УДК 517.956

СТАБІЛІЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛОКАЛЬНОЇ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Г. П. Вережак, В. В. Городецький

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012, Україна
e-mail: g.verezhak@gmail.com

We establish that a solution of a nonlocal problem multipoint in time for the evolutionary equations with differential operator of infinite order is stabilized to zero as $t \to +\infty$ in the space of generalized functions of S' type.

Установлено, что решение нелокальной многоточечной по времени задачи для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования бесконечного порядка стабилизируется к нулю при $t \to +\infty$ в пространстве обобщенных функций типа S'.

Вступ. У теорії задачі Коші для рівномірно параболічних рівнянь та систем рівнянь на даний час одержано досить повні результати з питань коректної розв'язності, інтегрального зображення розв'язків та дослідження їх властивостей. При цьому часто початкові умови — початкові функції — мають особливості в одній або кількох точках і допускають регуляризацію у певних просторах узагальнених функцій типу розподілів Соболєва – Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій та ін. Отже, задача Коші для вказаних рівнянь має природну постановку і в класах початкових умов, які є узагальненими функціями скінченного або нескінченного порядків.

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними із сталими або залежними лише від часової змінної коефіцієнтами часто використовуються простори типу S, введені І. М. Гельфандом та Г. Є. Шиловим в [1]. Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x| \to \infty$ спадають швидше, ніж $\exp\{-a|x|\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. У працях [2 – 8] встановлено, що простори типу S та S', топологічно спряжені з просторами типу S, є природними множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними скінченного та нескінченного порядків, при яких розв'язки є цілими функціями за просторовими змінними. Наприклад, для рівняння теплопровідності $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ фундаментальний розв'язок задачі Коші — функція $G(t,x) = (2\sqrt{\pi t})^{-1}\exp\{-x^2/(4t)\}$ при кожному $t > 0$, як функція x, є елементом простору $S^{1/2}_{1/2}$ [7, с. 46], який відноситься до просторів типу S.

Узагальненням задачі Коші для таких рівнянь є нелокальна багатоточкова за часом задача з умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)_{t=t_k} = f, \tag{1}$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1,\ldots,t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ — фіксовані числа (якщо

$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші); при цьому умова (1) трактується у класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f — узагальнена функція. Нелокальні за часом задачі відносяться до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів та задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (теорія фізики плазми, ядерні реакції, поширення електромагнітних хвиль, демографічні дослідження, задачі математичної біології; див., наприклад, [9, 10]).

Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (див., наприклад, [11 – 19]). Одержано важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, вивчено питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовано умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У даній статті досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння $\partial u(t,x)/\partial t = A_\varphi u(t,x)$, $t \in (0,\infty)$, $x \in \mathbb{R}$, у просторах типу S та S', де A_φ — псевдодиференціальний оператор з аналітичним символом φ, який також можна розуміти як оператор диференціювання „нескінченного порядку”:

$$A_\varphi = F^{-1}_{\sigma\to x}[\varphi(\sigma)F_{x\to\sigma}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (id/dx)^k,$$

функція φ — символ оператора A_φ — задовольняє певні умови, які узагальнюють відому умову „параболічності” для параболічних псевдодиференціальних рівнянь, F і F^{-1} — пряме та обернене перетворення Фур'є. Встановлено властивості фундаментального розв'язку нелокальної багаточкової за часом задачі для зазначеного рівняння, доведено коректну розв'язність задачі у півпросторі $t > 0$, знайдено аналітичне зображення розв'язку, досліджено поведінку розв'язку $u(t,\cdot)$ при $t \to +\infty$ (стабілізація розв'язку). Зауважимо, що стабілізація розв'язку вказаної задачі для параболічного типу з оператором диференціювання нескінченного порядку раніше не вивчалася.

Початок досліджень зі стабілізації розв'язків задачі Коші для рівняння теплопровідності було покладено у 50-х роках М. Кжижанським. У праці [20] він побудував приклад обмеженої початкової функції, для якої розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності не має границі при $t \to +\infty$. Ідея конструкції прикладу Кжижанського використовувалася іншими авторами при побудові прикладів, які характеризують поведінку розв'язку в залежності від властивостей початкової функції. У більшості праць, присвячених стабілізації розв'язків задачі Коші, для тих чи інших рівнянь параболічного типу припускається, що початкова функція є звичайною, тобто досліджуються властивості розв'язків класичної задачі Коші. При цьому результати умовно можна поділити на дві групи в залежності від того, обмеженою чи необмеженою є початкова функція. Огляд праць, що стосуються цього питання, наведено в [6, с. 155 – 208].

Тут вивчається питання про слабку стабілізацію до нуля розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі, тобто досліджується стабілізація до нуля розв'язку у тих просторах узагальнених функцій типу S', до яких належить функція f в умові (1). При цьому (1) розуміється в тому сенсі, що для довільної основної функції ψ справджується граничне співвідношення

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lim_{t\to t_k} \langle u(t,\cdot), \psi\rangle = \langle f, \psi\rangle.$$

Зазначимо, що слабка стабілізація розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності досліджувалась у працях [28, 29], основний результат сформульовано в термінах узагальненого граничного кульового середнього $M_\psi(f)$, рівного l, від узагальненої початкової функції $f \in (S_{1/2}(\mathbb{R}^n))'$, вперше введеного у праці [28]:

$$M_\psi(f) = \lim_{R\to+\infty} M_{R,\psi}(f) \equiv \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{mes} K_R(x_0)} \int\limits_{K_R(x_0)} (f*\psi)(x)dx =$$

$$= l \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx, \quad \psi \in S_{1/2}(\mathbb{R}^n),$$

де $K_R(x_0)$ — куля радіуса R з центром у точці x_0, $\operatorname{mes} K_R(x_0)$ — об'єм кулі $K_R(x_0)$, $M_\psi(f)$ не залежить від вибору центра кулі, тобто точки x_0, а якщо $l = 0$, то $M_\psi(f)$ не залежить і від вибору основної функції ψ [28].

1. Простори типу S та S'. І. М. Гельфанд і Г. Є. Шилов у монографії [1] ввели простори нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які є підпросторами простору $S \equiv S(\mathbb{R})$ Л. Шварца швидко спадних на нескінченності функцій. Означимо деякі з них.

Для довільно фіксованих $\alpha, \beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta := \big\{\varphi \in S \mid \exists c > 0\, \exists A > 0\, \exists B > 0\, \forall \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+\, \forall x \in \mathbb{R}\colon$$
$$\big|x^k \varphi^{(m)}(x)\big| \le cA^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\big\}.$$

Простір S_α^β можна охарактеризувати ще й так [1, с. 210]: S_α^β складається з тих і лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$\left|\varphi^{(m)}(x)\right| \le c_1 B_1^m m^{m\beta} \exp\left\{-c_2|x|^{1/\alpha}\right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c_1, B_1, c_2, залежними від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \ge 1-\beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій φ, які допускають аналітичне продовження в комплексну площину і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \le c_3 \exp\left\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\right\}, \quad c_3, a, b > 0, \quad \{x,y\} \subset \mathbb{R}.$$

Простори S_α^β нетривіальні, якщо $\alpha+\beta \ge 1$, для довільних $\alpha, \beta > 0$ правильною є рівність $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$ [2, с. 143–145].

Топологічна структура у просторах S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову

$$\forall \bar{A} > A\, \forall \bar{B} > B\colon \left|x^k \varphi^{(m)}(x)\right| \le c\bar{A}^k \bar{B}^m k^{k\alpha} m^{m\beta}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{\left|x^k \varphi^{(m)}(x)\right|}{(A+\delta)^k (B+\rho)^m k^{k\alpha} m^{m\beta}}, \quad \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots\right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup S_{\alpha,A}^{\beta,B}$. Із результатів, наведених в [1, с. 217–220], випливає, що послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S_\alpha^\beta$ збігається до нуля в цьому просторі, якщо функції φ_ν та їхні похідні довільного порядку збігаються до нуля рівномірно на кожному відрізку $[a, b]$ і при цьому виконуються нерівності

$$\left|x^k \varphi_\nu^{(m)}(x)\right| \leq c A^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}, \quad \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

де сталі c, A, $B > 0$ не залежать від ν.

Функція g називається мультиплікатором у просторі S_α^β, якщо $g\psi \in S_\alpha^\beta$ для довільної функції $\psi \in S_\alpha^\beta$ і відображення $\psi \to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором з S_α^β в S_α^β. Мультиплікатором у просторі S_α^β є нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція g, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists c = c_\varepsilon > 0\, \forall m \in \mathbb{Z}_+\, \forall x \in \mathbb{R}\colon \left|g^{(m)}(x)\right| \leq c_\varepsilon \varepsilon^m m^{m\beta} e^{\varepsilon |x|^{1/\alpha}}.$$

У просторах S_α^β визначена і є неперервною операція зсуву аргумента $T_x\colon \varphi(\xi) \to \to \varphi(\xi + x)$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною [1, с. 171, 172]) у тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду $(\varphi(x+h) - -\varphi(x))h^{-1} \to \varphi'(x)$, $h \to 0$, справджуються для кожної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ в сенсі збіжності за топологією простору S_α^β. У S_α^β визначена і неперервна операція диференціювання. Простори типу S є досконалими [1] (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні); вони тісно пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме, правильною є формула $F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$, де

$$F\left[S_\alpha^\beta\right] := \left\{\psi\colon \psi(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx,\ \varphi \in S_\alpha^\beta\right\}.$$

Символом $\left(S_\alpha^\beta\right)'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Якщо $f \in \left(S_\alpha^\beta\right)'$, то до цього ж простору належать також кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, зсув $f(ay+b)$, $a \neq 0$, добуток αf, де α — мультиплікатор у просторі основних функцій.

Оскільки в основному просторі S_α^β визначено операцію зсуву аргумента T_x, то згортку узагальненої функції $f \in \left(S_\alpha^\beta\right)'$ з основною функцією φ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_{-x} \check{\varphi}(\xi) \rangle \equiv \langle f_\xi, \varphi(x - \xi) \rangle, \quad \check{\varphi}(\xi) := \varphi(-\xi)$$

(тут $\langle f_\xi, T_{-x}\check{\varphi}(\xi)\rangle$ позначає дію функціонала f на основну функцію $T_{-x}\check{\varphi}(\xi)$ як функцію аргумента ξ). Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргумента в просторі S_α^β випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Нехай $f \in \left(S_\alpha^\beta\right)'$. Якщо $f * \varphi \in S_\alpha^\beta \; \forall \varphi \in S_\alpha^\beta$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_α^β, то функціонал f називається згортувачем у просторі S_α^β.

Оскільки $F^{-1}\left[S_\beta^\alpha\right] = S_\alpha^\beta$ (F^{-1} — обернене перетворення Фур'є), а також і $F\left[S_\beta^\alpha\right] = S_\alpha^\beta$, бо кожний простір типу S разом із функцією $\varphi(x)$ містить і функцію $\varphi(-x)$, то перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \left(S_\alpha^\beta\right)'$ означимо за допомогою співвідношення $\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F[\varphi]\rangle$, $\varphi \in S_\alpha^\beta$. Звідси випливає, що $F[f]$ належить $\left(S_\beta^\alpha\right)'$, якщо f належить $\left(S_\alpha^\beta\right)'$.

Якщо узагальнена функція $f \in \left(S_\alpha^\beta\right)'$ — згортувач у просторі S_α^β, то для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ правильною є формула $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$, при цьому $F[f]$ — мультиплікатор у просторі S_β^α [1, с. 179 – 182].

2. Основні результати. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{dt} = A_\varphi u(t,x), \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{2}$$

де A_φ — псевдодиференціальний оператор у просторі $S_{1-\alpha}^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, побудований за функцією φ, яка є мультиплікатором у просторі $S_\alpha^{1-\alpha}$ і такою, що $e^\varphi \in S_\alpha^{1-\alpha}$, тобто $A_\varphi \psi = F^{-1}[\varphi(\sigma)F[\psi]] \; \forall \psi \in S_{1-\alpha}^\alpha$. Із властивостей перетворення Фур'є у просторах типу S та властивостей функції φ випливає, що A_φ — лінійний неперервний оператор. Зазначимо, що A_φ можна також розуміти як оператор диференціювання „нескінченного порядку". Справді, із обмежень на функцію-символ φ випливає, що φ допускає аналітичне продовження в усю комплексну площину. Нехай $\varphi(\sigma) = \sum_{k=0}^\infty c_k \sigma^k$. Тоді для довільної функції $\psi \in S_{1-\alpha}^\alpha$ маємо

$$A_\varphi \psi(x) = F^{-1}_{\sigma\to x}\left[\varphi(\sigma) F_{x\to\sigma}[\psi](\sigma)\right](x) = F^{-1}\left[\sum_{k=0}^\infty c_k \sigma^k F[\psi]\right] = F^{-1}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n c_k \sigma^k F[\psi]\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n c_k F^{-1}\left[\sigma^k F[\psi]\right] = \sum_{k=0}^\infty c_k \left[(iD_x)^k \psi\right](x), \quad D_x = \frac{d}{dx}. \tag{3}$$

Тут ми скористалися формулами, що пов'язують перетворення Фур'є з операцією диференціювання, а саме

$$D_x^m F[\psi] = F\left[(ix)^m \psi\right], \quad F\left[D_x^m \psi\right](x) = (-ix)^m F[\psi](x), \quad D_x^m \psi = F^{-1}\left[(-ix)^m F[\psi]\right].$$

Коректність проведення в (3) перетворень випливає із співвідношення

$$r_{n,\psi}(\sigma) = \sum_{k=n+1}^\infty c_k \sigma^k F[\psi](\sigma) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

яка справджується у просторі $S_{\alpha}^{1-\alpha}$. При доведенні співвідношення (4) використовуються властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S, а також обмеження на параметр α.

Символом $P_{\alpha}^{1-\alpha}$ позначатимемо клас функцій (символів) φ, які задовольняють сформульовані вище умови. Наприклад, нехай $\varphi(x) = P(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє умову

$$\exists c > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\colon \operatorname{Re} P(x) \leq -c|x|^{2b}.$$

Очевидно, що P — мультиплікатор у просторі $S_{\alpha}^{1-\alpha}$, де $\alpha = \dfrac{1}{2b}$. Крім того,

$$\left|e^{P(x)}\right| = e^{\operatorname{Re} P(x)} \leq e^{-c|x|^{2b}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\exists c_1 > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}\colon \left|e^{P(z)}\right| \leq e^{|P(z)|} \leq e^{c_1|z|^{2b}}.$$

Тоді з огляду на теореми 1–3 з [1, с. 252–260], які є узагальненнями теореми Фрагмена–Ліндельофа, дістанемо, що ціла функція $e^{P(z)}$ у комплексній площині задовольняє нерівність

$$\left|e^{P(z)}\right| \leq c_0 e^{-c_2|x|^{2b} + c_3|y|^{2b}}, \quad c_0, c_2, c_3 > 0.$$

З останньої нерівності та характеристики просторів S_{α}^{β} випливає, що $e^{P(z)} \in S_{\alpha}^{1-\alpha}$, $\alpha = \dfrac{1}{2b}$. Зазначимо також, що рівняння (2) у даному випадку набирає вигляду $\dfrac{\partial u}{\partial t} = P(iD_x)u$ і є рівнянням, параболічним за Петровським, а умови на функцію-символ φ є певними аналогами умови „параболічності" для еволюційних рівнянь з частинними похідними.

Для рівняння (2) задамо нелокальну багатоточкову за часом задачу

$$\mu u(t,\cdot)\big|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)\big|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m u(t,\cdot)\big|_{t=t_m} = f, \tag{5}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, +\infty)$ — фіксовані числа, причому

$$\mu > m \sum_{k=1}^{m} \mu_k, \quad 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < +\infty, \quad f \in S_{1-\alpha}^{\alpha}.$$

Класичний розв'язок $u \in C^1((0, +\infty), S_{1-\alpha}^{\alpha})$ задачі (2), (5) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є у вигляді $u(t,x) = F^{-1}[v(t,\cdot)]$. Для функції $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ дістанемо задачу з параметром σ:

$$\frac{\partial v(t,\sigma)}{\partial t} = \varphi(\sigma) v(t,\sigma), \quad (t,\sigma) \in \Omega, \tag{6}$$

$$\mu v(t,\sigma)\big|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k v(t,\sigma)\Big|_{t=t_k} = \widetilde{f}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $\widetilde{f}(\sigma) = F^{-1}[f](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (6) має вигляд

$$v(t,\sigma) = c\exp\{t\varphi(\sigma)\}, \quad (t,\sigma) \in \Omega, \tag{8}$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (7). Підставивши (8) у (7), знайдемо

$$c = \widetilde{f}(\sigma)\left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \exp\{t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1}, \quad \sigma \subset \mathbb{R}.$$

Отже, формальним розв'язком задачі (2), (5) є функція

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} v(t,\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma.$$

Введемо позначення $G(t,x) = F^{-1}\left[Q(t,\sigma)\right](x)$, де

$$Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma),$$

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\},$$

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \exp\{t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1} \equiv \left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1}.$$

Тоді, міркуючи формально, отримуємо

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x)*f(x), \quad (t,x) \in \Omega.$$

Справді,

$$u(t,x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{-i\sigma\xi}d\xi\right)e^{i\sigma x}d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\left((2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)e^{i\sigma(x-\xi)}d\sigma\right)f(\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x)*f(x), \quad (t,x) \in \Omega. \tag{9}$$

Коректність проведення тут перетворень та збіжність відповідних інтегралів, а отже, правильність формули (9) випливають із властивостей функції G, які ми наведемо нижче. Властивості функції G пов'язані з властивостями функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$.

Отже, передусім дослідимо властивості функції $Q(t,\sigma)$ як функції аргумента σ.

Оскільки φ належить $P_\alpha^{1-\alpha}$, то існують числа c_0, a, $b > 0$ такі, що

$$\left|e^{\varphi(z)}\right| \leq c_0 \exp\left\{-a|\sigma|^{1/\alpha} + b|\tau|^{1/\alpha}\right\}, \quad z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}.$$

Далі вважатимемо, що стала $c_0 > 0$ задовольняє умову $c_0 \leq 1$. Тоді

$$\left|e^{t\varphi(z)}\right| = \left|e^{\varphi(z)}\right|^t \leq \left[c_0 \exp\left\{-a|\sigma|^{1/\alpha} + b|\tau|^{1/\alpha}\right\}\right]^t \leq \exp\left\{-at|\sigma|^{1/\alpha} + bt|\tau|^{1/\alpha}\right\}. \qquad (10)$$

Із нерівності (10) випливає, що $Q_1(t,\cdot)$ належить $S_\alpha^{1-\alpha}$ при кожному $t \in (0,+\infty)$.

Лема 1. *Нехай φ належить $P_\alpha^{1-\alpha}$. Для функції $Q_1(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\}$, $t > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, та її похідних (за змінною σ) правильними є оцінки*

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq cA^s t^{s\alpha} s^{s(1-\alpha)} \exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \qquad (11)$$

де сталі c, A, $a_1 > 0$ не залежать від t.

Доведення. Внаслідок інтегральної формули Коші

$$D_\sigma^s Q_1(t,\sigma) = \frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{Q_1(t,z)}{(z-\sigma)^{s+1}}\,dz, \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $\sigma \in \mathbb{R}$. Використовуючи (10), отримуємо нерівності

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \leq \frac{s!}{R^s}\max_{z\in\Gamma_R}|Q_1(t,z)| \leq \frac{s!}{R^s}\exp\left\{-at|\sigma_0|^{1/\alpha} + btR^{1/\alpha}\right\},$$

де σ_0 — точка максимуму функції $\exp\{-at|\xi|^{1/\alpha}\}$, $\xi \in [\sigma - R, \sigma + R]$. Зауважимо, що

$$\sigma_0 = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad |\sigma| \leq R, \\ \sigma + R, & \text{якщо} \quad \sigma \leq -R, \\ \sigma - R, & \text{якщо} \quad \sigma \geq R. \end{cases}$$

Оскільки $\alpha \in (0,1)$, то $1/\alpha - 1 > 0$, тому $\xi^{1/\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^\xi \tau^{1/\alpha-1}\,d\tau$.

Отже, $M(\xi) = \xi^{1/\alpha}$ є опуклою донизу на проміжку $(0,+\infty)$ функцією, яка задовольняє нерівність вигляду

$$M(\xi_1) + M(\xi_2) \leq M(\xi_1 + \xi_2), \quad \xi_1, \xi_2 \in (0,+\infty)$$

(див. [30, с. 8]), або нерівність $M(\xi_1) - M(\xi_1 + \xi_2) \leq -M(\xi_2)$. Звідси випливає існування таких сталих $\tilde{a} > 0$, $\tilde{\tilde{a}} > 0$, що

$$\exp\{-M(\sigma_0)\} \leq \exp\{-M(\tilde{a}\sigma) + M(\tilde{\tilde{a}}R)\} \quad \forall R > 0, \quad \sigma \geq 0$$

(див. також [1, с. 259]). Отже, виконується нерівність

$$\exp\left\{-at\,|\sigma_0|^{1/\alpha}\right\} \leq \exp\left\{-a_1 t\,|\sigma|^{1/\alpha} + a_2 tR^{1/\alpha}\right\}, \quad a_1, a_2 > 0.$$

Тоді

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le \frac{s!}{R^s} \exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha} + b_1 t R^{1/\alpha}\right\}, \ b_1 = b + a_2, \ s \in \mathbb{Z}_+, \ t > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Для кожного $s \in \mathbb{Z}_+$ функція $g_{s,t}(R) = R^{-s} \exp\{b_1 t R^{1/\alpha}\}$ є диференційовною на $(0, +\infty)$, до того ж

$$\lim_{R \to +\infty} g_{s,t}(R) = +\infty, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad \lim_{R \to +0} g_{s,t}(R) = \begin{cases} +\infty, & s \in \mathbb{N}, \\ 1, & s = 0. \end{cases}$$

Оскільки $g_{s,t}(R) > 0$, $R \in (0, +\infty)$, то ця функція досягає свого інфімуму, який знаходимо за допомогою методів диференціального числення:

$$\inf_{R>0} g_{s,t}(R) = \omega^s t^{\alpha s} s^{-\alpha s}, \quad \omega = \left(\frac{b_1 e}{\alpha}\right)^\alpha.$$

Таким чином,

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le s! \inf g_{s,t}(R) \exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\} = s! \omega^s t^{\alpha s} s^{-\alpha s} \exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+.$$

На підставі формули Стірлінга переконуємося, що при фіксованому $s \in \mathbb{Z}_+$ виконується нерівність

$$|D_\sigma^s Q_1(t,\sigma)| \le c A^s t^{s\alpha} s^{s(1-\alpha)} \exp\left\{-a_1 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\}, \quad t \in (0, +\infty), \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

де сталі $c, A, a_1 > 0$ не залежать від t.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Функція Q_2 — мультиплікатор у просторі $S_\alpha^{1-\alpha}$.*

Доведення. З урахуванням (10) виконуються нерівності

$$Q_1(t_k, \sigma) \le \exp\left\{-a t_k |\sigma|^{1/\alpha}\right\} \le 1, \quad k \in \{1, \ldots, m\}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, то

$$\frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \sigma) \le \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k < 1.$$

Тоді, використовуючи поліноміальну формулу, знаходимо

$$Q_2(\sigma) = \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k, \sigma)\right)^{-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^\infty \mu^{-r} \left(\sum_{k=1}^m \mu_k e^{t_k \varphi(\sigma)}\right)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \ldots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} \left(\mu_1 e^{t_1 \varphi(\sigma)}\right)^{r_1} \ldots \left(\mu_m e^{t_m \varphi(\sigma)}\right)^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \ldots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} \mu_1^{r_1} \ldots \mu_m^{r_m} Q_1(\lambda, \sigma),$$

де $\lambda := t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m$, $Q_1(\lambda, \sigma) = e^{\lambda \varphi(\sigma)}$. Звідси та з (11) випливають нерівності

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \leq c A^s s^{s(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} \mu_0^r \lambda^{s\alpha} \times$$

$$\times \exp\{-\lambda a_1 |\sigma|^{1/\alpha}\} \leq c A^s t_m^{s\alpha} s^{s(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \mu_0^r r^s \times$$

$$\times \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!}, \quad s \in \mathbb{N},$$

де $\mu_0 = \max\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$. Далі скористаємося тим, що

$$\sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} = m^r.$$

Тоді

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \leq c' A_1^s s^{s(1-\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} \widetilde{\mu}^r r^s = \widetilde{c} A_1^s s^{s(1-\alpha)}, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

де $\widetilde{\mu} = \mu^{-1} \mu_0 m < 1$, $c' = c\mu^{-1}$, $\widetilde{c} = c' \sum_{r=0}^{\infty} \widetilde{\mu}^r r^s$, $A_1 = A t_m^\alpha$. З останньої нерівності та обмеженості функції Q_2 на $\mathbb{R}$ випливає, що Q_2 — мультиплікатор у просторі $S_\alpha^{1-\alpha}$.

Лему 2 доведено.

На підставі лем 1 та 2 робимо висновок, що функція $Q(t, \sigma)$, як функція σ, є елементом простору $S_\alpha^{1-\alpha}$ (при кожному $t > 0$). Урахувавши (11), (12) та формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, знайдемо

$$|D_\sigma^s Q(t, \sigma)| = \left| \sum_{l=0}^{s} C_s^l D_\sigma^l Q_1(t, \sigma) D_\sigma^{s-l} Q_2(\sigma) \right| \leq$$

$$\leq c\widetilde{c} \sum_{l=0}^{s} C_s^l A^l t^{l\alpha} l^{l(1-\alpha)} A_1^{s-l} (s-l)^{(s-l)(1-\alpha)} \exp\left\{-a_1 t |\sigma|^{1/\alpha}\right\} \leq$$

$$\leq \widetilde{b} \widetilde{B}^s s^{s(1-\alpha)} t^{s\alpha} \exp\left\{-a_1 t |\sigma|^{1/\alpha}\right\} \quad \text{при} \quad t > 1, \tag{13}$$

де $\widetilde{b} = c\widetilde{c}$, $\widetilde{B} = 2\max\{A, A_1\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Із урахуванням властивостей перетворення Фур'є та співвідношення $S_{1-\alpha}^{\alpha} = F^{-1}\left[S_\alpha^{1-\alpha}\right]$ отримуємо, що $G(t, \cdot)$ належить $S_{1-\alpha}^{\alpha}$ при кожному $t \in (0, +\infty)$. Виділимо в оцінках функції G та її похідних (за змінною x) залежність від параметра t, якщо $t > 1$. Для цього скористаємось співвідношенням

$$x^k D_x^s F[g](x) = i^{k+s} F[(\sigma^s g(\sigma))^{(k)}] = i^{k+s} \int_{\mathbb{R}} (\sigma^s g(\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma, \quad \{k, s\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad g \in S_\alpha^{1-\alpha}.$$

Отже,

$$x^k D_x^s G(t,x) = (2\pi)^{-1} i^{k+s} (-1)^s \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma}\, d\sigma.$$

У роботі [1, c. 243] доведено, що послідовність $m_{kn} = k^{k(1-\alpha)} n^{n\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, задовольняє нерівність

$$kn \,\frac{m_{k-1,n-1}}{m_{kn}} \le \gamma(k+n), \quad \gamma > 0.$$

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, оцінки (13) та останню нерівність, знайдемо

$$\begin{aligned}
\left|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}\right| &= \left|\sum_{p=0}^{k} C_k^p \,(\sigma^s)^{(p)}\, Q^{(k-p)}(t,-\sigma)\right| \le \left|\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)\right| + \\
&\quad + ks\left|\sigma^{s-1} Q^{(k-1)}(t,-\sigma)\right| + \frac{k(k-1)}{2!}\, s(s-1)\left|\sigma^{s-2} Q^{(k-2)}(t,-\sigma)\right| + \ldots \le \\
&\le \widetilde{b} A^s \widetilde{B}^k k^{k(1-\alpha)} t^{k\alpha} s^{s\alpha} t^{-s\alpha} \exp\left\{-\frac{a_1}{2} t|\sigma|^{1/\alpha}\right\} \times \\
&\quad \times \left(1 + \frac{ks}{AB}\,\frac{m_{s-1,k-1}}{m_{sk}} + \frac{1}{2!}\,\frac{ks}{A^2B^2}\,\frac{m_{s-1,k-1}}{m_{sk}}\,(k-1)\,(s-1)\,\frac{m_{s-2,k-2}}{m_{s-1,k-1}} + \ldots\right) \le \\
&\le \widetilde{b} A^s \widetilde{B}^k t^{k\alpha} t^{-s\alpha} k^{k(1-\alpha)} s^{s\alpha} \exp\left\{-\frac{a_1}{2} t|\sigma|^{1/\alpha}\right\} \times \\
&\quad \times \left(1 + \frac{\gamma}{AB}(k+s) + \frac{1}{2!}\,\frac{\gamma^2}{A^2B^2}(k+s)^2 + \ldots\right) \le \\
&\le \widetilde{b} A^s \widetilde{B}^k t^{k\alpha} t^{-s\alpha} k^{k(1-\alpha)} s^{s\alpha} \exp\left\{\frac{\gamma}{AB}(k+s)\right\} \exp\left\{-\frac{a_1}{2}\, t|\sigma|^{1/\alpha}\right\} \le \\
&\le c A_1^s B_1^s t^{k\alpha} t^{-s\alpha} k^{k(1-\alpha)} s^{s\alpha} \exp\left\{-a_0 t|\sigma|^{1/\alpha}\right\} \quad \text{при} \quad t > 1,
\end{aligned}$$

$$A_1 = A\exp\left(\frac{\gamma}{AB}\right), \quad B_1 = \widetilde{B}\exp\left(\frac{\gamma}{AB}\right), \quad a_0 = \frac{a_1}{2}, \quad c = \widetilde{b}.$$

Отже,

$$\left|x^k D_x^s G(t,x)\right| \le c_1 A_1^s B_1^k t^{-(s+1)\alpha} t^{k\alpha} k^{k(1-\alpha)} s^{s\alpha}, \quad \{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad t > 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
|D_x^s G(t,x)| &\le c_1 A_1^s s^{s\alpha} t^{-(s+1)\alpha} \inf_k \frac{B_1^k k^{k(1-\alpha)}}{(t^{-\alpha}|x|)^k} \le \\
&\le \widetilde{c} A_1^s s^{s\alpha} t^{-(s+1)\alpha} \exp\left\{-d_0 (t^{-\alpha}|x|)^{1/(1-\alpha)}\right\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad t > 1,
\end{aligned}$$

сталі $\widetilde{c}, A_1, d_0 > 0$ не залежать від t. Тут ми скористалися відомою нерівністю з [1, с. 204]

$$\inf_k \frac{L^k k^{k\omega}}{|x|^k} \le L_0 \exp\left\{-l|x|^{1/\omega}\right\}, \quad L_0, l > 0.$$

Таким чином, правильним є таке твердження.

Лема 3. *Для функції $G(t,x)$, $t > 1$, $x \in \mathbb{R}$, та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності*

$$|D_x^s G(t,x)| \le \widetilde{c} A_1^s s^{s\alpha} t^{-(s+1)\alpha} \exp\left\{-d_0(t^{-\alpha}|x|)^{1/(1-\alpha)}\right\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{14}$$

де сталі $\widetilde{c}$, A_1, d_0 не залежать від t.

Лема 4. *Функція $G(t,x)$, $t \in (0,+\infty)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі $S^\alpha_{1-\alpha}$, диференційовна по t.*

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S випливає, що для доведення твердження досить показати, що функція $F[G(t,x)] = Q(t,\sigma)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі $F\left[S^\alpha_{1-\alpha}\right] = S^{1-\alpha}_\alpha$, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}\left[Q(t+\Delta t,\sigma) - Q(t,\sigma)\right] \to \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma), \quad \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що:

1) $D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} D^s_\sigma(-\varphi(\sigma)Q(t,\sigma))$, $s \in \mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \subset \mathbb{R}$;

2) $|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \bar{c}\bar{B}^s s^{s(1-\alpha)} \exp\left\{-\bar{a}|\sigma|^{1/\alpha}\right\}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $\bar{c}, \bar{a}, \bar{B} > 0$ не залежать від Δt, якщо Δt є досить малим.

Функція $Q(t,\sigma)$, $(t,\sigma) \in \Omega$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому за теоремою Лагранжа про скінченні простори,

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = \varphi(\sigma) Q(t + \theta\Delta t, \sigma), \quad 0 < \theta < 1.$$

Отже,

$$D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) = \sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma \varphi(\sigma) D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) \tag{15}$$

і

$$D^s_\sigma \left(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right) = \sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_s \varphi(\sigma) \left[D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma)\right].$$

Оскільки

$$D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma) = D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

то звідси та з оцінок (14) випливає, що

$$D_\sigma^{s-l+1}Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t \to 0, \quad \Delta t \to 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тоді і $D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D_\sigma^s\left(\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\right)$ при $\Delta t \to 0$ рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Отже, умова 1 виконується.

Доведемо, що виконується умова 2. Оскільки, за умовою, функція φ — мультиплікатор у просторі $S_\alpha^{1-\alpha}$, то (див. [1])

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 \ \forall s \in \mathbb{Z}_+ \ \forall\sigma \in \mathbb{R}\colon \ |D_\sigma^s\varphi(\sigma)| \le c_\varepsilon\varepsilon^s s^{s(1-\alpha)}e^{\varepsilon|\sigma|^{1/\alpha}}. \tag{16}$$

Врахувавши (15), (16), а також оцінки, які задовольняють похідні функції $Q(t,\sigma)$, знайдемо

$$|D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \tilde{b}c_\varepsilon\sum_{l=0}^{s}C_s^l\varepsilon^l l^{l(1-\alpha)}\widetilde{B}^{s-l}(s-l)^{(s-l)(1-\alpha)}(t+\theta\Delta t)^{(s-l)\alpha}\times$$

$$\times\exp\left\{-a_1(t+\theta\Delta t)|\sigma|^{1/\alpha}\right\}\exp\left\{\varepsilon|\sigma|^{1/\alpha}\right\}.$$

Візьмемо $\varepsilon = \dfrac{a_1t}{2}$. Тоді

$$|D_\sigma^s\Phi_{\Delta t}(\sigma)| \le \widetilde{c}\widetilde{B}^s s^{s(1-\alpha)}\exp\left\{-\widetilde{a}|\sigma|^{1/\alpha}\right\},$$

де $\widetilde{c} = \widetilde{b}c_\varepsilon$, $\widetilde{B} = 2\max\{\varepsilon,\widetilde{B}\}$, $\widetilde{a} = a_1t/2$, причому всі сталі не залежать від Δt.

Лему 3 доведено.

Наслідок 1. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f * G(t,x)\right) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t} \quad \forall f \in \left(S_{1-\alpha}^{\alpha}\right)', \quad t > 0.$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо

$$f * G(t,\cdot) = \left\langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\right\rangle, \quad \check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f * G(t,\cdot)\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[f * G(t+\Delta t,\cdot) - f * G(t,\cdot)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t}\left[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)\right]\right\rangle.$$

На підставі леми 4 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}\left[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)\right] \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\check{G}(t,\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $S^{\alpha}_{1-\alpha}$, тому з урахуванням неперервності функціонала f

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(f * G(t,\cdot)) = \left\langle f_\xi, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\,\left[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\xi) - T_{-x}\check{G}(t,\xi)\right]\right\rangle =$$

$$= \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t}\,T_{-x}\check{G}(t,\xi)\right\rangle = \left\langle f_\xi, T_{-x}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\check{G}(t,\xi)\right\rangle = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

що й потрібно було довести.

Лема 5. *У просторі* $\left(S^{\alpha}_{1-\alpha}\right)'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu\lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l} G(t,\cdot) = \delta, \tag{17}$$

де δ *— дельта-функція Дірака.*

Доведення. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Фур'є та функції $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t зі значеннями у просторі $S^{\alpha}_{1-\alpha}$, співвідношення (17) замінимо граничним співвідношенням

$$\mu\lim_{t\to+0} F[G(t,\cdot)] - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l} F[G(t,\cdot)] = F[\delta] \tag{18}$$

у просторі $\left(S^{1-\alpha}_{\alpha}\right)'$. Урахувавши зображення функції G, співвідношення (18) запишемо у вигляді

$$\mu\lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l} Q(t,\cdot) = 1. \tag{19}$$

Для доведення співвідношення (19) беремо довільну функцію $\psi \in S^{1-\alpha}_{\alpha}$ і, використовуючи теорему про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега та розуміючи $Q(t,\cdot)$ як регулярну узагальнену функцію з простору $\left(S^{1-\alpha}_{\alpha}\right)'$, знаходимо

$$\mu\lim_{t\to+0}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l}\langle Q(t,\cdot),\psi\rangle =$$

$$= \mu\lim_{t\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\lim_{t\to t_l}\int\limits_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\left[\frac{\mu}{\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)} - \sum_{l=1}^{m}\mu_l\,\frac{Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\right]\varphi(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\mu - \sum_{l=1}^{m}\mu_l Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)}\,\psi(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}}\psi(\sigma)\,d\sigma = \langle 1,\psi\rangle.$$

Звідси випливає, що співвідношення (19) виконується у просторі $\left(S_{\alpha}^{1-\alpha}\right)'$, а отже, правильним є співвідношення (17).

Лему 5 доведено.

Символом $\left(S_{1-\alpha}^{\alpha},\ *\right)'$ позначимо клас узагальнених функцій з $\left(S_{1-\alpha}^{\alpha}\right)'$, які є згортувачами у просторі $S_{1-\alpha}^{\alpha}$.

Наслідок 2. *Нехай*

$$\omega(t,x) = f * G(t,x), \quad f \in \left(S_{1-\alpha}^{\alpha},\ *\right)', \quad (t,x) \in \Omega.$$

Тоді у просторі $\left(S_{1-\alpha}^{\alpha}\right)'$ *справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \omega(t,\cdot) = f. \tag{20}$$

Доведення. Оскільки

$$\omega(t,x) = f * G(t,x) = \left\langle f_{\xi}, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\right\rangle, \quad f \in \left(S_{1-\alpha}^{\alpha},\ *\right)',$$

то з властивості неперервності $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями у просторі $S_{1-\alpha}^{\alpha}$, випливає неперервність $\omega(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в цьому ж просторі. Тоді, враховуючи властивість неперервності перетворення Фур'є та формулу $F[f*G] = F[f]F[G] = F[f]Q$, яка є правильною для довільної узагальненої функції f із класу $\left(S_{1-\alpha}^{\alpha},\ *\right)'$, від (20) переходимо до співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} F[\omega(t,\cdot)] - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} F[\omega(t,\cdot)] = F[f]$$

у просторі $\left(S_{\alpha}^{1-\alpha}\right)'$ або

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} Q(t,\cdot) = 1,$$

яке, за доведеним раніше (див. (19)), справджується в цьому просторі. Це доводить, що у просторі $\left(S_{1-\alpha}^{\alpha}\right)'$ співвідношення (20) виконується.

Наслідок 2 доведено.

Функція G є розв'язком рівняння (2). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}[Q(t,\sigma)] = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right].$$

З іншого боку,

$$A_{\varphi} G(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}\left[\varphi(\sigma) F_{x\to\sigma}[G(t,x)]\right] = F^{-1}\left[\varphi(\sigma) Q(t,\sigma)\right] = -F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma)\right].$$

Звідси випливає, що функція G задовольняє рівняння (2).

Далі функцію G називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової (m-точкової) задачі для рівняння (2).

З наслідку 2 випливає, що для рівняння (2) m-точкову за часом задачу можна сформулювати так: знайти розв'язок $u \in C^1\left((0,\infty), S_{1-\alpha}^{\alpha}\right)$ рівняння (2), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, \quad f \in \left(S_{1-\alpha,\ *}^{\alpha}\right)', \tag{21}$$

де граничне співвідношення (21) розглядається у просторі $\left(S_{1-\alpha}^{\alpha}\right)'$ (обмеження на параметри $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m, t_1, \ldots, t_m$ такі ж, як у випадку задачі (2), (5).

Теорема 1. *Нехай стала $c_0 > 0$ в нерівності (10) задовольняє умову $c_0 \le 1$. Нелокальна багатоточкова за часом задача (2), (21) є коректно розв'язною. Розв'язок визначається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

де G — фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі для рівняння (2).

Доведення. Насамперед переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (2). Справді (див. наслідок 1),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(f * G(t,x)\right) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

$$A_\varphi u(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma) F[f * G(t,x)](\sigma)](x).$$

Оскільки f — згортувач у просторі $S_{1-\alpha}^{\alpha}$, то

$$F[f * G(t,x)](\sigma) = F[f](\sigma) F[G(t,x)](\sigma) = F[f](\sigma) Q(t,\sigma).$$

Отже,

$$A_\varphi u(t,x) = F^{-1}[\varphi(\sigma) Q(t,\sigma) F[f](\sigma)](x) = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t,\sigma) F[f](\sigma)\right](x) =$$

$$= F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t} G\right](t,\sigma)\, F[f](\sigma)\right](x) = F^{-1}\left[F\left[f * \frac{\partial G}{\partial t}\right]\right](x) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x), (t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (2). З наслідку 2 випливає, що u задовольняє граничну умову (21) у вказаному сенсі.

Зазначимо також, що u неперервно залежить від функції $f \in \left(S_{1-\alpha,\ *}^{\alpha}\right)'$, оскільки операція згортки має властивість неперервності.

Залишилося переконатися в тому, що задача (2), (21) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A_\varphi^* v = 0, \quad (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R} \equiv \Omega', \quad 0 \le t < t_0 < \infty, \tag{22}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \quad \psi \in \left(S_{1-\alpha,\ *}^{\alpha}\right)', \tag{23}$$

де $A^*_\varphi g = F[\varphi F^{-1}[g]]\ \forall g \in S^\alpha_{1-\alpha}$, A^*_φ — звуження спряженого оператора до оператора A на простір $S^\alpha_{1-\alpha} \subset \left(S^\alpha_{1-\alpha}\right)'$. Умову (23) розуміємо в слабкому сенсі. Задача Коші (22), (23) є розв'язною, при цьому $v(t,\cdot) \in S^\alpha_{1-\alpha}$ при кожному $t \in [0, t_0)$.

Нехай $Q^t_{t_0}\colon \left(S^\alpha_{1-\alpha},\ {}_*\right)' \to S^\alpha_{1-\alpha}$ — оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in \left(S^\alpha_{1-\alpha},\ {}_*\right)'$ розв'язок задачі (22), (23). Оператор $Q^t_{t_0}$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 < \infty$, і має властивості

$$\forall \psi \in \left(S^\alpha_{1-\alpha},\ {}_*\right)' : \frac{dQ^t_{t_0}\psi}{dt} + A^*_\varphi Q^t_{t_0}\psi = 0, \quad \lim_{t\to t_0} Q^t_{t_0}\psi = \psi$$

(границя розглядається у просторі $\left(S^\alpha_{1-\alpha}\right)'$).

Розглянемо розв'язок $u(t,x), (t,x) \in \Omega$, задачі (2), (21), який розумітимемо як регулярний функціонал із простору $\left(S^\alpha_{1-\alpha},\ {}_*\right)' \supset S^\alpha_{1-\alpha}$. Доведемо, що задача (2), (21) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $\left(S^\alpha_{1-\alpha},\ {}_*\right)'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (2) при нульовій граничній умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$ (при кожному $t \in (0,\infty)$). Застосуємо функціонал u до функції $Q^t_{t_0}\psi \in S^\alpha_{1-\alpha}$, де ψ — довільно фіксований елемент із простору $S^\alpha_{1-\alpha} \subset \left(S^\alpha_{1-\alpha},\ {}_*\right)'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (2), (22), отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t}\right\rangle = \left\langle A_\varphi u, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle - \left\langle u, A^*_\varphi Q^t_{t_0}\psi\right\rangle =$$

$$= \left\langle A_\varphi u, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle - \left\langle A_\varphi u, Q^t_{t_0}\psi\right\rangle = 0, \quad t \in [0, t_0).$$

Звідси випливає, що $\left\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\right\rangle$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t\to t_0}\left\langle u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi\right\rangle = \langle u(t,\cdot), \psi\rangle = \mathrm{const} \equiv c$$

у довільній точці $t_0 \in (0,\infty)$. Отже, якщо в (21) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot), \psi\rangle - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k}\langle u(t,\cdot), \psi\rangle = c\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k\right) = 0,$$

тобто $c = 0$. Таким чином, $\langle u(t_0,\cdot), \psi\rangle = 0$ для довільного $\psi \in S^\alpha_{1-\alpha}$, тобто $u(t_0,x)$ — нульовий функціонал із простору $\left(S^\alpha_{1-\alpha},\ {}_*\right)'$. Оскільки $t_0 \in (0,\infty)$ і t_0 вибрано довільним чином, то $u(t,\cdot) \equiv 0$ для всіх $t \in (0,\infty)$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Розв'язок $u(t,x)$ нелокальної багатоточкової за часом задачі (2), (21) стабілізується до нуля при $t \to +\infty$ у просторі $\left(S^\alpha_{1-\alpha}\right)'$.*

Доведення. Нагадаємо, що розв'язок задачі (2), (21) визначається формулою

$$u(t,x) = f * G(t,x) = \left\langle f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi)\right\rangle = \langle f_\xi, G(t, x-\xi)\rangle,$$

де G — фундаментальний розв'язок зазначеної задачі, $\check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi)$, T_{-x} — оператор зсуву аргумента у просторі $S^\alpha_{1-\alpha}$.

Нехай $\psi \in S^{\alpha}_{1-\alpha}$. Покладемо

$$\psi_t(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, x-\xi)\psi(x)\,dx, \quad \psi_{t,R}(\xi) = \int\limits_{-R}^{R} G(t, x-\xi)\psi(x)\,dx, \quad R > 0, \quad t > 1.$$

У цих позначеннях перевіримо, що: а) при кожному $t \in (0,\infty)$ і довільному $R > 0$ функція $\psi_{t,R}(\xi)$ належить простору $S^{\alpha}_{1-\alpha}$ і $\psi_{t,R}(\xi) \to \psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ у просторі $S^{\alpha}_{1-\alpha}$; б) $\psi_t(\xi) \in S^{\alpha}_{1-\alpha}$ для кожного $t \in (0,\infty)$. Звідси дістаємо

$$\langle u(t,x), \psi(x)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \langle f_\xi, G(t, x-\xi)\rangle\, \psi(x)dx = \left\langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,x)\psi(x+\xi)dx \right\rangle =$$

$$= \left\langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\psi(-(y-\xi))dy \right\rangle =$$

$$= \left\langle f_\xi, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\check{\varphi}(y-\xi)\,dy \right\rangle, \quad \check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$$

(тут $u(t,\cdot)$ трактується як регулярна узагальнена функція з простору $\left(S^{\alpha}_{1-\alpha}\right)'$ при кожному $t > 0$).

Отже, встановимо властивість а). При фіксованих $\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$ маємо

$$\left|\xi^k D^m_\xi \psi_{t,R}(\xi)\right| \le \int\limits_{-R}^{+R} \left|\xi^k \psi(x) D^m_\xi G(t, x-\xi)\right| dx \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\xi^k \psi(\xi+\eta) D^m_\eta G(t,\eta)\right| d\eta.$$

Але $\psi \in S^{\alpha}_{1-\alpha}$ і тому для деяких $c,\, L,\, M > 0$

$$\left|\xi^k D^m_\xi \psi(\xi)\right| \le cL^k M^m k^{k(1-\alpha)} m^{m\alpha}, \quad \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+. \tag{24}$$

Звідси при кожному $\eta \in \mathbb{R}$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\xi^k \psi(\xi+\eta)\right| = \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|(y-\eta)^k \psi(y)\right| = \sup_{y\in\mathbb{R}} \left|\sum_{l=0}^{k} C^l_k y^l (-\eta)^{k-l} \psi(y)\right| \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{k} C^l_k |\eta|^{k-l} \sup_{y\in\mathbb{R}} |y^l \psi(y)| \le c \sum_{l=0}^{k} C^l_k L^l l^{l(1-\alpha)} |\eta|^{k-l}.$$

Далі скористаємося оцінками (14). Тоді

$$\left|\xi^k D_\xi^m \psi_{t,R}(\xi)\right| \le c\sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l l^{l(1-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\eta^{k-l} D_\eta^m G(t,\eta)\right| d\eta \le$$

$$\le c\tilde{c}A_1^m t^{-(m+1)\alpha} m^{m\alpha} \sum_{l=0}^{k} C_k^l L^l l^{l(1-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\left\{-d_0\left(t^{-\alpha}|\eta|\right)^{1/(1-\alpha)}\right\} d\eta.$$

Виконуючи тут заміну змінної інтегрування за формулою $\eta t^{-\alpha} = z$, отримуємо нерівність

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp\left\{-d_0(t^{-\alpha}|\eta|)^{1/(1-\alpha)}\right\} d\eta = t^{(k-l+1)\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |z|^{k-l} \exp\left\{-d_0|z|^{1/(1-\alpha)}\right\} dz =$$

$$= 2t^{(k-l+1)\alpha} \int\limits_{0}^{+\infty} z^{k-l} \exp\left\{-\varepsilon z^{1/(1-\alpha)}\right\} \exp\left\{-(d_0-\varepsilon) z^{1/(1-\alpha)}\right\} dz \le$$

$$\le 2t^{(k-l+1)\alpha} \sup_{z\in[0,+\infty)} \left(z^{k-l} \exp\left\{-\varepsilon z^{1/(1-\alpha)}\right\}\right) \int\limits_{0}^{+\infty} \exp\left\{-(d_0-\varepsilon) z^{1/(1-\alpha)}\right\} dz \le$$

$$\le c_0 t^{(k-l+1)\alpha} L_0^{k-l} (k-l)^{(k-l)(1-\alpha)},$$

$$c_0 = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \exp\left\{-(d_0-\varepsilon) z^{1/(1-\alpha)}\right\} dz, \quad 0 < \varepsilon < d_0, \quad L_0 > 0,$$

L_0 залежить лише від ε та α. Таким чином,

$$\left|\xi^k D_\xi^m \psi_{t,R}(\xi)\right| \le c_0 c\tilde{c}A_1^m t^{-(m+1)\alpha} m^{m\alpha} \sum_{l=0}^{k} C_k^l t^{(k-l+1)\alpha} L_0^{k-l} (k-l)^{(k-l)(1-\alpha)} L^l l^{l(1-\alpha)} \le$$

$$\le c_1 L_1^k A_2^m k^{k(1-\alpha)} m^{m\alpha}, \tag{25}$$

де $c_1 = c_0 c\tilde{c} t^{1-\alpha}$, $L_1 = 2\max\{Lt^\alpha, L_0\}$, $A_2 = A_1 t^{-\alpha}$. Отже, $\psi_{t,R}(\xi) \in S_{1-\alpha}^{\alpha}$ для кожного $t > 1$ і довільного $R > 0$. Далі безпосередньо переконуємось у тому, що $\psi_{t,R}(\xi) \to \psi_t(\xi)$ при $R \to +\infty$ рівномірно по ξ разом з усіма своїми похідними на кожному відрізку $[a,b] \subset \subset \mathbb{R}$. Крім того, сукупність функцій $\xi^k D_\xi^m \psi_{t,R}(\xi)$, $\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+$, є рівномірно обмеженою у просторі $S_{1-\alpha}^{\alpha}$ (ця властивість випливає з оцінок (25), у яких сталі c_1, L_1, $A_2 > 0$ не залежать від R). Це і означає виконання умови а).

З умови а) випливає б), оскільки в досконалому просторі кожна обмежена множина є компактною.

Використовуючи властивості а), б), отримуємо співвідношення

$$\langle u(t,\cdot),\psi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\left(f*\check{\psi}\right)(y)\,dy.$$

Запишемо тепер функцію $\check{\psi}$ у вигляді $\check{\psi}(x) = \check{\psi}_1(x) + \check{\psi}_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, де

$$\check{\psi}_1(x) = \frac{1}{2}\,\left[\check{\psi}(x) + \check{\psi}(-x)\right], \quad \check{\psi}_2(x) = \frac{1}{2}\left[\check{\psi}(x) - \check{\psi}(-x)\right]$$

— відповідно парна та непарна частини функції $\check{\psi}$. Тоді внаслідок властивості лінійної згортки

$$\langle u(t,\cdot),\psi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,-y)\left[(f*\check{\psi}_1)(y) + (f*\check{\psi}_2)(y)\right]\,dy.$$

Зазначимо тепер, що коли g — парна (непарна) функція, то й згортка $f*g$ є парною (непарною) функцією. Справді, нехай, наприклад, g — парна функція. Тоді

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \langle f_\xi, T_{-x}\check{g}(\xi)\rangle = \langle f_\xi, T_{-x}\check{g}(-\xi)\rangle = \langle f_\xi, \check{g}(-\xi-x)\rangle = \\ &= \langle f_\xi, \check{g}(-(\xi+x))\rangle = \langle f_\xi, \check{g}(\xi+x)\rangle = \langle f_\xi, T_x\check{g}(\xi)\rangle = (f*g)(-x).\end{aligned}$$

Випадок непарної функції g розглядається аналогічно. Враховуючи це зауваження, дістаємо

$$\langle u(t,\cdot),\psi\rangle = 2\int\limits_0^\infty \left[G_1(t,-y)(f*\check{\psi}_1)(y) + G_2(t,-y)(f*\check{\psi}_2)(y)\right]dy,$$

де G_1, G_2 — відповідно парна та непарна частини функції G. Далі, не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $G(t,-y)$ є, наприклад, парною функцією змінної y. Тоді

$$\begin{aligned}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle &= 2\int\limits_0^\infty G(t,-y)(f*\check{\psi}_1)(y)\,dy = 2\int\limits_0^\infty G(t,-y)\left(\frac{d}{dy}\int\limits_0^y (f*\check{\psi}_1)(\tau)d\tau\right)dy = \\ &= 2G(t,-y)\int\limits_0^y (f*\check{\psi}_1)(\tau)d\tau\,\Big|_0^\infty + 2\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}G(t,-y)\left(\int\limits_0^y (f*\check{\psi}_1)(\tau)d\tau\right)dy = \\ &= 2\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}G(t,-y)\left(\int\limits_0^y (f*\check{\psi}_1)(\tau)\,d\tau\right)dy.\end{aligned}$$

Тут ми скористались тим, що $G(t,\cdot) \in S_{1-\alpha}^\alpha$ при кожному $t > 0$. Крім того, функціонал f — згортувач у просторі $S_{1-\alpha}^\alpha$, тобто $f*\check{\psi}_1 \in S_{1-\alpha}^\alpha$. Звідси випливає, зокрема, що

$$\left|\left(f*\check{\psi}_1\right)(\tau)\right| \le c\exp\left\{-a|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\}$$

з деякими сталими $c, a > 0$. Отже,

$$\left| \int_0^y (f * \check{\psi}_1)(\tau)\, d\tau \right| \leq \int_0^\infty |(f * \check{\psi}_1)(\tau)| d\tau \leq c \int_0^\infty \exp\left\{-a\tau^{1/(1-\alpha)}\right\} d\tau < +\infty.$$

Зазначимо також, що

$$\int_0^y (f * \check{\psi}_1)(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-y}^y (f * \check{\psi}_1)(\tau)\, d\tau = y M_{y,\check{\psi}_1}(f), \quad y > 0,$$

$$\left| M_{y,\check{\psi}_1(f)} \right| = \frac{1}{2y} \left| \int_{-y}^y (f * \check{\psi}_1)(\tau) d\tau \right| \leq \frac{c}{2y} \int_{-y}^y \exp\left\{-a|\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\} d\tau = \frac{c_2}{y} \to 0, \quad y \to +\infty.$$

Тоді, врахувавши оцінки (14) та останнє співвідношення, знайдемо

$$|\langle u(t,\cdot), \psi\rangle| = 2 \left| \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} G(t,-y) y\, M_{y,\check{\psi}_1}(f)\, dy \right| \leq$$

$$\leq \bar{c} t^{-2\alpha} \int_0^\infty y \exp\left\{-d_0 (t^{-\alpha} y)^{1/(1-\alpha)}\right\} M_{y,\check{\psi}_1}(f)\, dy.$$

Виконаємо заміну змінної інтегрування $y = t^\alpha z$. Тоді

$$|\langle u(t,\cdot), \psi\rangle| \leq \bar{c} \int_0^\infty z \exp\left\{-d_0 z^{1/(1-\alpha)}\right\} M_{t^\alpha z,\check{\psi}_1}(f)\, dz.$$

Оскільки $M_{t^\alpha z,\check{\psi}_1}(f) \to 0$ при $t \to +\infty$, то, перейшовши до границі при $t \to +\infty$ під знаком інтеграла, переконаємося, що $\langle u(t,\cdot), \psi\rangle \to 0$ при $t \to +\infty$ для довільної функції $\psi \in S_{1-\alpha}^\alpha$, що й потрібно було довести.

Теорему 2 доведено.

Якщо узагальнена функція f в умові (21) є фінітною (тобто носій f $(\operatorname{supp} f)$ — обмежена множина в $\mathbb{R}$), то можна говорити про рівномірну стабілізацію до нуля розв'язку задачі (2), (21). Зазначимо також, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторі $S_{1-\alpha}^\alpha$. Ця властивість випливає із загального результату, який відноситься до теорії досконалих просторів (див. [1, с. 173]): якщо Φ — досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі Φ. Фінітні узагальнені функції утворюють досить широкий клас. Зокрема, кожна обмежена замкнена множина $F \subset \mathbb{R}$ є носієм деякої узагальненої функції (див., наприклад, [6, с. 118]).

Теорема 3. *Нехай $u(t,x)$ — розв'язок задачі (2), (21) із граничною функцією f в умові (21), яка є елементом простору $\left(S_{1-\alpha}^\beta\right)' \subset \left(S_{1-\alpha}^\alpha\right)'$, $\beta > 1$, і $\operatorname{supp} f$ — обмежена множина в $\mathbb{R}$. Тоді $u(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай $\operatorname{supp} f \subset [a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$. Розглянемо функцію $\psi \in S^{\beta}_{1-\alpha}$, $\beta > 1$, таку, що $\psi(x) = 1$ для $x \in [a_1, b_1]$, $\operatorname{supp}\psi \subset [a_2, b_2]$. Така функція існує, оскільки простір $S^{\beta}_{1-\alpha}$ при $\beta > 1$ містить фінітні функції [1]. Функції $\psi(\xi)G(t, x-\xi)$, $(1-\psi(\xi))G(t, x-\xi)$, як функції ξ, є елементами простору $S^{\beta}_{1-\alpha}$ (при кожному $t > 0$ та $x \in \mathbb{R}$), тому

$$u(t, x) = \langle f_\xi, \psi(\xi)G(t, x-\xi)\rangle + \langle f_\xi, \gamma(\xi)G(t, x-\xi)\rangle,$$

де $\gamma(\xi) = 1 - \psi(\xi)$. Другий доданок у цій рівності дорівнює нулеві, бо $\operatorname{supp}(\gamma(\xi)G(t, x-\xi)) \cap \operatorname{supp} f = \varnothing$. Тому

$$u(t, x) = t^{-\alpha/2}\left\langle f_\xi, t^{\alpha/2}\psi(\xi)G(t, x-\xi)\right\rangle.$$

Отже, для доведення сформульованого твердження досить показати, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^{\alpha/2}\psi(\xi)G(t, x-\xi)$ є обмеженою у просторі $S^{\beta}_{1-\alpha}$ при великих значеннях t та $x \in \mathbb{R}$, тобто

$$\left|D^m_\xi \Phi_{t,x}(\xi)\right| \le cB^m m^{m\beta}\exp\left\{-a|\xi|^{1/(1-\alpha)}\right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \tag{26}$$

де сталі $c, a, B > 0$ не залежать від t, x і ξ, які змінюються вказаним способом. Оцінку (26) достатньо встановити лише для $\xi \in [a_2, b_2]$, бо $\Phi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [a_2, b_2]$.

Оскільки $\psi \in S^{\beta}_{1-\alpha}$, то

$$\left|D^m_\xi \psi(\xi)\right| \le c_1 B_1^m m^{m\beta}\exp\left\{-a_1|\xi|^{1/(1-\alpha)}\right\}$$

з деякими сталими c_1, a_1, $B_1 > 0$. Звідси та з оцінок (14) (при $t > 1$) випливають нерівності

$$\begin{aligned}\left|D^m_\xi \Phi_{t,x}(\xi)\right| &\le t^{\alpha/2}\left|\sum_{l=0}^{m} C^l_m D^l_\xi \psi(\xi) D^{m-l}_\xi G(t, x-\xi)\right| \le \\ &\le c_1\check{c}t^{\alpha/2}\exp\left\{-d_0\left(t^{-\alpha}|x-\xi|\right)^{1/(1-\alpha)} - a_1|\xi|^{1/(1-\alpha)}\right\} \times \\ &\times \sum_{l=0}^{m} C^l_m B_1^l l^{l\beta} t^{-(m-l+1)\alpha} A_1^{m-l}(m-l)^{(m-l)\alpha}.\end{aligned}$$

Врахуємо тепер очевидні нерівності при $t \ge 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\xi \in [a_2, b_2]$:

$$t^{\alpha/2-(m-l+1)\alpha}\exp\left\{-d_0\left(t^{-\alpha}|x-\xi|\right)^{1/(1-\alpha)}\right\} \le 1, \quad l \in \{0, 1, \ldots, m\}.$$

Тоді

$$|D^m_\xi \Phi_{t,x}(\xi)| \le cB^m m^{m\beta}\exp\left\{-a|\xi|^{1/(1-\alpha)}\right\},$$

де $c = c_1\tilde{c}$, $B = 2\max\{A_1, B_1\}$ і всі сталі не залежать від t, x, ξ.

Теорему 3 доведено.

Як приклад розглянемо нелокальну багатоточкову за часом задачу для рівняння (2) з оператором A_φ, побудованим за функцією $\varphi(x) = -x^2$. У цьому випадку

$$A_\varphi = -\left(\frac{id}{dx}\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2},$$

а рівняння (2) — рівняння теплопровідності $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Функція $\varphi(x) = -x^2$ є елементом простору $P_{1/2}^{1/2}$. Справді, $e^{-x^2} \in S_{1/2}^{1/2}$, оскільки

$$\left|e^{-z^2}\right| = \left|e^{-(x+iy)^2}\right| = e^{-x^2+y^2}.$$

Крім того, функція $-x^2$ — мультиплікатор у просторі $S_{1/2}^{1/2}$. Стала c_0 у нерівності (10) дорівнює одиниці, тобто умова $c_0 \leq 1$ виконується. За теоремою 1 нелокальна m-точкова за часом задача у півпросторі $t > 0$ для рівняння теплопровідності є коректно розв'язною, якщо f належить $\left(S_{1/2,*}^{1/2}\right)'$. Скориставшись зображенням функції $Q_2(\sigma)$ у випадку рівняння теплопровідності, знайдемо

$$G(t,x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t\sigma^2} \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k e^{-t_k\sigma^2}\right)^{-1} e^{i\sigma x}\, d\sigma =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t\sigma^2} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1!\ldots r_m!} e^{-(t_1r_1+\ldots+t_mr_m)\sigma^2} e^{i\sigma x}\, d\sigma =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\ldots+r_m=r} \frac{r!\mu_1^{r_1}\ldots\mu_m^{r_m}}{r_1\ldots r_m!} \tilde{G}(t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t, x),$$

де $\tilde{G}(\lambda,x)$, $\lambda = t_1r_1+\ldots+t_mr_m+t$, — фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності, тобто

$$\tilde{G}(\lambda,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\lambda}\right\}.$$

Зокрема, якщо $f = \delta \in \left(S_{1/2,*}^{1/2}\right)'$, то

$$u(t,x) = \delta * G(t,x) = G(t,x).$$

Оскільки $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$, то за теоремою 3 $u(t,x) \to 0$ при $t \to +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$. Якщо $m = 1$ (випадок двоточкової задачі), $f = \delta \in \left(S_{1/2,*}^{1/2}\right)$, то

$$u(t,x) = \frac{1}{2\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^r \frac{1}{\sqrt{\pi(t+rt_1)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4(t+rt_1)}\right\}, \quad \mu > \mu_1.$$

Література

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958. — 307 с.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1984. — 284 с.
3. *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I.* Boundary value problems for operator diferential equations. — Dordrecht etc.: Kluwer, 1991. — 374 p.
4. *Кашпировский А. И.* Граничные значения решений некоторых классов однородных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1981. — 18 с.
5. *Горбачук М. Л., Дудников П. И.* О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно дифференцируемы // Докл. АН СССР. Сер. А. — 1981. — № 4. — С. 9 – 11.
6. *Городецький В. В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. — Чернівці: Рута, 1998. — 225 с.
7. *Городецький В. В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. — Чернівці: Рута, 1998. — 219 с.
8. *Городецький В. В.* Еволюційні рівняння в зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. — Чернівці: Рута, 2008. — 400 с.
9. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.
10. *Белавин И. А., Капица С. П., Курдюмов С. П.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1998. — **38**, № 6. — С. 885 – 902.
11. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. — М.: Наука, 1980. — 208 с.
12. *Романко В. К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. — 1974. — **10**, № 11. — С. 117 – 131.
13. *Романко В. К.* Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений // Мат. заметки. — 1985. — **37**, № 7. — С. 727 – 733.
14. *Макаров А. А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1994. — **30**, № 1. — С. 144 – 150.
15. *Чесалин В. И.* Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. — 1979. — **15**, № 11. — С. 2104 – 2106.
16. *Ильким В. С., Пташник Б. И.* Некоторая нелокальная двухточечная задача для систем уравнений с частными производными // Сиб. мат. журн. — 2005. — **46**, № 11. — С. 119 – 129.
17. *Lazetic N. L.* On classical solutions of mixed boundary problems for one-demensional parabolic equation of second order // Publ. Inst. Math. — 2000. — **67**. – P. 53 – 75.
18. *Chabrouski J.* On the non-local problems with a functional for parabolic equation // Funkc. ekvacioj. — 1984. — **27**. — P. 101 – 123.
19. *Bouziani A., Benouar N.-E.* Probleme mixed avec conditions integrales pour une class d'equations paraboliques // C. r. Acad. sci. Paris. Ser. J. — 1995. — **321**. — P. 1177 – 1182.
20. *Krzyzanski M.* Sur l'allure asymptotique des potentiels de chaleur et de l'integrall de Forier – Poisson // Ann. polon. math. — 1957. — **3**, № 2. — P. 288 – 289.
21. *Эйдельман С. Д.* Лиувиллевы теоремы и теореми об устойчивости для решений параболических систем // Мат. сб. — 1958. — **44**, № 4. — С. 481 – 508.
22. *Эйдельман С. Д., Порпер Ф. О.* О стабилизации решений задачи Коши для параболических систем // Изв. вузов. Математика. — 1960. — № 4. — С. 210 – 217.
23. *Репников В. Д.* Некоторые теоремы о стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения // Докл. АН СССР. — 1963. — **148**, № 3. — С. 527 – 530.

24. *Репников В. Д., Эйдельман С. Д.* Новое доказательство теоремы о стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности // Мат. сб. — 1967. — **73**, № 1. — С. 155 – 159.

25. *Валицкий Ю. Н., Эйдельман С. Д.* Необходимые и достаточные условия стабилизации положительных решений уравнения теплопроводности // Сиб. мат. журн. — 1976. — **17**, № 4. — С. 744 – 756.

26. *Денисов В. Н.* О связи между стабилизацией интеграла Пуассона, равномерной на каждом компакте, и сходимостью шаровых средних Чезаро – Рисса // Дифференц. уравнения. — 1984. — **20**, № 1. — С. 1940 – 1947.

27. *Денисов В. Н.* О стабилизации интеграла Пуассона на классе растущих функций // Докл. АН СССР. — 1985. — **283**, № 6. — С. 1302 – 1305.

28. *Дрожжинов Ю. М.* Стабилизация решений обобщенной задачи Коши для ультрапараболического уравнения // Докл. АН СССР. Сер. мат. — 1969. — **33**, № 2. — С. 363 – 372.

29. *Дрожжинов Ю. М., Завьялов Б. И.* Квазиасимптотика обобщенных функций и тауберовы теоремы в комплексной области // Мат. сб. — 1977. — **102**, № 3. — С. 379 – 390.

30. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958. — 274 с.

Одержано 21.09.16,
після доопрацювання — 21.04.17