УДК 517.988.6

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ІЗ НЕРІВНОМІРНО СТИСКАЮЧИМИ ОПЕРАТОРАМИ У ПРОСТОРІ ДВОСТОРОННІХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

We find existence and uniqueness conditions for solutions of difference equations with contracting compact operators on the metric space of two-sided sequences.

Получены условия существования и единственности решений разностных уравнений со сжимающими компактными операторами в метрическом пространстве двусторонних последовательностей.

1. Основні позначення та об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел, M_n, $n \in \mathbb{Z}$, — довільні повні метричні простори з метриками d_n, $n \in \mathbb{Z}$, відповідно і $\mathfrak{M}$ — множина всіх двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ елементів $x_n \in M_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Зафіксуємо довільну послідовність $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$. Позначимо через $\mathfrak{M}_\mathbf{a}$ повний метричний простір усіх двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, для кожної з яких

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} d_n(x_n, a_n) < \infty, \tag{1}$$

з метрикою d, що визначається рівністю

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} d_n(x_n, y_n).$$

Очевидно, що послідовність $\mathbf{a}$ є елементом простору $\mathfrak{M}_\mathbf{a}$, і ця послідовність, як і послідовності $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_\mathbf{a}$, можуть бути необмеженими, якщо, наприклад, $M_n = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел) і $a_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Однак завдяки (1) усі елементи $\mathbf{x}$ простору $\mathfrak{M}_\mathbf{a}$ відрізняються від $\mathbf{a}$ на обмежену величину. Такі елементи простору $\mathfrak{M}_\mathbf{a}$ (для яких справджується (1)) називатимемо $\mathbf{a}$-*обмеженими*.

Позначимо через $B_n[a_n, r]$ замкнену кулю у просторі M_n із центром у точці $a_n \in M_n$ і радіусом r, тобто множину

$$\{x \in M_n \colon d_n(x, a_n) \le r\}.$$

Розглянемо оператори $F_n \colon M_{n-1} \times M_n \to M_n$, $n \in \mathbb{Z}$, для яких виконується співвідношення

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in B_{n-1}[a_{n-1},r]} d_n(F_n(x, h_n), a_n) < \infty \tag{2}$$

для кожного елемента $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ простору $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ і кожного числа $r > 0$.

Ці оператори породжують різницеве рівняння

$$x_n = F_n(x_{n-1}, h_n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Основним об'єктом досліджень у статті є встановлення умов, при виконанні яких для кожної послідовності $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ рівняння (3) має у просторі $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ хоча б один (або рівно один) розв'язок $\mathbf{x}$, тобто рівняння (3) має хоча б один (або єдиний) $\mathbf{a}$-обмежений розв'язок. Цю задачу розв'яжемо, використавши допоміжні результати, що наводяться в наступному пункті.

Зазначимо, що у випадку, коли метричні простори M_n, $n \in \mathbb{Z}$, банахові, а різницеве рівняння (3) лінійне, аналогічні задачі розв'язані автором в [1].

2. Допоміжні результати. При дослідженні рівняння (3) будемо використовувати одне узагальнення принципу стискаючих відображень, локально збіжні послідовності елементів метричного простору $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ та c-неперервні оператори.

2.1. Теореми про нерухомі точки стискаючих відображень. У цьому підпункті використаємо метричний простір M із метрикою ρ.

Якщо для деякого $k \in [0, 1)$ і всіх $x, y \in M$ для відображення $f\colon M \to M$ виконується співвідношення

$$\rho(f(x), f(y)) \le k\rho(x, y),$$

то це відображення називають *стисканням*. Якщо ж

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$$

при $x, y \in M$ і $x \neq y$, то відображення f називається *стискаючим відображенням* [2].

Важливим у теорії стискаючих відображень є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай відображення $f\colon M \to M$ є стискаючим.*

Якщо існує така точка $x_0 \in M$, що послідовність $(x_m)_{m\ge1}$ ітерацій $x_m = f^m(x_0)$ містить підпослідовність, що збігається до точки $x_\infty \in M$, то x_∞ — єдина нерухома точка відображення f і послідовність $(x_m)_{m\ge1}$ також збігається до x_∞.

Це твердження є об'єднанням теореми 1 та зауваження 3.2 із статті Едельштейна [2].

Зазначимо, що в теоремі 1 відстань $\rho(x_m, x_\infty)$ між x_m і x_∞ монотонно прямує до 0 при $m \to +\infty$, що випливає із співвідношень

$$\rho(x_{m+1}, x_\infty) = \rho(f(x_m), f(x_\infty)) < \rho(x_m, x_\infty),\ m \ge 0,$$

якщо

$$x_m \neq x_\infty.$$

Наслідком теореми 1 є наступна важлива для подальшого теорема.

Теорема 2. *Нехай метричний простір M є повним, а відображення $f\colon M \to M$ — компактним і стискаючим.*

Тоді відображення f має єдину нерухому точку $x^* \in M$.

Очевидно, що теорема 1 узагальнює принцип стискаючих відображень Банаха [3], що формулюється у вигляді такого твердження.

Теорема 3. *Нехай M — повний метричний простір. Тоді відображення стискання $f\colon M \to M$ має єдину нерухому точку x^* і для кожного $x_0 \in M$ послідовність $(f^n(x_0))_{n\geq 1}$ збігається до x^*.*

2.2. Локально збіжні послідовності та c-неперервні оператори. Розглянемо оператор $\mathcal{P}_m\colon \mathfrak{M}_{\mathbf{a}} \to \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, де $m \in \mathbb{N}$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{P}_m \mathbf{x})_n = \begin{cases} x_n, & \text{якщо} \quad |n| \leq m, \\ a_n, & \text{якщо} \quad |n| > m. \end{cases} \tag{4}$$

Послідовність елементів $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, $k \geq 1$, називатимемо *локально збіжною* до $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}} \mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо

$$\sup_{k\geq 1} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) < \infty$$

і

$$\lim_{k\to\infty} d(\mathcal{P}_m \mathbf{x}_k, \mathcal{P}_m \mathbf{x}) = 0$$

для кожного числа $m \in \mathbb{N}$.

Оператор $\mathcal{H}\colon \mathfrak{M}_{\mathbf{a}} \longrightarrow \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ називатимемо *c-неперервним*, якщо для довільних $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ і $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}} \mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

виконується співвідношення

$$\mathcal{H}\mathbf{x}_k \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}} \mathcal{H}\mathbf{x} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Зазначимо, що поняття c-неперервного оператора (на мові ε, δ) введено до розгляду Е. Мухамадієвим [4, 5]. Вивчення цих операторів було продовжено в [6–17] та інших роботах.

Крім теореми 2 важливою для подальшого є таке твердження.

Лема 1. *Нехай послідовність $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ елементів $\mathbf{x}_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{Z}_{\mathbf{a}}}$ метричного простору $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ задовольняє умови:*

1) справджується співвідношення

$$\sup_{k\geq 1} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) < \infty;$$

2) для кожного числа $m \in \mathbb{N}$ замикання множини $\{\mathcal{P}_m \mathbf{x}_k\colon k \geq 1\}$ у метричному просторі $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ є компактним у цьому просторі.

Тоді існують такі підпослідовність $(\mathbf{x}_{k_l})_{l\geq 1}$ послідовності $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ і елемент $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, для яких

$$\mathbf{x}_{k_l} \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}} \mathbf{x} \quad \textit{при} \quad l \to \infty$$

і

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \le \sup_{k \ge 1} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}). \tag{5}$$

Доведення. Нехай $[t]$ — ціла частина числа t. Розглянемо числа

$$n_p = (-1)^p [p/2], \quad p \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що $\{n_p \colon p \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$. На підставі умов леми існують збіжні послідовності

$$x_{k_{1,1},n_1}, x_{k_{1,2},n_1}, \ldots, x_{k_{1,m},n_1}, \ldots,$$

$$x_{k_{2,1},n_2}, x_{k_{2,2},n_2}, \ldots, x_{k_{2,m},n_2}, \ldots ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{k_{m,1},n_m}, x_{k_{m,2},n_m}, \ldots, x_{k_{m,m},n_m}, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

для яких послідовності $(k_{l,p})_{p \ge 1}$ є строго зростаючими і для кожного $l \in \mathbb{N}$

$$\{k_{l,p} \colon p \in \mathbb{N}\} \supset \{k_{l+1,p} \colon p \in \mathbb{N}\}. \tag{6}$$

Позначимо через b_m границю $\lim_{p \to \infty} x_{k_{m,p},n_m}$, а через $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ елемент простору $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, для якого $x_{n_m} = b_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Із (6) випливає, що

$$k_{q,q} \in \{k_{m,p} \colon p \in \mathbb{N}\}$$

для $q \ge m$ і $m \in \mathbb{N}$. Тому послідовність

$$x_{k_{1,1},n}, x_{k_{2,2},n}, \ldots, x_{k_{q,q},n}, \ldots$$

є збіжною для кожного $n \in \mathbb{Z}$ і, отже,

$$\mathbf{x}_{k_{q,q}} \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}} \mathbf{x} \quad \text{при} \quad q \to \infty.$$

Нерівність (5) випливає з того, що

$$x_{n_m} = \lim_{p \to \infty} x_{k_{m,p},n_m}$$

і

$$|x_{n_m}| \le \sup_{p \ge 1} |x_{k_{m,p},n_m}|$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$.

Лему 1 доведено.

Зауважимо, що окремий випадок леми 1 у випадку $M_n = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, міститься у [18].

3. Умови розв'язності рівняння (3) у просторі $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$. У цьому пункті ми наведемо теорему про існування $\mathbf{a}$-обмежених розв'язків рівняння (3) для довільного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$.

Визначимо оператор $\mathfrak{F}_{\mathbf{h}} \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ за допомогою співвідношення

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}\mathbf{x})_n = F_n(x_{n-1}, h_n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Очевидно, що завдяки (2)

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}\mathfrak{M}_{\mathbf{a}} \subset \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$$

і задача про знаходження для кожного $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ $\mathbf{a}$-обмежених розв'язків рівняння (3) рівносильна задачі про знаходження у просторі $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ розв'язків рівняння

$$\mathbf{x} = \mathfrak{F}_{\mathbf{h}}\mathbf{x} \tag{8}$$

для кожного $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$.

Будемо вважати, що оператори $F_n \colon M_{n-1} \times M_n \to M_n$, $n \in \mathbb{Z}$, для яких виконуються співвідношення (2), додатково задовольняють для кожного $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ такі умови:

а) функції $F_n(x, h_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, неперервні на M_n, $n \in \mathbb{Z}$, відповідно;

б) існує таке число $R > 0$, залежне від $\mathbf{h}$, що

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in B_{n-1}[a_{n-1},R]} d_n(F_n(x, h_n), a_n) \le R;$$

в) замикання множин $\{F_n(x, h_n) \colon x \in B_{n-1}[a_{n-1}, R]\}$, $n \in \mathbb{Z}$ (тут R — те саме число, що й у попередній умові), є компактними множинами у просторах M_n, $n \in \mathbb{Z}$, відповідно;

г) для кожного $n \in \mathbb{Z}$ справджується співвідношення

$$d_n(F_n(x, h_n), F_n(y, h_n)) < d_{n-1}(x, y)$$

при $x, y \in B_{n-1}[a_{n-1}, R]$ і $x \ne y$ (тут R — те саме число, що й в умові б)).

Справедливою є така теорема.

Теорема 4. *Нехай $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — довільний елемент простору $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ і виконуються умови а) – г).*

Тоді різницеве рівняння (3) має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, для якого

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \le R.$$

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$. Розглянемо метричні підпростори $\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k}$, $k \ge 1$, простору $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ і оператори $\mathfrak{F}_{\mathbf{h},k} \colon \mathfrak{M}_{\mathbf{a},k} \to \mathfrak{M}_{\mathbf{a},k}$, $k \ge 1$, за допомогою рівностей

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k} = \mathcal{P}_k\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}, \quad k \ge 1,$$

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{h},k} = \mathcal{P}_k\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}, \quad k \ge 1,$$

відповідно (тут $\mathcal{P}_k\colon \mathfrak{M}_{\mathbf{a}} \to \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ — оператор, що визначається рівністю (4)). Метрику в $\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k}$ позначимо через ρ_k. Очевидно, що для кожного $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a},k}$

$$\rho_k(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sup_{|n|\leq k} d_n(x_n, a_n).$$

У метричному просторі $\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k}$ розглянемо підпростір

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R} = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a},k}\colon d_n(x_n, a_n) \leq R,\ |n| \leq k\}.$$

Використаємо звуження $\mathfrak{F}_{\mathbf{h},k}|_{\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}}\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}$ оператора $\mathfrak{F}_{\mathbf{h},k}$ на підпростір $\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}$. Завдяки умовам а) – г) метричний простір $\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}$ є повним, інваріантним по відношенню до оператора $\mathfrak{F}_{\mathbf{h},k}|_{\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}}$, тобто

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{h},k}|_{\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}}\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R} \subset \mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R},$$

оператор $\mathfrak{F}_{\mathbf{h},k}|_{\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}} : \mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R} \to \mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}$ — компактним і стискаючим, тобто

$$\rho_k\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h},k}|_{\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}}\mathbf{x}, \mathfrak{F}_{\mathbf{h},k}|_{\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}}\mathbf{y}\right) < \rho_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

при $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}$ і $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. За теоремою 2 для кожного $k \geq 1$ оператор $\mathfrak{F}_{\mathbf{h},k}|_{\mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}}$ має нерухому точку $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a},k,R}$.

Отже, існує послідовність $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ елементів $\mathbf{x}_k$, $k \geq 1$, простору $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, що задовольняє такі умови:

1) справджується співвідношення

$$\sup_{k\geq 1} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) \leq R;$$

2) для кожного числа $m \in \mathbb{N}$ замикання множини $\{\mathcal{P}_m \mathbf{x}_k\colon k \geq 1\}$ у метричному просторі $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ є компактним у цьому просторі.

Тоді за лемою 1 існують такі підпослідовність $(\mathbf{x}_{k_l})_{l\geq 1}$ послідовності $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 1}$ і елемент $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, для яких

$$\mathbf{x}_{k_l} \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}} \mathbf{x}^* \quad \text{при} \quad l \to \infty \tag{9}$$

і

$$d\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}\right) \leq R. \tag{10}$$

Покажемо, що $\mathbf{x}^*$ — нерухома точка відображення $\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}$. Спочатку зазначимо, що завдяки співвідношенню (7) та умові а) цей оператор є c-неперервним. Тому на підставі (9)

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}\mathbf{x}_{k_l} \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}} \mathfrak{F}_{\mathbf{h}}\mathbf{x}^* \quad \text{при} \quad l \to \infty. \tag{11}$$

Оскільки

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}\mathbf{x}_{k_l} = \mathbf{x}_{k_l}$$

для всіх $l \geq 1$, то згідно з (11)

$$\mathbf{x}_{k_l} \xrightarrow{\text{loc.}, \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}} \mathfrak{F}_{\mathbf{h}} \mathbf{x}^* \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Звідси, із (9) і єдиності границі отримуємо рівність

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{h}} \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*,$$

тобто $\mathbf{x}^*$ є розв'язком рівняння (8).

Отже, різницеве рівняння (3) має розв'язок $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, що задовольняє (10).

Теорему 4 доведено.

4. Умови однозначної розв'язності рівняння (3) у просторі $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$. У цьому пункті ми наведемо теорему про існування та єдиність $\mathbf{a}$-обмежених розв'язків рівняння (3) для довільного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$.

У подальшому будемо вважати, що замість умови г) для всіх $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ виконується умова

г*) для деяких чисел $q \in [0, 1)$ і $m \in \mathbb{Z}$ справджуються співвідношення

$$d_n(F_n(x, h_n), F_n(y, h_n)) < q d_{n-1}(x, y), \quad n \leq m,$$

і

$$d_n(F_n(x, h_n), F_n(y, h_n)) < d_{n-1}(x, y), \quad n > m,$$

при $x, y \in B_{n-1}[a_{n-1}, R]$ і $x \neq y$ (тут R — те саме число, що й в умові б)).

Справедливим є наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай $\mathbf{h} = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — довільний елемент простору $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ і виконуються умови а) – в) і г*).*

Тоді різницеве рівняння (3) має єдиний розв'язок $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, для якого

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq R,$$

і, отже, оператор $\mathfrak{F}_{\mathbf{h}} : \mathfrak{M}_{\mathbf{a}} \to \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ має єдину нерухому точку.

Це твердження є наслідком теореми 4 та такої леми.

Лема 2. *Нехай для оператора $\mathfrak{F}_{\mathbf{h}} : \mathfrak{M}_{\mathbf{a}} \to \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, що визначається співвідношенням (7), виконуються нерівності*

$$d_n(F_n(x, h_n), F_n(y, h_n)) < q d_{n-1}(x, y), \quad n \leq m, \tag{12}$$

при $x, y \in M_n$ або при $x, y \in B_{n-1}[a_{n-1}, r]$ $(r \in (0, +\infty))$ та деяких $q \in [0, 1)$ і $m \in \mathbb{Z}$.

Якщо множина нерухомих точок оператора $\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}$ непорожня, то вона містить лише один елемент.

Доведення. Нехай $\mathbf{x}^* = (x_n^*)_{n \in \mathbb{Z}}$ і $\mathbf{y}^* = (y_n^*)_{n \in \mathbb{Z}}$ — нерухомі точки оператора $\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}$.

На підставі (12)

$$d_n\left(F_n(x_{n-1}^*, h_n), F_n(y_{n-1}^*, h_n)\right) \leq q d_{n-1}\left(x_{n-1}^*, y_{n-1}^*\right), \quad n \leq m,$$

тобто

$$d_n\left(x_n^*, y_n^*\right) \le q d_{n-1}\left(x_{n-1}^*, y_{n-1}^*\right), \quad n \le m.$$

Тому для довільних чисел $n, p \in \mathbb{Z}$, для яких $n < p \le m$, виконуються співвідношення

$$d_n\left(x_p^*, y_p^*\right) \le q^{p-n} d_{n-1}\left(x_n^*, y_n^*\right) \le q^{p-n} d\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*\right).$$

Звідси внаслідок довільності n $(n < m)$ та того, що $0 \le q < 1$, випливають рівності

$$d_n\left(x_n^*, y_n^*\right) = 0, \quad n \le m,$$

тобто

$$x_n^* = y_n^*, \quad n \le m. \tag{13}$$

Враховуючи, що для всіх $n \in \mathbb{Z}$

$$x_n^* = F_n\left(x_{n-1}^*, h_n\right) \quad \text{i} \quad y_n^* = F_n\left(y_{n-1}^*, h_n\right),$$

отримуємо на підставі (13) рівність

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*.$$

Лему 2 доведено.

Зауваження 1. У лемі 2 оператори $F_n(\cdot, h_n)\colon M_{n-1} \to M_n$, $n \in \mathbb{Z}$, можуть не бути стискаючими при $n > m$.

Зауваження 2. Оскільки елемент $\mathbf{a} \in \mathfrak{M}$ вибрано довільним чином, то теореми 4 і 5 дозволяють досліджувати рівняння (3) також з довільним $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ (при заданому $\mathbf{h}$ потрібно використовувати таке $\mathbf{a}$, щоб $d(\mathbf{h}, \mathbf{a}) < \infty$).

Зауваження 3. В окремих випадках теореми 4 і 5 дозволяють з'ясовувати існування та єдиність обмежених розв'язків різницевих рівнянь. Це можна, наприклад, здійснити у випадку, коли метричні простори M_n, $n \in \mathbb{Z}$, збігаються з банаховими просторами E_n, $n \in \mathbb{Z}$, відповідно (норму в E_n позначимо через $\|\cdot\|_{E_n}$). Якщо в цих теоремах в якості $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ вибрати такий елемент, щоб

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|_{E_n} < \infty,$$

то $\mathbf{a}$-обмеженість розв'язків рівняння (3) збігатиметься зі звичайною обмеженістю розв'язків цього рівняння.

5. Нерухома точка оператора $\mathfrak{F}_\mathbf{h}$ як c-границя послідовності $\left(\mathfrak{F}_\mathbf{h}^m \mathbf{x}\right)_{m\ge 1}$ при довільному $\mathbf{x} \in \mathfrak{F}_\mathbf{a}$. Тут ми покажемо, як можна наближено і локально (на будь-якій скінченній множині цілих чисел) знаходити розв'язки різницевого рівняння (3) або нерухомі точки відповідного оператора $\mathfrak{F}_\mathbf{h}$.

Справджується наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — довільний елемент простору $\mathfrak{M}_\mathbf{a}$, виконуються умови а) – в) і г*), $\mathbf{x}^* = (x_n^*)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}_\mathbf{a}$ — єдиний за теоремою 5 розв'язок різницевого рівняння (3) і $\mathbf{x}_0 = \left(x_{n,0}^*\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ — довільний елемент простору $\mathfrak{M}_\mathbf{a}$, для якого $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{a}) \le R$.*

Тоді для кожного цілого числа $k > m$ справджуються співвідношення

$$\sup_{n \leq k} d_n \left(\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^p \mathbf{x}_0 \right)_n, x_n^* \right) \leq 2Rq^{p-(k-m)}, \quad p > k - m, \tag{14}$$

і

$$\sup_{n > k} d_n \left(\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^p \mathbf{x}_0 \right)_n, x_n^* \right) \leq 2R, \quad p \geq 1. \tag{15}$$

Доведення. Співвідношення (15) є очевидним. Покажемо, що виконується співвідношення (14).

Очевидно, що

$$d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}^*) \leq 2R.$$

Завдяки умові г*) для кожного $p \geq 1$

$$\sup_{n \leq m} d_n \left(\left(F_{\mathbf{h}}^p \mathbf{x}_0 \right)_n, x_n^* \right) \leq 2Rq^p. \tag{16}$$

Зафіксуємо довільні цілі числа $k > m$ і $p > k - m$. Враховуючи (7), отримуємо

$$\begin{aligned}
d_{m+1} \left(\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^p \mathbf{x}_0 \right)_{m+1}, x_{m+1}^* \right) &= d_{m+1} \left(\mathfrak{F}_{m+1} \left(\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^{p-1} \mathbf{x}_0 \right)_m, h_{m+1} \right), F_{m+1}(x_m^*, h_{m+1}) \right) \leq \\
&\leq d_m \left(\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^{p-1} \mathbf{x}_0 \right)_m, x_m^* \right) \leq 2Rq^{p-1}, \\
d_{m+2} \left(\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^p \mathbf{x}_0 \right)_{m+2}, x_{m+2}^* \right) &= d_{m+2} \left(\mathfrak{F}_{m+2} \left(\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^{p-1} \mathbf{x}_0 \right)_{m+1}, h_{m+2} \right), F_{m+2}(x_{m+1}^*, h_{m+2}) \right) \leq \\
&\leq d_{m+1} \left(\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^{p-1} \mathbf{x}_0 \right)_{m+1}, x_{m+1}^* \right) \leq \\
&\leq d_m \left(\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^{p-2} \mathbf{x}_0 \right)_m, x_m^* \right) \leq 2Rq^{p-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d_k \left(\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^p \mathbf{x}_0 \right)_k, x_k^* \right) &= d_k \left(\mathfrak{F}_k \left(\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^{p-1} \mathbf{x}_0 \right)_{k-1}, h_k \right), F_k(x_{k-1}^*, h_k) \right) \leq \\
&\leq d_{k-1} \left(\left(\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^{p-1} \mathbf{x}_0 \right)_{k-1}, x_{k-1}^* \right) \leq 2Rq^{p-(k-m)}
\end{aligned}$$

(тут у кожному наступному співвідношенні використовується попереднє співвідношення). Із цих співвідношень та (16) випливає (14).

Теорему 6 доведено.

Окремим випадком теореми 6 є така теорема.

Теорема 7. *Нехай* $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *— довільний елемент простору* $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, *виконуються умови а) – в) і г*),* $\mathbf{x}^* = (x_n^*)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ *— єдиний за теоремою 5 розв'язок різницевого рівняння (3) і* $\mathbf{x}_0 = \left(x_{n,0}^*\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ *— довільний елемент простору* $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$, *для якого*

$$d(\mathbf{x}_0, \mathbf{a}) \leq R.$$

Тоді

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{h}}^{p}\mathbf{x}_0 \xrightarrow{\text{loc.},\, \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}} \mathbf{x}^* \quad \textit{при} \quad p \to +\infty.$$

Література

1. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, № 1. — С. 109 – 115.
2. *Edelstein M.* On fixed and periodic points under contractive mappings // J. London Math. Soc. — 1962. — **37**. — P. 74 – 79.
3. *Banach S.* Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales // Fund. Math. — 1922. — **3**. — P. 133 – 181.
4. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269 – 274.
5. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. — 1981. — **30**, № 3. — С. 443 – 460.
6. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. — 1981. — **116(158)**, № 4(12). — С. 483 – 501.
7. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1981. — № 8. — С. 34 – 37.
8. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. — 1986. — **130(172)**, № 1(5). — С. 86 – 104.
9. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 1987. — **42**, № 2. — С. 262 – 267.
10. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 2. — С. 201 – 205.
11. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. — 168 с.
12. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. — 2010. — **201**, № 8. — С. 103 – 126.
13. *Слюсарчук В. Ю.* Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 4. — С. 536 – 555.
14. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних диференціальних операторів слабко регулярними операторами // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 12. — С. 1685 – 1698.
15. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 1. — С. 112 – 126.
16. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. — 2012. — **203**, № 5. — С. 135 – 160.
17. *Слюсарчук В. Ю.* Нелінійні різницеві рівняння у просторах обмежених двосторонніх послідовностей // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 4. — С. 528 – 538.
18. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів. — Рівне: Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, 2006. — 233 с.

Одержано 12.08.15