УДК 517.935;681.5

СТАБІЛІЗАЦІЯ ТА ГАСІННЯ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ У ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

С. М. Кусій

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
e-mail: sergii.kusii@gmail.com

Necessary and sufficient conditions for static output feedback stabilization of linear discrete-time systems are obtained in the form of a matrix inequality. It is shown that the arising stabilization algorithms are applicable to a certain class of nonlinear discrete-time control systems. Methods for constructing controls that provide a specified evaluation of the weighted damping level of the input signals and initial perturbations as well as robust stability of the equilibrium state of the control system are proposed. A numerical example of the discrete-time stabilization system of a pendulum on a movable platform is given.

В терминах матричных неравенств сформулированы необходимые и достаточные условия стабилизируемости по выходу линейных дискретных систем управления. Показано, что вытекающий из них алгоритм стабилизации применим для некоторого класса нелинейных дискретных систем управления. Предложена методика построения законов управления, обеспечивающих заданную оценку взвешенного уровня гашения входных сигналов и начальных возмущений, а также робастную устойчивость состояния равновесия управляемой системы. Приведен численный пример дискретной системы стабилизации маятника на подвижной платформе.

1. Вступ. Однією з основних проблем теорії керування є необхідність побудови статичних або динамічних регуляторів, що забезпечують робастну стійкість станів рівноваги та зниження впливу зовнішніх збурень на динаміку керованих об'єктів. Вказані якості системам керування надають методи теорії H_∞-оптимізації (див., наприклад, [1–7]), а також методи інваріантних еліпсоїдів [8]. Задачі стабілізації навіть для класів лінійних систем за умов неповної інформації про їхній стан недостатньо вивчені і розв'язані лише при додаткових обмеженнях [9].

При дослідженні складних динамічних об'єктів широко використовуються математичні моделі руху та системи керування як з неперервним, так і з дискретним часом. На практиці дискретні моделі систем керування мають певні переваги порівняно з неперервними. Зокрема, застосування різницевих рівнянь руху не вимагає дослідження математичних проблем існування та єдиності розв'язків. Різницеві системи є досить придатними для їх безпосередньої реалізації програмними засобами на сучасних комп'ютерах.

Слід зазначити, що практичне застосування багатьох методів синтезу неперервних та дискретних систем керування базується на розв'язуванні лінійних матричних нерівностей (ЛМН). Для цього створені достатньо ефективні засоби LMI Toolbox комп'ютерної системи Matlab [10].

Будемо використовувати такі позначення:

$\mathbb{R}^{n\times m}$ — простір дійсних матриць розміру $n\times m$;

I_n — одинична матриця порядку n;

$0_{n\times m}$ — нульова матриця розміру $n\times m$;

© С. М. Кусій, 2017

$X = X^T > 0\ (\geq 0)$ — симетрична додатно (невід'ємно) визначена матриця X;

$\mathrm{i}(X) = \{\mathrm{i}_+(X), \mathrm{i}_-(X), \mathrm{i}_0(X)\}$ — інерція симетричної матриці X, яку утворюють кількості її додатних, від'ємних і нульових власних значень, враховуючи кратності;

$\det A$, $\sigma(A)$ і $\rho(A)$ — відповідно детермінант, спектр і спектральний радіус матриці A;

W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра $\operatorname{Ker} A$ матриці A;

$\|x\|$ — евклідова норма вектора x;

$\|x\|_Q$ — зважена l_2-норма векторної послідовності x_t, $t = 0, 1, \ldots$.

2. Допоміжні твердження. При дослідженні блочно-матричних співвідношень використовуються методи зниження розмірності, зокрема формула Фробеніуса, лема Шура та ін. [11]. Наведемо відомі формули для індексів інерції симетричної блочної матриці

$$M = \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix}, \quad A = A^T, \quad C = C^T.$$

Лема 1. *Якщо* $\det\ A \neq 0$, *то*

$$\mathrm{i}_\pm(M) = \mathrm{i}_\pm(A) + \mathrm{i}_\pm(C - BA^{-1}B^T). \tag{1}$$

Аналогічно, якщо $\det\ C \neq 0$, *то*

$$\mathrm{i}_\pm(M) = \mathrm{i}_\pm(C) + \mathrm{i}_\pm(A - B^TC^{-1}B), \tag{2}$$

Із формул (1) та (2) випливають відповідні критерії додатної (невід'ємної) визначеності блочної матриці M (лема Шура):

$$M > 0(\geq 0) \Longleftrightarrow A > 0, \quad C - BA^{-1}B^T > 0(\geq 0), \tag{3}$$

$$M > 0(\geq 0) \Longleftrightarrow C > 0, \quad A - B^TC^{-1}B > 0(\geq 0). \tag{4}$$

Узагальнення даних формул на випадок вироджених діагональних блоків матриці M наведено в [5].

У теорії стабілізації лінійних систем використовується таке твердження [7].

Лема 2. *Лінійна матрична нерівність*

$$L^TKR + R^TK^TL < S, \tag{5}$$

де L, R *і* $S = S^T$ *— задані матриці відповідних розмірів* $p \times n$, $q \times n$ *і* $n \times n$, *має розв'язок* $K \in \mathbb{R}^{p\times q}$ *тоді і лише тоді, коли виконується одна з умов:*

(a) $\operatorname{rank} L = n$, $\operatorname{rank} R = n$*;*

(b) $\operatorname{rank} L < n$, $\operatorname{rank} R = n$, $W_L^TSW_L > 0$*;*

(c) $\operatorname{rank} L = n$, $\operatorname{rank} R < n$, $W_R^TSW_R > 0$*;*

(d) $\operatorname{rank} L < n$, $\operatorname{rank} R < n$, $W_L^TSW_L > 0$, $W_R^TSW_R > 0$.

Тут W_L *і* W_R *— матриці, стовпці яких складають базиси відповідних ядер* $\operatorname{Ker} L$ *і* $\operatorname{Ker} R$.

У [12] за умов леми 2 наведено загальний розв'язок матричної нерівності (5) в параметричній формі.

3. Статичний регулятор по вимірюваному виходу. Розглянемо нелінійну систему керування

$$x_{t+1} = A(x_t)x_t + B(x_t)u_t, \quad y_t = C(x_t)x_t + D(x_t)u_t, \tag{6}$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування і вимірюваного виходу системи, а $A(x_t)$, $B(x_t)$, $C(x_t)$ і $D(x_t)$ — матриці відповідних розмірів, неперервно залежні від x_t в деякому околі $\mathcal{S}_0 = \{x\colon \|x\| \le h\}$ точки $x = 0$, $t \in \mathcal{T} = \{0, 1, \ldots\}$.

Припустимо, що $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} C = l$ і разом із (6) розглянемо лінійну систему

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t + Du_t, \tag{7}$$

де $A = A(0)$, $B = B(0)$, $C = C(0)$ і $D = D(0)$. Позначимо через $B^\perp$ і $C^\perp$ ортогональні доповнення відповідних матриць B і C, які визначаються співвідношеннями

$$B^T B^\perp = 0, \quad \det\left[B, B^\perp\right] \ne 0, \quad C^\perp C^T = 0, \quad \det\left[C^T, C^{\perp T}\right] \ne 0.$$

Сформулюємо умови стабілізації нульового стану рівноваги систем (6) і (7) за допомогою статичних регуляторів

$$u_t = Ky_t, \quad K \in \mathcal{K}_D, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{8}$$

де $\mathcal{K}_D = \left\{K \in \mathbb{R}^{m\times l}\colon \det(I_m - KD) \ne 0\right\}$. Замкнена система (7), (8) має вигляд

$$x_{t+1} = Mx_t, \quad M = A + B\mathbf{D}(K)C, \tag{9}$$

де $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$ — нелінійний оператор у просторі матриць $\mathbb{R}^{m\times l}$.

Систему (9) будемо називати *ρ-стійкою*, якщо її спектр $\sigma(M)$ розміщений всередині круга $\{\lambda\colon |\lambda| < \rho\}$, де $0 < \rho \le 1$. *Спектральний запас* стійкості ρ-стійкої системи $\alpha \ge 1 - \rho$.

Теорема 1. *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) існує статичний регулятор (8), що забезпечує ρ-стійкість замкненої системи (9);

2) існує матриця $X = X^T > 0$, що задовольняє співвідношення

$$B^{\perp T}\left(AXA^T - \rho^2 X\right) B^\perp < 0, \tag{10}$$

$$AXA^T - \rho^2 X < AXC^T\left(CXC^T\right)^{-1} CXA^T; \tag{11}$$

3) існують взаємно обернені матриці $X = X^T > 0$ і $Y = Y^T > 0$, що задовольняють співвідношення (10) і

$$C^\perp\left(A^T YA - \rho^2 Y\right) C^{\perp T} < 0. \tag{12}$$

Якщо виконується одне із тверджень 2 або 3, то регулятор

$$u_t = Ky_t, \quad K = -\mathbf{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{13}$$

де K_0 — довільний розв'язок ЛМН

$$P^T K_0 Q + Q^T K_0^T P < F, \tag{14}$$

$$P = \left[-B^T, 0_{m\times n}\right], \quad Q = [0_{l\times n}, CX], \quad F = \begin{bmatrix} \rho^2 X & AX \\ XA^T & X \end{bmatrix},$$

забезпечує ρ-стійкість замкненої системи (9).

Доведення. Оскільки $\mathbf{D}(K) = K_0$, то за теоремою Ляпунова критерієм досягнення ρ-стійкості системи (9) є існування розв'язку $X = X^T > 0$ матричної нерівності

$$Y_0 = (A + BK_0C)X(A + BK_0C)^T - \rho^2 X < 0, \tag{15}$$

яка на основі конгруентного перетворення

$$\begin{bmatrix} B^+ \\ B^{\perp T} \end{bmatrix} Y_0 \left[B^{+T},\ B^{\perp}\right] = \begin{bmatrix} B^+ Y_0 B^{+T} & B^+ Y_0 B^{\perp} \\ B^{\perp T} Y_0 B^{+T} & S \end{bmatrix} < 0$$

зводиться до системи співвідношень (10) і

$$H_0 + K_0 H_1 + H_1^T K_0^T + K_0 H_2 K_0^T < 0, \tag{16}$$

де $H_0 = B^+(L - LRL)B^{+T}$, $H_1 = CXA^T(I_n - RL)B^{+T}$, $H_2 = C(X - XA^T RAX)C^T$, $L = AXA^T - \rho^2 X$, $R = B^{\perp}S^{-1}B^{\perp T}$, $S = B^{\perp T} L B^{\perp}$ [5]. При виконанні умови (10) критерієм існування матриці K_0, що задовольняє нерівність (16), є обмеження на інерцію блочної матриці H (див. доведення леми 3.1.1 і теореми 6.1.1 у [5]):

$$\mathrm{i}(H) = \left\{l, m, 0\right\}, \quad H = \begin{bmatrix} H_0 & H_1^T \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix}.$$

З іншого боку, $H = \widehat{H}_0 - \widehat{H}_1^T \widehat{H}_2^{-1} \widehat{H}_1$ і згідно з (2) $\mathrm{i}_\pm(\widehat{H}) = \mathrm{i}_\pm(S) + \mathrm{i}_\pm(H)$, де

$$\widehat{H} = \begin{bmatrix} \widehat{H}_0 & \widehat{H}_1^T \\ \widehat{H}_1 & \widehat{H}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} B^+ L B^{+T} & B^+ AXC^T & B^+ L B^{\perp} \\ CXA^T B^{+T} & CXC^T & CXA^T B^{\perp} \\ \hline B^{\perp T} L B^{+T} & B^{\perp T} AXC^T & S \end{array}\right] = V_1 \Delta V_1^T,$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} AXA^T - \rho^2 X & AXC^T \\ CXA^T & CXC^T \end{bmatrix}, \quad V_1^T = \begin{bmatrix} B^{+T} & 0 & B^{\perp} \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки V_1 — квадратна невироджена матриця, то $\mathrm{i}(\widehat{H}) = \mathrm{i}(\Delta) = \left\{l, n, 0\right\}$, що еквівалентно нерівності (11). Отже, твердження 1 і 2 еквівалентні.

Еквівалентність тверджень 2 і 3 випливає із рівностей $\mathrm{i}(\Delta) = \mathrm{i}(\Delta_1) = \mathrm{i}(\Delta_2)$, де

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^T & \rho^{-2} A^T Y A - Y \end{bmatrix},$$

$$\Delta_2 = \rho^2 V_2 \Delta_1 V_2^T = \left[\begin{array}{cc|c} C^{+T}ZC^{+} & \rho^2 I_l & C^{+T}ZC^{\perp T} \\ \rho^2 I_l & 0 & 0 \\ \hline C^{\perp}ZC^{+} & 0 & C^{\perp}ZC^{\perp T} \end{array}\right],$$

$$V_2^T = \begin{bmatrix} 0 & I_l & 0 \\ C^{+} & 0 & C^{\perp T} \end{bmatrix}, \quad \det V_2 \neq 0, \quad Z = A^T Y A - \rho^2 Y,$$

які є наслідком співвідношень (1) і (2).

Зазначимо, що еквівалентність тверджень 1 і 3 можна встановити безпосередньо, застосовуючи твердження (d) леми 2 до ЛМН (14) (див. також [12]):

$$W_P^T F W_P > 0, \quad W_Q^T F W_Q > 0, \quad W_P = \begin{bmatrix} B^{\perp} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \quad W_Q = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & YC^{\perp T} \end{bmatrix}.$$

При цьому шуканий регулятор можна побудувати на основі співвідношень (13), (14).

Теорему 1 доведено.

Сформулюємо достатні умови стабілізації стану рівноваги нелінійної системи (6).

Теорема 2. *Нехай виконується одне із тверджень 2 або 3 теореми 1 для лінійної системи (7). Тоді співвідношення (13) і (14) визначають статичний регулятор, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану $x_t \equiv 0$ та квадратичну функцію Ляпунова $v(x) = x^T X^{-1} x$ замкненої нелінійної системи (6), (13).*

Доведення. За теоремою 1 для замкненої лінійної системи (9) виконуються співвідношення

$$MXM^T - \rho^2 X < 0, \quad M^T Y M - Y < (\rho^2 - 1) Y \leq 0,$$

де $Y = X^{-1}$. При цьому внаслідок неперервності матричних функцій $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і $D(x)$ для деякого $h > 0$ виконуються співвідношення

$$\det\left[I_m - KD(x)\right] \neq 0, \quad M^T(x) Y M(x) - Y < (\rho^2 - 1) Y \leq 0, \quad x \in \mathcal{S}_0,$$

де $M(x) = A(x) + B(x)\big[I_m - KD(x)\big]^{-1} KC(x)$, $\mathcal{S}_0 = \{x\colon \|x\| < h\}$, причому $M(0) = M$. Тоді для першої різниці функції $v(x)$ в силу нелінійної системи (6) маємо

$$v(x_{t+1}) - v(x_t) = x_t^T \left[M^T(x_t) Y M(x_t) - Y\right] x_t < (\rho^2 - 1) v(x_t) \leq 0, \quad x_t \in \mathcal{S}_0.$$

Отже, теорема 2 є наслідком теореми 1 і аналога теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість для дискретних систем.

Теорему 2 доведено.

Приклад 1. Для ілюстрації теореми 1 розглянемо дискретну модель поздовжнього руху гелікоптера при вертикальному зльоті і посадці, яка описується системою рівнянь (7) з матрицями [13]

$$A = \begin{bmatrix} 1,00000 & 0,00027 & 0,00016 & -0,00456 \\ 0,00048 & 0,98995 & -0,00018 & -0,04001 \\ 0,00100 & 0,00365 & 0,99303 & 0,01407 \\ 0,00001 & 0,00002 & 0,00997 & 1,00010 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,00442 & 0,00175 \\ 0,03527 & -0,07554 \\ -0,05494 & 0,04461 \\ -0,00028 & 0,00022 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ця система без керування є нестійкою, оскільки її спектральний радіус $\rho(A) = 1,00287 > > 1$.

Для знаходження матриці X, що задовольняє систему співвідношень (10), (11), розроблено і реалізовано ітераційний алгоритм, на кожному кроці якого розв'язувалась система ЛМН із застосуванням можливостей комп'ютерної системи Matlab. Матрицю $K = K_0$ стабілізуючого регулятора (13) знайдено на основі ЛМН (14) при $\rho = 0,999$. В результаті отримано такі значення:

$$X = \begin{bmatrix} 0,93496 & 0,27593 & 0,01254 & 0,42731 \\ 0,27593 & 0,10313 & 0,02846 & 0,03076 \\ 0,01254 & 0,02846 & 8,06526 & -0,50980 \\ 0,42731 & 0,03076 & -0,50980 & 2,60944 \end{bmatrix} > 0, \quad K = \begin{bmatrix} 5,36439 & -19,07149 \\ -1,61648 & 4,07012 \end{bmatrix}.$$

Відповідна замкнена система (9) є асимптотично стійкою зі спектральним запасом $\alpha = = 0,00274$, оскільки $\sigma(M) = \{0,03418; 0,99550; 0,99709 \pm 0,01837\, i\}$ і $\rho(M) = 0,99726 < 1$.

4. Зважений рівень гасіння обмежених збурень. Розглянемо систему без керування

$$x_{t+1} = A(x_t)x_t + B(x_t)w_t, \quad y_t = C(x_t)x_t + D(x_t)w_t, \tag{17}$$

яка функціонує у деякій області фазового простору $\mathcal{S}_0$, що містить точку $x = 0$. Тут $x_t \in \in \mathbb{R}^n$, $w_t \in \mathbb{R}^m$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, зовнішніх збурень і виходу системи, $A(x_t)$, $B(x_t)$, $C(x_t)$ і $D(x_t)$ — матриці відповідних розмірів, неперервні по $x_t \in \mathcal{S}_0$.

Введемо критерій якості системи (17) відносно її вектора виходу:

$$J = \sup_{0<\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0 < \infty} \varphi(w, x_0), \tag{18}$$

де

$$\varphi(w, x_0) = \frac{\|y\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}, \quad \|y\|_Q^2 = \sum_{t=0}^{\infty} y_t^T Q y_t, \quad \|w\|_P^2 = \sum_{t=0}^{\infty} w_t^T P w_t,$$

$Q = Q^T > 0$, $P = P^T > 0$ і $X_0 = X_0^T > 0$ — деякі вагові матриці. Припустимо, що векторна послідовність зовнішніх збурень w_t обмежена по зваженій l_2-нормі $\|w\|_P$, а x_0 — невідомий початковий вектор.

Значення J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень у системі (17). Даний критерій якості у випадку вагових матриць $P = I_m$, $Q = I_l$ і $X_0 = \beta I_n$ є відомим [14, 15]. Вираз (18) при фіксованому початковому векторі $x_0 = 0$ позначимо через J_0. Очевидно, що $J_0 \le J$.

Система (17) має властивість *неекспансивності* [5], якщо її вектор виходу при довільному $\nu > 0$ задовольняє нерівність

$$\sum_{t=0}^{\nu} y_t^T Q y_t \le \sum_{t=0}^{\nu} w_t^T P w_t + x_0^T X_0 x_0.$$

Для характеристики (18) неекспансивної системи виконується нерівність $J \leq 1$.

Лема 3. *Нехай існує матриця* $X = X^T > 0$ *така, що*

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} A^T(x)XA(x) - X + C^T(x)QC(x) & A^T(x)XB(x) + C^T(x)QD(x) \\ B^T(x)XA(x) + D^T(x)QC(x) & B^T(x)XB(x) + D^T(x)QD(x) - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0$$

при $x \in \mathcal{S}_0$. *Тоді виконується оцінка* $J_0 \leq \gamma$. *Якщо до того ж* $0 < X \leq \gamma^2 X_0$, *то* $J \leq \gamma$.

Доведення. Для першої різниці функції Ляпунова $v(x) = x^T X x$ в силу системи (17) виконуються співвідношення

$$v(x_{t+1}) - v(x_t) + y_t^T Q y_t - \gamma^2 w_t^T P w_t = \left[x_t^T,\ w_t^T\right] \Phi(x_t) \begin{bmatrix} x_t \\ w_t \end{bmatrix},$$

$$v(x_{\nu+1}) - v(x_0) + \sum_{t=0}^{\nu} y_t^T Q y_t - \gamma^2 \sum_{t=0}^{\nu} w_t^T P w_t < 0.$$

Звідси, враховуючи, що $0 < X \leq \gamma^2 X_0$, при $\nu \to \infty$ маємо

$$\|y\|_Q^2 \leq \gamma^2 \left(\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0\right), \quad \varphi(w, x_0) \leq \gamma,$$

а це означає, що $J \leq \gamma$. Зокрема, при $x_0 = 0$ виконується нерівність $J_0 \leq \gamma$.

Лему 3 доведено.

Зауваження 1. При умовах леми 3 нульовий стан системи (17) з невизначеністю

$$w_t = \frac{1}{\gamma}\Theta y_t, \quad \Theta^T P \Theta \leq Q, \tag{19}$$

асимптотично стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^T X x$. Цей факт є наслідком леми 3 і теореми 6.2.1 із [5].

Разом із (17) розглянемо лінійну систему

$$x_{t+1} = Ax_t + Bw_t, \quad y_t = Cx_t + Dw_t, \tag{20}$$

де $A = A(0)$, $B = B(0)$, $C = C(0)$ і $D = D(0)$.

Лема 4. *Для лінійної системи (20) виконується оцінка* $J_0 < \gamma$ *тоді і лише тоді, коли ЛМН*

$$\Phi_\gamma = \begin{bmatrix} A^T XA - X + C^T QC & A^T XB + C^T QD \\ B^T XA + D^T QC & B^T XB + D^T QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \tag{21}$$

має розв'язок $X = X^T > 0$. *При цьому* $J < \gamma$, *якщо* $0 < X < \gamma^2 X_0$.

Достатність леми 4 є наслідком леми 3. *Необхідність* можна встановити шляхом зображення J_0 і J аналогічними виразами з одиничними ваговими матрицями (див. доведення леми 3.2 в [16]) і використання результатів роботи [15].

Із леми 4, зокрема, випливає, що критерії якості J_0 і J системи (20) можна обчислити як розв'язки відповідних оптимізаційних задач:

$$J_0 = \inf\{\gamma\colon \Phi_\gamma < 0, X > 0\}, \quad J = \inf\left\{\gamma\colon \Phi_\gamma < 0, 0 < X < \gamma^2 X_0\right\}. \tag{22}$$

5. Статичний регулятор зі збуреннями. Розглянемо нелінійну дискретну систему керування (6). По аналогії з методикою, запропонованою в [17] для неперервних систем, керування будемо шукати у вигляді статичного зворотного зв'язку по вимірюваному виходу

$$u_t = K y_t + w_t, \quad K \in \mathcal{K}_D, \tag{23}$$

де $w_t \in \mathbb{R}^m$ — вектор обмежених зовнішніх збурень, D — матриця обходу відповідної лінійної системи (7). Вхідну вектор-функцію $w(t)$ і початковий вектор x_0 вважаємо невідомими.

Якщо $K \in \mathcal{K}_D$, то $\det(I_m - KD(x)) \neq 0$ в деякому околі $\mathcal{S}_0$ точки $x = 0$. Замкнена система (6), (23) в $\mathcal{S}_0$ набирає вигляду

$$x_{t+1} = A_*(x_t)x_t + B_*(x_t)w_t, \quad y_t = C_*(x_t)x_t + D_*(x_t)w_t, \tag{24}$$

де

$$A_*(x) = A(x) + B(x)\mathbf{D}_x(K)C(x), \quad B_*(x) = B(x)\big[I_m - KD(x)\big]^{-1},$$

$$C_*(x) = \big[I_l - D(x)K\big]^{-1}C(x), \;\; D_*(x) = \big[I_l - D(x)K\big]^{-1}D(x),$$

$$\mathbf{D}_x(K) = \big[I_m - KD(x)\big]^{-1}K.$$

Наведемо також замкнену лінійну систему (7), (23):

$$x_{t+1} = A_* x_t + B_* w_t, \quad y_t = C_* x_t + D_* w_t, \tag{25}$$

матричні коефіцієнти якої є значеннями відповідних матричних функцій в (24) при $x_t = 0$.

Нас цікавлять регулятори (23), які мінімізують критерії якості J_0 і J типу (18) і забезпечують умови неекспансивності систем (24), (25). Закони керування, які забезпечують мінімальне значення J для замкненої системи, будемо називати *J-оптимальними*. Алгоритми пошуку J- і J_0-оптимальних керувань можна реалізувати на основі побудови відповідних верхніх оцінок для J і J_0.

Теорема 3. *Для лінійної системи (7) існує керування (23), що забезпечує оцінку $J < \gamma$, тоді і лише тоді, коли сумісною є система співвідношень*

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^TXA - X + C^TQC & A^TXB + C^TQD \\ B^TXA + D^TQC & B^TXB + D^TQD - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{26}$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AYA^T - Y + BP^{-1}B^T & AYC^T + BP^{-1}D^T \\ CYA^T + DP^{-1}B^T & CYC^T + DP^{-1}D^T - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{27}$$

$$0 < X < \gamma^2 X_0, \quad XY = \gamma^2 I_n, \tag{28}$$

де $R = \big[C,\ D\big]$, $L = \big[B^T,\ D^T\big]$. При виконанні умов (26) – (28) нульовий стан замкнених систем (24), (25) з невизначеністю (19) робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^TXx$.

Доведення. За лемою 4 нерівність $J_0 < \gamma$ виконується лише тоді, коли

$$\begin{bmatrix} A_*^T X A_* - X + C_*^T Q C_* & A_*^T X B_* + C_*^T Q D_* \\ B_*^T X A_* + D_*^T Q C_* & B_*^T X B_* + D_*^T Q D_* - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \tag{29}$$

для деякої матриці $X = X^T > 0$. Використовуючи лему Шура і вирази $A_* = A + BK_0C$, $B_* = B + BK_0D$, $C_* = C + DK_0C$, $D_* = D + DK_0D$, записуємо ЛМН (29) відносно $K_0 = \mathbf{D}(K)$ у вигляді

$$L_0^T K_0 R_0 + R_0^T K_0^T L_0 + \Omega < 0, \tag{30}$$

де

$$\Omega = \begin{bmatrix} -X & 0 & A^T & C^T \\ 0 & -\gamma^2 P & B^T & D^T \\ A & B & -X^{-1} & 0 \\ C & D & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \quad R_0^T = \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \\ D \end{bmatrix}.$$

Критерієм сумісності ЛМН (30) є умови (див. лему 2)

$$\begin{gathered} W_{L_0}^T \Omega W_{L_0} < 0, \quad W_{R_0}^T \Omega W_{R_0} < 0, \\ W_{R_0} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_{n+l} \end{bmatrix}, \quad W_{L_0} = \begin{bmatrix} I_{n+m} & 0 \\ 0 & W_L \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{31}$$

Обчислюючи матричні вирази в (31) та вводячи позначення $Y = \gamma^2 X^{-1}$ (друге співвідношення (28)), за допомогою леми Шура приходимо до відповідних матричних нерівностей (26) і (27). При цьому, якщо виконується й перше співвідношення (28), то маємо оцінку $J < \gamma$.

Теорему 3 доведено.

Зауваження 2. Якщо матриці X і Y задовольняють умови (26) – (28), то невідому матрицю K в теоремі 3 можна побудувати у вигляді

$$K = K_0(I_l + DK_0)^{-1}, \quad -K_0 \in \mathcal{K}_D, \tag{32}$$

де K_0 — довільний розв'язок ЛМН (30). При цьому нульовий стан $x_t \equiv 0$ замкнених систем (24), (25) з невизначеністю (19) робастно стійкий, а $v(x) = x^T X x$ є спільною функцією Ляпунова даних систем (див. зауваження 1). Для оцінки критеріїв якості J_0 і J замкненої нелінійної системи (24) може бути використана лема 3.

Розглянемо випадок статичного регулятора по стану

$$u_t = Kx_t + w_t, \quad K \in \mathcal{K}_D, \tag{33}$$

і в наведених вище співвідношеннях покладемо

$$C = I_n, \quad D = 0, \quad W_R = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \quad W_L = \begin{bmatrix} B^\perp & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix}, \quad Y = \gamma^2 X^{-1}.$$

В результаті замість (26) – (28) маємо систему ЛМН відносно Y:

$$\begin{bmatrix} P & B^T \\ B & Y \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} B^{\perp T}(AYA^T - Y)B^{\perp} & B^{\perp T}AY \\ YA^TB^{\perp} & Y - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} X_0 & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} > 0. \tag{34}$$

Наслідок 1. *Для лінійної системи (7) існує керування (33), що забезпечує оцінку* $J < \gamma$, *тоді і лише тоді, коли система ЛМН (34) має розв'язок* $Y = Y^T > 0$. *При цьому нульовий стан замкнених систем (6), (33) та (7), (33) з невизначеністю (19) робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова* $v(x) = \gamma^2 x^T Y^{-1} x$.

Приклад 2. Розглянемо систему керування перевернутого маятника на рухомій платформі (рис. 1). Для утримання маятника у верхньому положенні рівноваги до платформи прикладено керуючу силу u.

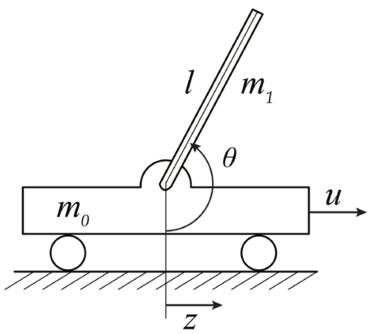

Рис. 1. Маятник на рухомій платформі.

Нелінійні рівняння руху системи мають вигляд

$$(m_0 + m_1)\ddot{z} + k\dot{z} + m_1 l\ddot{\theta}\cos\theta - m_1 l\dot{\theta}^2 \sin\theta = u,$$

$$(I + m_1 l^2)\ddot{\theta} + m_1 gl\sin\theta = -m_1 l\ddot{z}\cos\theta,$$

де m_0 — маса платформи, m_1 — маса маятника, k — коефіцієнт тертя платформи, l — відстань від точки кріплення маятника до його центра мас, I — момент інерції маятника, g — прискорення сили тяжіння, z — горизонтальне переміщення платформи, $\varphi = \theta - \pi$ — кут відхилення маятника від вертикальної осі, u — керуюча сила, прикладена до платформи.

Позначимо $\delta = I(m_0 + m_1) + m_0 m_1 l^2$ і, врахувавши, що $\cos\theta \approx -1$, $\sin\theta \approx -\varphi$ і $\dot{\theta}^2 = \dot{\varphi}^2 \approx 0$ при малих значеннях кута φ, отримаємо лінійні рівняння руху системи у вигляді

$$\dot{x} = A_c x + B_c u, \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(I+m_1 l^2)k/\delta & m_1^2 g l^2/\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -m_1 l k/\delta & m_1 g l (m_0+m_1)/\delta & 0 \end{bmatrix},$$
$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ (I+m_1 l^2)/\delta \\ 0 \\ m_1 l/\delta \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Для проведення числових розрахунків побудовано дискретний аналог системи керування (35) у вигляді (7), де

$$A = e^{dA_c} \approx I_4 + dA_c + \frac{d^2}{2} A_c^2 + \frac{d^3}{6} A_c^3, \quad B = \int_0^d e^{\tau A_c} B_c d\tau \approx \left(dI_n + \frac{d^2}{2} A_c + \frac{d^3}{6} A_c^2 \right) B_c,$$

$d = 0,1$ — крок дискретизації, і вибрано такі значення механічних параметрів: $m_0 = 0,5$, $m_1 = 0,2$, $k = 0,1$, $l = 0,3$ і $I = 0,006$. В якості вагових коефіцієнтів функціонала (18) взято діагональні матриці $P = 1$, $Q = \mathrm{diag}\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ і $X_0 = \beta I_4$, де $\beta = 200$.

N	q_1	q_2	q_3	q_4	K	J	J_0	α	T_0
1	1	1	1	1	[1,4663 2,5332 $-19,4920$ $-3,9697$]	0,7996	0,6812	0,0952	38
2	2	1	2	1	[2,0342 2,8795 $-20,5162$ $-4,1427$]	0,8704	0,6946	0,1319	31
3	3	1	3	1	[2,4539 3,1342 $-21,2669$ $-4,2693$]	0,9265	0,7056	0,1590	27
4	4	1	4	1	[2,7993 3,3446 $-21,8865$ $-4,3739$]	0,9741	0,7141	0,1809	26
5	1	2	1	2	[1,0515 2,2804 $-18,7465$ $-3,8440$]	1,0645	0,9509	0,0683	48
6	2	2	2	2	[1,4659 2,5329 $-19,4895$ $-3,9693$]	1,1316	0,9644	0,0952	38
7	3	2	3	2	[1,7772 2,7232 $-20,0531$ $-4,0646$]	1,1853	0,9741	0,1153	33
8	4	2	4	2	[2,0337 2,8786 $-20,5130$ $-4,1420$]	1,2317	0,9827	0,1319	31
9	1	3	1	3	[0,8640 2,1663 $-18,4077$ $-3,7868$]	1,2671	1,1572	0,0561	56
10	2	3	2	3	[1,2079 2,3761 $-19,0236$ $-3,8907$]	1,3342	1,1707	0,0784	43
11	3	3	3	3	[1,4661 2,5331 $-19,4904$ $-3,9694$]	1,3867	1,1816	0,0952	38
12	4	3	4	3	[1,6809 2,6638 $-19,8796$ $-4,0351$]	1,4307	1,1890	0,1091	34
13	1	4	1	4	[0,7512 2,0977 $-18,2044$ $-3,7525$]	1,4392	1,3318	0,0488	63
14	2	4	2	4	[1,0515 2,2804 $-18,7460$ $-3,8438$]	1,5051	1,3440	0,0683	48
15	3	4	3	4	[1,2783 2,4191 $-19,1542$ $-3,9130$]	1,5564	1,3550	0,0830	42
16	4	4	4	4	[1,4664 2,5332 $-19,4938$ $-3,9700$]	1,6003	1,3635	0,0952	38

На основі наслідку 1 і формул (22), (34) проведено ряд числових експериментів із метою побудови наближених J-оптимальних керувань у вигляді статичного регулятора по стану (33) при різних значеннях діагональних елементів матриці Q. В таблиці наведено знайдені відповідні значення матриці J-оптимального регулятора K, критеріїв якості J і J_0, запасу стійкості α і часу перехідного процесу T_0 замкненої системи. Остання характеристика знаходилась за формулою $T_0 = \min\{T\colon \|x_t\| \le \varepsilon, t \ge T\}$, де $\varepsilon = 0,05$.

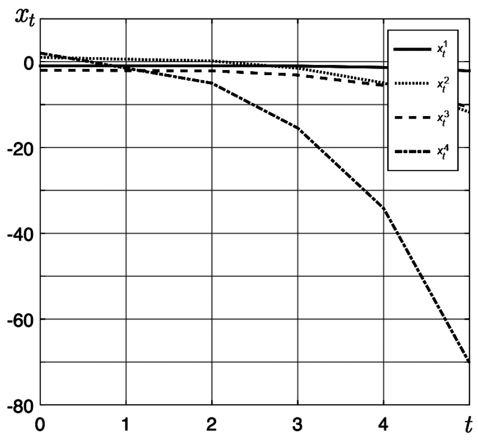

Рис. 2. Поведінка системи без керування.

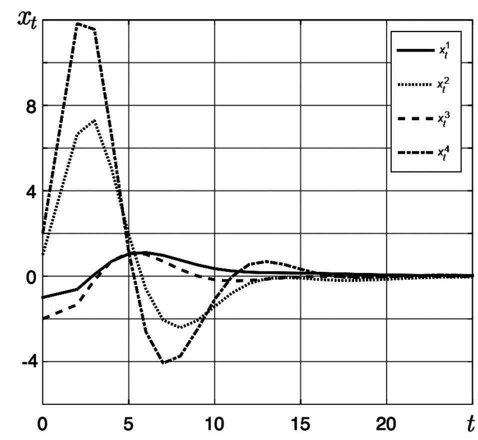

Рис. 3. Поведінка замкненої системи.

Діагональні елементи q_1 і q_3 вагової матриці Q характеризують вплив переміщення платформи z і кута відхилення маятника φ на зважений рівень гасіння обмежених збурень, що діють на платформу. Як видно з таблиці, збільшення q_1 і q_3 при сталих q_2 і q_4 приводить до збільшення запасу стійкості і зменшення часу перехідного процесу системи при відповідному J-оптимальному керуванні. Замкнена система є неекспансивною у випадках $N = \overline{1,4}$.

На рис. 2 показано поведінку розв'язків дискретної системи без керування, а на рис. 3 — поведінку розв'язків замкненої системи з початковим вектором $x_0 = [-1, 1, -2, 2]^T$ для J-оптимального регулятора у випадку $N = 4$. При цьому збурення w_t задано у вигляді (19), де $y_t = x_t$, $\gamma = 0,976$, $\Theta = \sqrt{P}^{-1} E \sqrt{Q}$, $E = 0,5[1, 1, 1, 1]$ і виконується матрична нерівність $\Theta^T P \Theta \leq Q$.

7. Висновок. Для деяких класів лінійних та нелінійних систем керування з дискретним часом у термінах матричних нерівностей сформульовано алгебраїчні умови існування статичних стабілізуючих регуляторів по вимірюваному виходу. Запропоновану методику побудови таких регуляторів застосовано до дискретної моделі системи стабілізації гелікоптера при вертикальному зльоті і посадці. Розвинуто методи робастної стабілізації, оцінки та мінімізації критеріїв якості дискретних систем, що характеризують зважений рівень погашення вхідних сигналів і початкових збурень. Відповідний алгоритм синтезу керування у випадку статичного зворотного зв'язку по стану зводиться до розв'язування системи ЛМН. Із використанням засобів комп'ютерної системи Matlab проведено числову реалізацію даного алгоритму для системи стабілізації перевернутого маятника на рухомій платформі.

Література

1. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
2. *Кунцевич В. М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев: Наук. думка, 2006. — 264 с.
3. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.
4. *Ларин В. Б., Туник А. А.* О компенсации внешних возмущений динамической обратной связью по выходной переменной // Прикл. механика. — 2006. — **42**, № 5. — С. 132–144.

5. *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Пр. Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **102**. — 332 с.

6. *Dullerud G. E., Paganini F. G.* A course in robust control theory. A convex approach. — Berlin: Springer-Verlag, 2000. — 419 p.

7. *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear matrix inequality approach to H_∞ control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. — 1994. — **4**. — P. 421–448.

8. *Назин С. А., Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106–125.

9. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 7–46.

10. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M.* The LMI control toolbox. For use with Matlab. User's guide. — Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995. — 138 p.

11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

12. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Применение линейных матричных неравенств в синтезе законов управления. — Нижний Новгород: ННГУ, 2010. — 93 с.

13. *Rosinova D., Vesely V., Kucera V.* A necessary and sufficient condition for static output feedback stabilizability of linear discrete-time systems // Kybernetika. — 2003. — **39**, № 4. — P. 447–459.

14. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 6. — С. 20–38.

15. *Баландин Д. В., Коган М. М., Кривдина Л. Н., Федюков А. А.* Синтез обобщенного H_∞-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 1. — С. 3–22.

16. *Мазко О. Г., Кусій С. М.* Задачі стабілізації і гасіння зовнішніх збурень в системах керування // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, № 5. — С. 90–108.

17. *Мазко А. Г., Кусий С. Н.* Стабилизация по измеряемому выходу и оценка уровня гашения возмущений в системах управления // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, № 3. — С. 373–387.

Одержано 06.03.17