 1984. — **3**. — P. 1315 – 1318.
26. *Bulatov M. V., Chistyakov V. F.* The properties of differential-algebraic systems and their integral analogs. — 1997. — 36 p. — (Preprint / Mem. Univ. Newfoundland).
27. *Чистяков В. Ф.* О разрешимости систем интегральных уравнений Вольтерра 4 рода. I // Дифференц. уравнения. — 2002. — **38**, № 5. — С. 698 – 707.
28. *Годунов С. К. Антонов А. Г., Кирилюк О. П., Костин В.И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. — Новосибирск: Наука, 1988. — 456 с.
29. *Бормотова О. В., Чистяков В. Ф.* О методах численного решения и исследования систем не типа Коши – Ковалевской // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2004. — **44**, № 8. — С. 1380 – 1387.

Получено 20.08.16,
после доработки — 14.02.17