УДК 517.956.3

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ*

А. Т. Асанова

Ин-т математики и мат. моделирования МОН Республики Казахстан
ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Республика Казахстан
e-mail: anarasanova@list.ru
assanova@math.kz

We consider a nonlocal problem with integral conditions for a system of hyperbolic equations with two independent variables. The questions of solvability and constructing algorithms for finding approximate solutions of the considered problem by introduction additional functional parameters are considered. The investigated problem is reduced to an equivalent problem that sonsists of the Goursat problem for a system of hyperbolic equations with parameters and a boundary-value problem with integral condition for a system of ordinary differential equations with respect to the introduced parameters. Algorithms for finding approximate solutions of the problem are proposed on the basis of algorithms for finding solutions to an equivalent problem and prove their convergence to its exact solution.

Розглядається нелокальна задача з інтегральними умовами для системи гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними. Питання розв'язності та побудови алгоритмів для знаходження наближених розв'язків розглядуваної задачі вирішується шляхом уведення додаткових функціональних параметрів. Вказана задача зводиться до еквівалентної задачі, що складається із задачі Гурса для системи гіперболічних рівнянь з параметрами та граничної задачі з інтегральною умовою для системи звичайних диференціальних рівнянь щодо введених параметрів. Запропоновано алгоритми для знаходження наближених розв'язків задачі на основі алгоритмів для розв'язків еквівалентної задачі та доведено їх збіжність до точного розв'язку.

Введение. В настоящей работе рассматривается нелокальная краевая задача для системы гиперболических уравнений с интегральными условиями в области $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$\int\limits_0^a K(t,\xi)u(t,\xi)d\xi = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\int\limits_0^b M(\tau,x)u(\tau,x)d\tau = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $u = \mathrm{col}\,(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $(n \times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ и n-вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на Ω, $(n \times n)$-матрица $K(t,x)$ и n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно

* Выполнена в рамках проекта № 0822 / ГФ 4 по грантовому финансированию МОН Республики Казахстан на 2015 – 2017 гг.

дифференцируемы по t на Ω и $[0,T]$ соответственно, $(n \times n)$-матрица $M(t,x)$ и n-вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы по x на Ω и $[0,\omega]$ соответственно, $0 < a \leq \leq \omega$, $0 < b \leq T$.

Пусть $C(\Omega, R^n)$ — пространство функций $u\colon \Omega \to R^n$, непрерывных на Ω, с нормой $\|u\|_0 = \max_{(t,x)\in\Omega} \|u(t,x)\|$, $\|u(t,x)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|$.

Функция $u(t,x) \in C(\Omega, R^n)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, называется классическим решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет системе уравнений (1) и интегральным условиям (2), (3).

Математическое моделирование различных физических процессов приводит к нелокальным задачам для систем гиперболических уравнений. Задачи с интегральными условиями возникают при исследовании процессов распространения тепла, физики плазмы, технологии очистки кремниевых руд, влагопереноса в капиллярно-пористых средах и др. [1 – 9]. Некоторые классы нелокальных краевых задач с интегральными условиями для уравнений гиперболического типа исследованы в работах [3 – 8, 10 – 18]. Получены условия разрешимости рассматриваемых задач в различных терминах. Нелокальные задачи с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений относятся к малоисследованным задачам математической физики. Можно отметить только работы [4, 10, 11, 17], в которых изучены вопросы однозначной разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений со смешанной производной. Данная постановка задачи рассматривается впервые.

Цель работы — построить алгоритмы нахождения решения задачи (1) – (3), а также установить условия существования и единственности классического решения этой задачи.

В пункте 1 приведена схема применяемого метода [20, 21]. Путем введения новых неизвестных функций, как линейной комбинации значений решения на характеристиках, задача (1) – (3) сводится к эквивалентной задаче, состоящей из задачи Гурса для системы гиперболических уравнений с функциональными параметрами и краевых задач с интегральным условием для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно введенных параметров. Строится алгоритм нахождения приближенного решения исследуемой задачи. Алгоритм состоит из двух частей: в первой части решаются две краевые задачи с интегральным условием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, во второй части — задачи Гурса для системы гиперболических уравнений с параметрами. Краевые задачи с интегральным условием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений интенсивно исследуются в последние годы и находят многочисленные приложения в прикладных задачах [22 – 24]. В работе [22] предложен численный метод решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальным условием, задаваемым интегралом Стильтьеса, на основе решения вспомогательной краевой задачи. В работах [23, 24] предложены методы решения указанной задачи путем перехода к двухточечным краевым задачам для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра.

В пункте 2 исследованы краевые задачи с интегральным условием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Даны условия однозначной разрешимости в терминах фундаментальных матриц дифференциальной части. Далее с помощью метода параметризации [25] сформулированы условия однозначной, корректной разрешимости краевых задач с интегральным условием в терминах исходных данных. Показана эквивалентность условий теорем в терминах фундаментальных матриц и условий теорем в терминах данных задачи. В пункте 3 доказана сходимость алгоритма и приведены условия однозначной разрешимости задачи (1) – (3) в терминах исходных данных.

1. Схема метода и алгоритм. Введем обозначения $\mu(t) = u(t,0) - \dfrac{1}{2}u(0,0)$, $\lambda(x) = u(0,x) - \dfrac{1}{2}u(0,0)$, $\widetilde{u}(t,x)$ — новая неизвестная функция. В задаче (1) – (3) выполним замену искомой функции $u(t,x)$: $u(t,x) = \widetilde{u}(t,x) + \mu(t) + \lambda(x)$ и перейдем к следующей задаче:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + C(t,x)\,\widetilde{u} + A(t,x)\dot{\lambda}(x) + B(t,x)\dot{\mu}(t) + C(t,x)\lambda(x) + C(t,x)\mu(t) + f(t,x), \tag{1.1}$$

$$\widetilde{u}(t,0) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{1.2}$$

$$\widetilde{u}(0,x) = 0, \quad x \in [0,\omega], \tag{1.3}$$

$$\int\limits_0^a K(t,\xi)\,d\xi\mu(t) + \int\limits_0^a K(t,\xi)\widetilde{u}(t,\xi)\,d\xi + \int\limits_0^a K(t,\xi)\lambda(\xi)\,d\xi = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.4}$$

$$\int\limits_0^b M(\tau,x)\,d\tau\lambda(x) + \int\limits_0^b M(\tau,x)\widetilde{u}(\tau,x)\,d\tau + \int\limits_0^b M(\tau,x)\mu(\tau)\,d\tau = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega]. \tag{1.5}$$

Решением задачи (1.1) – (1.5) будем называть тройку функций $(\widetilde{u}(t,x), \mu(t), \lambda(x))$, где функция $\widetilde{u}(t,x)$ принадлежит $C(\Omega, R^n)$, имеет частные производные $\dfrac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\dfrac{\partial \widetilde{u}(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}(t,x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$; функции $\mu(t)$ и $\lambda(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$ и $[0,\omega]$ соответственно, удовлетворяют системе гиперболических уравнений (1.1), условиям на характеристиках (1.2), (1.3) и функциональным соотношениям (1.4), (1.5) при $\mu(0) = \lambda(0)$.

Задачи (1) – (3) и (1.1) – (1.5) эквивалентны. Если функция $u^*(t,x)$ является решением задачи (1) – (3), то тройка функций $(\widetilde{u}^*(t,x), \mu^*(t), \lambda^*(x))$, где $\widetilde{u}^*(t,x) = u^*(t,x) - \mu^*(t) - \lambda^*(x)$, $\mu^*(t) = u^*(t,0) - \dfrac{1}{2}u^*(0,0)$, $\lambda^*(x) = u^*(0,x) - \dfrac{1}{2}u^*(0,0)$, будет решением задачи (1.1) – (1.5). Обратное также справедливо. Если тройка функций $(\widetilde{u}^{**}(t,x), \mu^{**}(t), \lambda^{**}(x))$ является решением задачи (1.1) – (1.5), то функция $u^{**}(t,x)$, определяемая равенством $u^{**}(t,x) = \widetilde{u}^{**}(t,x) + \mu^{**}(t) + \lambda^{**}(x)$, где $u^{**}(t,0) - \dfrac{1}{2}u^{**}(0,0) = \mu^{**}(t)$, $u^{**}(0,x) - \dfrac{1}{2}u^{**}(0,0) = \lambda^{**}(x)$, будет решением задачи (1) – (3).

Задача (1.1) – (1.3) при фиксированных $\mu(t)$, $\lambda(x)$ является задачей Гурса относительно функции $\widetilde{u}(t,x)$ в области Ω, а соотношения (1.4), (1.5) позволяют определить неизвестные параметры $\mu(t)$, $\lambda(x)$, причем функции $\mu(t)$, $\lambda(x)$ удовлетворяют условию $\mu(0) = \lambda(0)$.

Из соотношений (1.4) при $t = 0$ и (1.5) при $x = 0$ с учетом условий (1.2), (1.3) получаем

$$\int\limits_0^a K(0,\xi)\,d\xi\mu(0) + \int\limits_0^a K(0,\xi)\lambda(\xi)\,d\xi = \psi(0), \tag{1.6}$$

$$\int\limits_0^b M(\tau,0)\,d\tau\lambda(0) + \int\limits_0^b M(\tau,0)\mu(\tau)\,d\tau = \varphi(0). \tag{1.7}$$

С учетом условия $\mu(0) = \lambda(0)$ отсюда следует

$$\int\limits_0^a K(0,\xi)\,d\xi\lambda(0) + \int\limits_0^a K(0,\xi)\lambda(\xi)\,d\xi = \psi(0), \tag{1.8}$$

$$\int\limits_0^b M(\tau,0)\,d\tau\mu(0) + \int\limits_0^b M(\tau,0)\mu(\tau)\,d\tau = \varphi(0). \tag{1.9}$$

Продифференцировав соотношения (1.4), (1.5) по t, x соответственно, получим

$$\int\limits_0^a K(t,\xi)d\xi\cdot\dot{\mu}(t) = -\int\limits_0^a \frac{\partial K(t,\xi)}{\partial t}\,d\xi\cdot\mu(t) - \int\limits_0^a \frac{\partial K(t,\xi)}{\partial t}\,\widetilde{u}(t,\xi)\,d\xi -$$

$$-\int\limits_0^a K(t,\xi)\frac{\partial\widetilde{u}(t,\xi)}{\partial t}\,d\xi - \int\limits_0^a \frac{\partial K(t,\xi)}{\partial t}\,\lambda(\xi)\,d\xi + \dot{\psi}(t), \quad t\in[0,T], \tag{1.10}$$

$$\int\limits_0^b M(\tau,x)\,d\tau\cdot\dot{\lambda}(x) = -\int\limits_0^b \frac{\partial M(\tau,x)}{\partial x}\,d\tau\cdot\lambda(x) -$$

$$-\int\limits_0^b \frac{\partial M(\tau,x)}{\partial x}\,\widetilde{u}(\tau,x)\,d\tau - \int\limits_0^b M(\tau,x)\,\frac{\partial\widetilde{u}(\tau,x)}{\partial x}\,d\tau -$$

$$-\int\limits_0^b \frac{\partial M(\tau,x)}{\partial x}\,\mu(\tau)\,d\tau + \dot{\varphi}(x), \quad x\in[0,\omega]. \tag{1.11}$$

Введем новые неизвестные функции $\widetilde{v}(t,x) = \dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial x}$, $\widetilde{w}(t,x) = \dfrac{\partial\widetilde{u}(t,x)}{\partial t}$ и обозначения

$$B_1(t) = \int\limits_0^a K(t,\xi)d\xi, \quad C_1(t) = \int\limits_0^a \frac{\partial K(t,\xi)}{\partial t}d\xi,$$

$$G_1(t,\widetilde{u},\widetilde{w}) = \int\limits_0^a \frac{\partial K(t,\xi)}{\partial t}\,\widetilde{u}(t,\xi)\,d\xi + \int\limits_0^a K(t,\xi)\widetilde{w}(t,\xi)\,d\xi, \quad L_1(t,\lambda) = \int\limits_0^a \frac{\partial K(t,\xi)}{\partial t}\,\lambda(\xi)\,d\xi,$$

$$B_2(x) = \int\limits_0^b M(\tau,x)\,d\tau, \quad C_2(x) = \int\limits_0^b \frac{\partial M(\tau,x)}{\partial x}\,d\tau,$$

$$G_2(x,\widetilde{u},\widetilde{v}) = \int\limits_0^b \frac{\partial M(\tau,x)}{\partial x}\,\widetilde{u}(\tau,x)\,d\tau + \int\limits_0^b M(\tau,x)\widetilde{v}(\tau,x)\,d\tau, \quad L_2(x,\mu) = \int\limits_0^b \frac{\partial M(\tau,x)}{\partial x}\,\mu(\tau)\,d\tau.$$

Тогда системы (1.10) и (1.11) можно записать в виде

$$B_1(t)\dot{\mu}(t) = -C_1(t)\mu(t) - G_1(t,\widetilde{u},\widetilde{w}) - L_1(t,\lambda) + \dot{\psi}(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.12}$$

$$B_2(x)\dot{\lambda}(x) = -C_2(x)\lambda(x) - G_2(x,\widetilde{u},\widetilde{v}) - L_2(x,\mu) + \dot{\varphi}(x), \quad x \in [0,\omega]. \tag{1.13}$$

Таким образом, имеем замкнутую систему уравнений (1.1) – (1.3), (1.12), (1.9), (1.13), (1.8) для определения неизвестных $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$, $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$, $\dot{\mu}(t)$, $\mu(t)$.

Соотношение (1.12) вместе с (1.9) является краевой задачей с интегральным условием для системы дифференциальных уравнений относительно $\mu(t)$, а соотношение (1.12) вместе с (1.8) — краевой задачей с интегральным условием для системы дифференциальных уравнений относительно $\lambda(x)$.

Краевая задача с интегральным условием (1.12), (1.9) эквивалентна соотношению (1.4), а краевая задача с интегральным условием (1.13), (1.8) — соотношению (1.5) при $\mu(0) = \lambda(0)$.

Если известны $\dot{\mu}(t)$, $\dot{\lambda}(x)$, $\mu(t)$, $\lambda(x)$, то из (1.1) – (1.3) находим функции $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$. Обратно, если известны функции $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$, то из краевых задач (1.12), (1.9) и (1.13), (1.8) можем найти $\dot{\mu}(t)$, $\mu(t)$, $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$. Неизвестными являются как $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$, так и $\dot{\mu}(t)$, $\mu(t)$, $\dot{\lambda}(x)$, $\lambda(x)$. Поэтому для нахождения решения задачи (1.1) – (1.5) используется итерационный метод: тройку $(\widetilde{u}^*(t,x), \mu^*(t), \lambda^*(x))$ определяем как предел последовательности $\big(\widetilde{u}^{(k)}(t,x), \mu^{(k)}(t), \lambda^{(k)}(x)\big)$, $k = 0,1,2,\ldots$, по следующему алгоритму:

0-шаг. 1. Полагая в правой части системы (1.12) $\widetilde{u}(t,x) = 0$, $\widetilde{w}(t,x) = 0$, $\lambda(x) = 0$, из краевой задачи с интегральным условием (1.12), (1.9) находим начальные приближения $\dot{\mu}^{(0)}(t)$, $\mu^{(0)}(t)$, $t \in [0,T]$. Полагая в правой части системы (1.13) $\widetilde{u}(t,x) = 0$, $\widetilde{v}(t,x) = 0$, $\mu(t) = 0$, из краевой задачи с интегральным условием (1.13), (1.8) получаем начальные приближения $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$, $\lambda^{(0)}(x)$, $x \in [0,\omega]$. 2. Из задачи Гурса (1.1) – (1.3) при $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(0)}(x)$, $\dot{\mu}(t) = \dot{\mu}^{(0)}(t)$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, $\mu(t) = \mu^{(0)}(t)$ находим $\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$.

1-шаг. 1. Полагая в правой части системы (1.12) $\widetilde{u}(t,x) = \widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x) = \widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, из краевой задачи с интегральным условием (1.12), (1.9) получаем $\dot{\mu}^{(1)}(t)$, $\mu^{(1)}(t)$, $t \in [0,T]$. Полагая в правой части системы (1.13) $\widetilde{u}(t,x) = \widetilde{u}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x) = \widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\mu(t) = \mu^{(0)}(t)$, из краевой задачи с интегральным условием (1.13), (1.8) находим $\dot{\lambda}^{(1)}(x)$, $\lambda^{(1)}(x)$, $x \in [0,\omega]$. 2. Из задачи Гурса (1.1) – (1.3) при $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(1)}(x)$, $\dot{\mu}(t) = \dot{\mu}^{(1)}(t)$, $\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$, $\mu(t) = \mu^{(1)}(t)$ получаем $\widetilde{v}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(1)}(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$. И так далее.

k-шаг. 1. Полагая в правой части системы (1.12) $\widetilde{u}(t,x) = \widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x) = \widetilde{w}^{(k-1)}(t,x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(k-1)}(x)$, из краевой задачи с интегральным условием (1.12), (1.9) находим $\dot{\mu}^{(k)}(t)$, $\mu^{(k)}(t)$, $t \in [0,T]$. Полагая в правой части системы (1.13) $\widetilde{u}(t,x) = \widetilde{u}^{(k-1)}(t,x)$, $\widetilde{v}(t,x) = \widetilde{v}^{(k-1)}(t,x)$, $\mu(t) = \mu^{(k-1)}(t)$, из краевой задачи с интегральным условием (1.13), (1.8) получаем $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$, $\lambda^{(k)}(x)$, $x \in [0,\omega]$. 2. Из задачи Гурса (1.1)–(1.3) при $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(k)}(x)$, $\dot{\mu}(t) = \dot{\mu}^{(k)}(t)$, $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, $\mu(t) = \mu^{(k)}(t)$ находим $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, $k = 1,2,\ldots$.

Построенный алгоритм состоит из двух частей: в первой части решаются краевые задачи с интегральным условием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1.12), (1.9) и (1.13), (1.8), а во второй части — задача Гурса для системы гиперболических уравнений с функциональными параметрами. Каждая из частей алгоритма требует отдельного рассмотрения.

2. Краевая задача с интегральным условием для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим две краевые задачи с интегральным условием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{\mu}(t) = A_1(t)\mu(t) + g_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.1}$$

$$\int_0^b M(\tau,0)\,d\tau\mu(0) + \int_0^b M(\tau,0)\mu(\tau)\,d\tau = \varphi(0), \tag{2.2}$$

где $(n\times n)$-матрица $A_1(t)$ и n-вектор-функция $g_1(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $(n\times n)$-матрица $M(t,x)$ непрерывна на Ω, $\varphi(0)$ — постоянный вектор, $0 < b \le T$;

функция $\mu(t) \in C([0,T],R^n)$, имеющая производную $\dot{\mu}(t) \in C([0,T],R^n)$, называется решением задачи (2.1), (2.2), если она удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1) и краевому условию (2.2);
и

$$\dot{\lambda}(x) = A_2(x)\lambda(x) + g_2(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{2.3}$$

$$\int_0^a K(0,\xi)\,d\xi\,\lambda(0) + \int_0^a K(0,\xi)\lambda(\xi)\,d\xi = \psi(0), \tag{2.4}$$

где $(n\times n)$-матрица $A_2(x)$ и n-вектор-функция $g_2(x)$ непрерывны на $[0,\omega]$, $(n\times n)$-матрица $K(t,x)$ непрерывна на Ω, $\psi(0)$ — постоянный вектор, $0 < a \le \omega$.

Функция $\lambda(x) \in C([0,\omega],R^n)$, имеющая производную $\dot{\lambda}(x) \in C([0,\omega],R^n)$, называется решением задачи (2.3), (2.4), если она удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3) и краевому условию (2.4).

Как было отмечено выше, краевые задачи с нелокальным условием в виде интеграла Стильтьеса для системы обыкновенных дифференциальных уравнений исследовались в работах [22–24]. Результаты указанных работ можно применить для задач (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) при условии, что $\int_0^a K(0,\xi)\,d\xi = 0$ и $\int_0^b M(\tau,0)\,d\tau = 0$ соответственно.

Как известно, решение неоднородной системы (2.1) имеет вид [26, с. 148]

$$\mu(t) = U_1(t,0)\mu(0) + \int_0^t U_1(t,s)g_1(s)\,ds, \tag{2.5}$$

где $U_1(t,0)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{\mu}(t) = A_1(t)\mu(t)$ и $U_1(0,0) = I$ (I — единичная матрица размерности n). Подставляя выражение (2.5) при соответствующих значениях в (2.2), получаем

$$\int_0^b M(\tau,0)[I + U_1(\tau,0)]\,d\tau\mu(0) + \int_0^b M(\tau,0)\int_0^\tau U_1(\tau,s)g_1(s)\,ds\,d\tau = \varphi(0). \tag{2.6}$$

При условии, что матрица $Q_{1,*} = \int_0^b M(\tau,0)[I + U_1(\tau,0)]\,d\tau$ обратима, из (2.6) можно однозначно определить $\mu(0)$:

$$\mu(0) = [Q_{1,*}]^{-1}\left\{\varphi(0) - \int_0^b M(\tau,0)\int_0^\tau U_1(\tau,s)g_1(s)\,ds\,d\tau\right\}. \tag{2.7}$$

Таким образом, при выполнении условия $\det Q_{1,*} \neq 0$ единственное решение задачи (2.1), (2.2) имеет вид

$$\mu(t) = U_1(t,0)[Q_{1,*}]^{-1}\left\{\varphi(0) - \int_0^b M(\tau,0)\int_0^\tau U_1(\tau,s)g_1(s)\,ds\,d\tau\right\} + \\ + \int_0^t U_1(t,s)g_1(s)\,ds. \tag{2.8}$$

Аналогично, решение неоднородной системы (2.3) имеет вид

$$\lambda(x) = U_2(x,0)\lambda(0) + \int_0^x U_2(x,\xi)g_2(\xi)\,d\xi, \tag{2.9}$$

где $U_2(x,0)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{\lambda}(x) = A_2(x)\lambda(x)$ и $U_2(0,0) = I$. Подставляя выражение (2.9) при соответствующих значениях в (2.4), получаем

$$\int_0^a K(0,\xi)[I + U_2(\xi,0)]\,d\xi\lambda(0) + \int_0^a K(0,\xi)\int_0^\xi U_2(\xi,\xi_1)g_2(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi = \psi(0). \tag{2.10}$$

Предположим, что матрица $Q_{2,*} = \int_0^a K(0,\xi)[I + U_2(\xi,0)]\,d\xi$ обратима. Тогда из (2.10) можем однозначно определить $\lambda(0)$:

$$\lambda(0) = [Q_{2,*}]^{-1}\left\{\psi(0) - \int\limits_0^a K(0,\xi)\int\limits_0^\xi U_2(\xi,\xi_1)g_2(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi\right\}. \qquad (2.11)$$

Таким образом, при выполнении условия $\det Q_{2,*} \neq 0$ единственное решение задачи (2.3), (2.4) имеет вид

$$\lambda(x) = U_2(x,0)[Q_{2,*}]^{-1}\left\{\psi(0) - \int\limits_0^a K(0,\xi)\int\limits_0^\xi U_2(\xi,\xi_1)g_2(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi\right\} +$$
$$+ \int\limits_0^x U_2(x,\xi)g_2(\xi)\,d\xi. \qquad (2.12)$$

Теорема 2.1. *Пусть матрица* $Q_{1,*} = \int_0^b M(\tau,0)[I + U_1(\tau,0)]d\tau$ *обратима. Тогда задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение, представимое в виде (2.8).*

Теорема 2.2. *Пусть матрица* $Q_{2,*} = \int_0^a K(0,\xi)[I + U_2(\xi,0)]d\xi$ *обратима. Тогда задача (2.3), (2.4) имеет единственное решение, представимое в виде (2.12).*

Поскольку фундаментальные матрицы $U_1(t,0)$ и $U_2(x,0)$ можно построить лишь в некоторых случаях, проверка условий теорем 2.1 и 2.2 достаточно затруднительна. Поэтому вопросы нахождения условий однозначной разрешимости в терминах данных задач особенно актуальны.

Условия однозначной корректной разрешимости семейства краевых задач с интегральным условием для системы дифференциальных уравнений установлены в работе [17] методом параметризации [25] в случае $b = T$ (или аналогично в случае $a = \omega$).

Метод параметризации был предложен для исследования и решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе этого метода были получены необходимые и достаточные условия однозначной корректной разрешимости рассматриваемой задачи в терминах исходных данных, построены алгоритмы нахождения решения исследуемой задачи и доказана их сходимость. Суть метода заключается в сведении исследуемой задачи к эквивалентной задаче на подынтервалах $[t_{r-1},t_r)$ (или $[x_{r-1},x_r)$), $r = \overline{1,N}$, и введении дополнительных параметров как значений искомой функции в начальных точках t_{r-1} (или x_{r-1}). Здесь $\bigcup\limits_{r=1}^N [t_{r-1},t_r) = [0,T)$, $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ $\left(\text{или } \bigcup\limits_{r=1}^N [x_{r-1},x_r) = [0,\omega),\ x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_N = \omega\right)$. Свойства решения рассматриваемой задачи переходят в свойства введенных параметров. Эквивалентная задача состоит из задач Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами на $[t_{r-1},t_r)$ (или $[x_{r-1},x_r)$) из системы алгебраических уравнений относительно параметров.

Приведем условия однозначной разрешимости задач (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) при отсутствии разбиения промежутков $[0, T]$ и $[0, \omega]$ соответственно.

Пусть

$$D_{1,\nu}(t) = I + \int_0^t A_1(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t A_1(\tau_1) \int_0^{\tau_1} A_1(\tau_2)\, d\tau_2\, d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int_0^t A_1(\tau_1) \ldots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A_1(\tau_{\nu-1}) \int_0^{\tau_{\nu-1}} A_1(\tau_\nu)\, d\tau_\nu \ldots d\tau_1, \quad \nu \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (2.1), (2.2), а также оценку решения устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть при некотором* $\nu, \nu \in \mathbb{N}$, *матрица* $Q_{1,\nu} = \int_0^b M(\tau, 0)[I + D_{1,\nu}(\tau)]\, d\tau$ *обратима и выполняются неравенства:*

i) $\left\|[Q_{1,\nu}]^{-1}\right\| \leq \gamma_{1,\nu}$, *где* $\gamma_{1,\nu}$ *— положительная постоянная;*

ii) $q_{1,\nu} = \gamma_{1,\nu} b \max_{t\in[0,b]} \|M(t, 0)\| \left[e^{\alpha_1 b} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{[\alpha_1 b]^j}{j!}\right] < 1$, *где* $\alpha_1 = \max_{t\in[0,T]} \|A_1(t)\|$.

Тогда задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение $\mu^*(t) \in C([0, T], R^n)$ *и справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]} \|\mu^*(t)\| \leq \mathcal{K}(1, \nu) \max\left(\max_{t\in[0,T]} \|g_1(t)\|, \|\varphi(0)\|\right), \tag{2.14}$$

где

$$\mathcal{K}(1, \nu) = \mathcal{K}_1(1, \nu) + \mathcal{K}_2(1, \nu),$$

$$\mathcal{K}_1(1, \nu) = \frac{\gamma_{1,\nu}}{1 - q_{1,\nu}}\, b \max_{t\in[0,b]} \|M(t, 0)\| \frac{[\alpha_1 b]^\nu}{\nu!} \mathcal{K}_0(1, \nu) +$$

$$+ \gamma_{1,\nu} \left\{1 + b^2 \max_{t\in[0,b]} \|M(t, 0)\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha_1 b]^j}{j!}\right\},$$

$$\mathcal{K}_2(1, \nu) = \left\{\left[e^{\alpha_1 T} - 1\right] \frac{\gamma_{1,\nu}}{1 - q_{1,\nu}}\, b \max_{t\in[0,b]} \|M(t, 0)\| \frac{[\alpha_1 b]^\nu}{\nu!} + 1\right\} \mathcal{K}_0(1, \nu),$$

$$\mathcal{K}_0(1, \nu) = \left[e^{\alpha_1 T} - 1\right] \gamma_{1,\nu} \left\{1 + b^2 \max_{t\in[0,b]} \|M(t, 0)\| \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{[\alpha_1 b]^j}{j!}\right\} + T e^{\alpha_1 T}.$$

Величина $\mathcal{K}(1, \nu)$ в неравенстве (2.14) ограничена при фиксированном $\nu \in \mathbb{N}$ и не зависит от функций $g_1(t)$, $\varphi(0)$. Поэтому при условиях теоремы 2.3 краевая задача с интегральным условием (2.1), (2.2) корректно разрешима.

Аналогично, введем обозначение

$$D_{2,\upsilon}(x) = I + \int\limits_0^x A_2(\xi_1)\,d\xi_1 + \int\limits_0^x A_2(\xi_1)\int\limits_0^{\xi_1} A_2(\xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1 + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_0^x A_2(\xi_1)\ldots\int\limits_0^{\xi_{\upsilon-2}} A_2(\xi_{\upsilon-1})\int\limits_0^{\xi_{\upsilon-1}} A_2(\xi_\upsilon)\,d\xi_\upsilon\ldots d\xi_1, \quad \upsilon\in\mathbb{N}. \tag{2.15}$$

Для краевой задачи с интегральным условием (2.3), (2.4) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть при некотором* υ, $\upsilon\in\mathbb{N}$, *матрица* $Q_{2,\upsilon} = \int_0^a K(0,\xi)[I+D_{2,\upsilon}(\xi)]\,d\xi$ *обратима и выполняются неравенства:*

i) $\big\|[Q_{2,\upsilon}]^{-1}\big\| \le \gamma_{2,\upsilon}$, *где* $\gamma_{2,\upsilon}$ — *положительная постоянная;*

ii) $q_{2,\upsilon} = \gamma_{2,\upsilon}\,a\max_{x\in[0,a]}\|K(0,x)\|\left[e^{\alpha_2 a} - \sum_{j=0}^{\upsilon}\dfrac{[\alpha_2 a]^j}{j!}\right] < 1$, *где* $\alpha_2 = \max_{x\in[0,\omega]}\|A_2(x)\|$.

Тогда задача (2.3), (2.4) имеет единственное решение $\lambda^*(x)\in C([0,\omega],R^n)$ *и справедлива оценка*

$$\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda^*(x)\| \le \mathcal{K}(2,\upsilon)\max\left(\max_{x\in[0,\omega]}\|g_2(x)\|, \|\psi(0)\|\right), \tag{2.16}$$

где

$$\mathcal{K}(2,\upsilon) = \mathcal{K}_1(2,\upsilon) + \mathcal{K}_2(2,\upsilon),$$

$$\mathcal{K}_1(2,\upsilon) = \frac{\gamma_{2,\upsilon}}{1-q_{2,\upsilon}}\,b\max_{x\in[0,a]}\|K(0,x)\|\,\frac{[\alpha_2 a]^\upsilon}{\upsilon!}\,\mathcal{K}_0(2,\upsilon) +$$

$$+\gamma_{2,\upsilon}\left\{1 + a^2\max_{x\in[0,a]}\|K(0,x)\|\sum_{j=0}^{\upsilon-1}\frac{[\alpha_2 a]^j}{j!}\right\},$$

$$\mathcal{K}_2(2,\upsilon) = \left\{[e^{\alpha_2\omega}-1]\,\frac{\gamma_{2,\upsilon}}{1-q_{2,\upsilon}}\,a\max_{x\in[0,a]}\|K(0,x)\|\,\frac{[\alpha_2 a]^\upsilon}{\upsilon!} + 1\right\}\mathcal{K}_0(2,\upsilon),$$

$$\mathcal{K}_0(2,\upsilon) = [e^{\alpha_2\omega}-1]\,\gamma_{2,\upsilon}\left\{1 + a^2\max_{x\in[0,a]}\|K(0,x)\|\sum_{j=0}^{\upsilon-1}\frac{[\alpha_2 a]^j}{j!}\right\} + \omega e^{\alpha_2\omega}.$$

Величина $\mathcal{K}(2,\upsilon)$ в неравенстве (2.16) ограничена при фиксированном $\upsilon\in\mathbb{N}$ и не зависит от функций $g_2(x)$, $\psi(0)$. Поэтому при условиях теоремы 2.4 краевая задача с интегральным условием (2.3), (2.4) будет также корректно разрешима.

Доказательства теорем 2.3 и 2.4 проводятся аналогично доказательству теоремы 1 из [25] и теоремы 2 из [17] с учетом специфики рассматриваемой задачи и приведенного алгоритма.

При $\nu = \upsilon = 1$ матрицы $Q_{1,\nu}$ и $Q_{2,\upsilon}$ имеют вид

$$Q_{1,1} = \int_0^b M(\tau,0)\left[2I + \int_0^\tau A_1(\tau_1)\,d\tau_1\right] d\tau, \quad Q_{2,1} = \int_0^a K(0,\xi)\left[2I + \int_0^\xi A_2(\xi_1)\,d\xi_1\right] d\xi.$$

Отметим, что фундаментальные матрицы $U_1(t,0)$, $U_2(x,0)$ и матрицы $D_{1,\nu}(t)$, $D_{2,\upsilon}(x)$ взаимосвязаны [26, с. 145]. Предположения относительно матриц $A_1(t)$ и $A_2(x)$, а также представления матриц $D_{1,\nu}(t)$, $D_{2,\upsilon}(x)$ позволяют перейти к пределу при $\nu \to \infty$ в соотношении (2.13) и при $\upsilon \to \infty$ в соотношении (2.15).

Тогда получим $U_1(t,0) = \lim_{\nu\to\infty} D_{1,\nu}(t)$, $U_2(x,0) = \lim_{\upsilon\to\infty} D_{2,\upsilon}(x)$. Отсюда следует

$$Q_{1,*} = \int_0^b M(\tau,0)[I + U_1(\tau,0)]\,d\tau = \lim_{\nu\to\infty}\int_0^b M(\tau,0)[I + D_{1,\nu}(\tau)]\,d\tau = \lim_{\nu\to\infty} Q_{1,\nu},$$

$$Q_{2,*} = \int_0^a K(0,\xi)[I + U_2(\xi,0)]\,d\xi = \lim_{\upsilon\to\infty}\int_0^a K(0,\xi)[I + D_{2,\upsilon}(\xi)]\,d\xi = \lim_{\upsilon\to\infty} Q_{2,\upsilon}.$$

Условия i), ii) теоремы 2.3 эквивалентны условию теоремы 2.1, а условия i), ii) теоремы 2.4 — условию теоремы 2.2, т. е. обеспечивают обратимость матриц $Q_{1,*}$ и $Q_{2,*}$ соответственно. Таким образом, теоремы 2.3 и 2.4 дают коэффициентные условия однозначной разрешимости краевых задач с интегральным условием (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) соответственно, а выполнение оценок (2.14) и (2.16) — корректную разрешимость указанных задач.

3. Сходимость алгоритма и основной результат. В пункте 1 был построен алгоритм нахождения решения задачи (1.1) – (1.5), эквивалентной задаче (1) – (3). Для формулировки основного результата, который дает условия сходимости предложенного алгоритма, приведем некоторые предположения и обозначения.

Предположим, что $(n \times n)$-матрица $B_1(t) = \int_0^a K(t,\xi)\,d\xi$ обратима для всех $t \in [0,T]$, а $(n \times n)$-матрица $B_2(x) = \int_0^b M(\tau,x)d\tau$ — для всех $x \in [0,\omega]$.

Введем обозначения

$$A_1(t) = -[B_1(t)]^{-1}C_1(t), \quad A_2(x) = -[B_2(x)]^{-1}C_2(x),$$

$$\alpha = \max_{(t,x)\in\Omega}\|A(t,x)\|, \quad \beta = \max_{(t,x)\in\Omega}\|B(t,x)\|, \quad \chi = \max_{(t,x)\in\Omega}\|C(t,x)\|, \quad H = \alpha + \beta + \chi,$$

$$\varrho_1 = \max_{(t,x)\in\Omega}\|K(t,x)\|, \quad \varrho_2 = \max_{(t,x)\in\Omega}\left\|\frac{\partial K(t,x)}{\partial t}\right\|,$$

$$\sigma_1 = \max_{(t,x)\in\Omega}\|M(t,x)\|, \quad \sigma_2 = \max_{(t,x)\in\Omega}\left\|\frac{\partial M(t,x)}{\partial x}\right\|,$$

$$\delta_1 = \max_{t\in[0,T]}\left\|[B_1(t)]^{-1}\right\|, \quad \delta_2 = \max_{x\in[0,\omega]}\left\|[B_2(x)]^{-1}\right\|,$$

$$S_1(a) = a\delta_1 \left\{ (\varrho_1+\varrho_2)H\max(T,\omega,T\omega)\left[1+e^{H(T+\omega)}\right]+\varrho_1\right\},$$

$$S_2(b) = b\delta_2 \left\{ (\sigma_1+\sigma_2)H\max(T,\omega,T\omega)\left[1+e^{H(T+\omega)}\right]+\sigma_1\right\}.$$

В пункте 2 установлены условия однозначной разрешимости краевых задач с интегральными условиями (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4). При фиксированных $\widetilde{v}(t,x)$, $\widetilde{w}(t,x)$, $\widetilde{u}(t,x)$ на каждом шаге алгоритма будут решаться краевые задачи с интегральными условиями (1.12), (1.9) и (1.13), (1.8). Кроме того, в задаче (1.12), (1.9) считается известным также $\lambda(x)$, а в задаче (1.13), (1.8) — $\mu(t)$. При фиксированных $\dot\lambda(x)$, $\dot\mu(t)$, $\lambda(x)$, $\mu(t)$ будет решаться задача Гурса (1.1) – (1.3).

Следующее утверждение дает условия сходимости алгоритма, одновременно обеспечивающие существование единственного решения задачи (1) – (3).

Теорема 3.1. *Пусть:*

1) $(n\times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ и вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны на Ω;

2) $(n\times n)$-матрица $K(t,x)$ и n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы по t на Ω и $[0,T]$ соответственно; $(n\times n)$-матрица $M(t,x)$ и n-вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемы по x на Ω и $[0,\omega]$ соответственно;

3) $(n\times n)$-матрица $B_1(t)$ обратима для всех $t\in[0,T]$, а $(n\times n)$-матрица $B_2(x)$ — для всех $x\in[0,\omega]$;

4) при некоторых $\nu,\nu\in\mathbb{N}$, $\upsilon,\upsilon\in\mathbb{N}$, матрицы $Q_{1,\nu} = \int_0^b M(\tau,0)[2I+D_{1,\nu}(\tau)]\,d\tau$, $Q_{2,\upsilon} = \int_0^a K(0,\xi)[2I+D_{2,\upsilon}(\xi)]\,d\xi$ обратимы и выполняются неравенства i), ii) теорем 2.3 и 2.4 соответственно;

5) имеет место неравенство

$$\delta = \max\left(\mathcal{K}(1,\nu)S_1(a)+\mathcal{K}(2,\upsilon)S_2(b), (\alpha_1\mathcal{K}(1,\nu)+1)S_1(a), (\alpha_2\mathcal{K}(2,\upsilon)+1)S_2(b)\right) < 1.$$

Тогда задача (1) – (3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Пусть выполнены условия 1 – 3 теоремы 3.1. Используем 0-шаг алгоритма и рассмотрим краевые задачи с интегральным условием

$$\dot\mu(t) = A_1(t)\mu(t) - [B_1(t)]^{-1}\dot\psi(t), \quad t\in[0,T], \tag{3.1}$$

$$\int_0^b M(\tau,0)d\tau\mu(0) + \int_0^b M(\tau,0)\mu(\tau)d\tau = \varphi(0), \tag{3.2}$$

$$\dot\lambda(x) = A_2(x)\lambda(x) - [B_2(x)]^{-1}\dot\varphi(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{3.3}$$

$$\int_0^a K(0,\xi)\,d\xi\lambda(0) + \int_0^a K(0,\xi)\lambda(\xi)\,d\xi = \psi(0). \tag{3.4}$$

Из выполнения условия 4, которое включает условия теорем 2.3 и 2.4, следует однозначная разрешимость задач (3.1), (3.2) и (3.3), (3.4). Нулевые приближения $\mu^{(0)}(t)$ и $\lambda^{(0)}(x)$

находим из краевых задач (3.1), (3.2) и (3.3), (3.4). Тогда аналогично оценкам (2.15), (2.16) для функций $\mu^{(0)}(t)$, $\lambda^{(0)}(x)$ и их производных $\dot{\mu}^{(0)}(t)$, $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$ будут справедливы оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\mu^{(0)}(t)\right\| \le \mathcal{K}(1,\nu)\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|[B_1(t)]^{-1}\dot{\psi}(t)\right\|, \|\varphi(0)\|\right),$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\dot{\mu}^{(0)}(t)\right\| \le [\alpha_1\mathcal{K}(1,\nu)+1]\max\left(\max_{t\in[0,T]}\left\|[B_1(t)]^{-1}\dot{\psi}(t)\right\|, \|\varphi(0)\|\right),$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(0)}(x)\right\| \le \mathcal{K}(2,\upsilon)\max\left(\max_{x\in[0,\omega]}\left\|[B_2(x)]^{-1}F_1(x)\right\|, \|\psi(0)\|\right),$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^{(0)}(x)\right\| \le (\alpha_2\mathcal{K}(2,\upsilon)+1)\max\left(\max_{x\in[0,\omega]}\left\|[B_2(x)]^{-1}\dot{\varphi}(x)\right\|, \|\psi(0)\|\right).$$

Решая задачу Гурса (1.1) – (1.3) при найденных значениях параметров, находим $\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega$. В этом случае выполняются неравенства

$$\left\|\widetilde{v}^{(0)}(t,x)\right\| \le \max(T,\omega,T\omega)\left[1+e^{H(T+\omega)}\right]\max_{(t,x)\in\Omega}\|\widetilde{f}(t,x)\|,$$

$$\left\|\widetilde{w}^{(0)}(t,x)\right\| \le \max(T,\omega,T\omega)\left[1+e^{H(T+\omega)}\right]\max_{(t,x)\in\Omega}\|\widetilde{f}(t,x)\|,$$

$$\left\|\widetilde{u}^{(0)}(t,x)\right\| \le \max(T,\omega,T\omega)\left[1+e^{H(T+\omega)}\right]\max_{(t,x)\in\Omega}\|\widetilde{f}(t,x)\|,$$

где

$$\widetilde{f}(t,x) = A(t,x)\dot{\lambda}^{(0)}(x)+B(t,x)\dot{\mu}^{(0)}(t)+C(t,x)\left[\lambda^{(0)}(x)+\mu^{(0)}(t)\right]+f(t,x).$$

Последовательно из k-го шага алгоритма определяем функции $\mu^{(k)}(t)$, $\lambda^{(k)}(x)$, $\dot{\mu}^{(k)}(t)$, $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$, $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$, а из $(k+1)$-го шага — $\mu^{(k+1)}(t)$, $\lambda^{(k+1)}(x)$, $\dot{\mu}^{(k+1)}(t)$, $\dot{\lambda}^{(k+1)}(x)$, $\widetilde{v}^{(k+1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k+1)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(k+1)}(t,x)$, $k=1,2,\ldots$. Оценивая соответствующие разности последовательных приближений, получаем

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)\right\| \le \mathcal{K}(1,\nu)\max_{t\in[0,T]}\left\|[B_1(t)]^{-1}\right\|\left[\left\|L_1\left(t,\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)}\right)\right\|+\right.$$
$$\left.+\left\|G_1\left(t,\widetilde{u}^{(k)}-\widetilde{u}^{(k-1)},\widetilde{w}^{(k)}-\widetilde{w}^{(k-1)}\right)\right\|\right], \tag{3.5}$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\| \le \mathcal{K}(2,\upsilon)\max_{x\in[0,\omega]}\left\|[B_2(x)]^{-1}\right\|\left[\left\|L_2\left(x,\mu^{(k)}-\mu^{(k-1)}\right)\right\|+\right.$$
$$\left.+\left\|G_2\left(x,\widetilde{u}^{(k)}-\widetilde{u}^{(k-1)},\widetilde{v}^{(k)}-\widetilde{v}^{(k-1)}\right)\right\|\right], \tag{3.6}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\dot{\mu}^{(k+1)}(t)-\dot{\mu}^{(k)}(t)\right\| \le [\alpha_1\mathcal{K}(1,\nu)+1]\max_{t\in[0,T]}\left\|[B_1(t)]^{-1}\right\|\left[\left\|L_1(t,\lambda^{(k)}-\lambda^{(k-1)})\right\|+\right.$$
$$\left.+\left\|G_1\left(t,\widetilde{u}^{(k)}-\widetilde{u}^{(k-1)},\widetilde{w}^{(k)}-\widetilde{w}^{(k-1)}\right)\right\|\right], \tag{3.7}$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot\lambda^{(k+1)}(x)-\dot\lambda^{(k)}(x)\right\| \le [\alpha_2\mathcal{K}(2,\upsilon)+1]\max_{x\in[0,\omega]}\left\|[B_2(x)]^{-1}\right\|\left[\left\|L_2(x,\mu^{(k)}-\mu^{(k-1)})\right\|+\right.$$

$$\left.+\left\|G_2\left(x,\widetilde{u}^{(k)}-\widetilde{u}^{(k-1)},\widetilde{v}^{(k)}-\widetilde{v}^{(k-1)}\right)\right\|\right], \tag{3.8}$$

$$\left\|\widetilde{v}^{(k+1)}(t,x)-\widetilde{v}^{(k)}(t,x)\right\| \le \max(T,\omega,T\omega)\left[1+e^{H(T+\omega)}\right]\left\{\alpha\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot\lambda^{(k+1)}(x)-\dot\lambda^{(k)}(x)\right\|+\right.$$

$$+\beta\max_{t\in[0,T]}\left\|\dot\mu^{(k+1)}(t)-\dot\mu^{(k)}(t)\right\|+\chi\left[\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|+\right.$$

$$\left.\left.+\max_{t\in[0,T]}\left\|\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)\right\|\right]\right\}, \tag{3.9}$$

$$\left\|\widetilde{w}^{(k+1)}(t,x)-\widetilde{w}^{(k)}(t,x)\right\| \le \max(T,\omega,T\omega)\left[1+e^{H(T+\omega)}\right]\left\{\alpha\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot\lambda^{(k+1)}(x)-\dot\lambda^{(k)}(x)\right\|+\right.$$

$$+\beta\max_{t\in[0,T]}\left\|\dot\mu^{(k+1)}(t)-\dot\mu^{(k)}(t)\right\|+\chi\left[\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|+\right.$$

$$\left.\left.+\max_{t\in[0,T]}\left\|\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)\right\|\right]\right\}, \tag{3.10}$$

$$\left\|\widetilde{u}^{(k+1)}(t,x)-\widetilde{u}^{(k)}(t,x)\right\| \le \max(T,\omega,T\omega)\left[1+e^{H(T+\omega)}\right]\left\{\alpha\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot\lambda^{(k+1)}(x)-\dot\lambda^{(k)}(x)\right\|+\right.$$

$$+\beta\max_{t\in[0,T]}\left\|\dot\mu^{(k+1)}(t)-\dot\mu^{(k)}(t)\right\|+\chi\left[\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|+\right.$$

$$\left.\left.+\max_{t\in[0,T]}\left\|\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)\right\|\right]\right\}. \tag{3.11}$$

Пусть

$$\Delta_{k+1}=\max\left(\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\lambda^{(k+1)}(x)-\lambda^{(k)}(x)\right\|+\max_{t\in[0,T]}\left\|\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)\right\|,\right.$$

$$\left.\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot\lambda^{(k+1)}(x)-\dot\lambda^{(k)}(x)\right\|,\max_{t\in[0,T]}\left\|\dot\mu^{(k+1)}(t)-\dot\mu^{(k)}(t)\right\|\right).$$

Тогда из соотношений (3.5) – (3.8) с учетом обозначений и оценок (3.9) – (3.11) получаем основное неравенство

$$\Delta_{k+1}\le\delta\Delta_k. \tag{3.12}$$

Из условия 5 теоремы следует сходимость последовательности Δ_k при $k \to \infty$ к Δ_*. Это дает равномерную сходимость последовательностей $\lambda^{(k)}(x)$, $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$, $\mu^{(k)}(t)$, $\dot{\mu}^{(k)}(t)$ при $k \to \infty$ соответственно к $\lambda^*(x)$, $\dot{\lambda}^*(x)$, $\mu^*(t)$, $\dot{\mu}^*(t)$. Функции $\lambda^*(x)$, $\mu^*(t)$ являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми на $[0,\omega]$, $[0,T]$ соответственно. На основе оценок (3.9) – (3.11) установим равномерную сходимость последовательностей $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$ относительно $(t,x) \in \Omega$ к функциям $\widetilde{v}^*(t,x)$, $\widetilde{w}^*(t,x)$, $\widetilde{u}^*(t,x)$ соответственно. Очевидно, что функции $\widetilde{u}^*(t,x)$, $\widetilde{v}^*(t,x)$, $\widetilde{w}^*(t,x)$ являются непрерывными на Ω. Записывая задачи, которые решаем на $(k+1)$-м шаге алгоритма, и переходя к пределу $k \to \infty$, убеждаемся, что функции $\widetilde{u}^*(t,x)$, $\lambda^*(x)$, $\mu^*(t)$ вместе с производными удовлетворяют задаче Гурса (1.1) – (1.3), краевым задачам с интегральными условиями (1.12), (1.9) и (1.13), (1.8). Осуществим обратный переход от задачи (1.12), (1.9) к соотношению (1.4), а от задачи (1.13), (1.8) к соотношению (1.5). Тогда тройка функций $(\widetilde{u}^*(t,x), \lambda^*(x), \mu^*(t))$ является решением задачи (1.1) – (1.5).

Докажем единственность решения задачи (1.1) – (1.5). Пусть существует два решения: тройки функций $(\widetilde{u}^*(t,x), \lambda^*(x), \mu^*(t))$ и $(\widetilde{u}^{**}(t,x), \lambda^{**}(x), \mu^{**}(t))$. Обозначим

$$\widetilde{\Delta} = \max\Bigg(\max_{x\in[0,\omega]}\|\lambda^*(x)-\lambda^{**}(x)\| + \max_{t\in[0,T]}\|\mu^*(t)-\mu^{**}(t)\|,$$

$$\max_{x\in[0,\omega]}\left\|\dot{\lambda}^*(x)-\dot{\lambda}^{**}(x)\right\|, \max_{t\in[0,T]}\|\dot{\mu}^*(t)-\dot{\mu}^{**}(t)\|\Bigg).$$

Проведя вычисления аналогично (3.5) – (3.11), получим

$$\widetilde{\Delta} \le \delta\widetilde{\Delta}. \tag{3.13}$$

По условию 5 теоремы $\delta < 1$. Тогда неравенство (3.13) имеет место только при $\widetilde{\Delta} \equiv 0$, откуда получаем $\lambda^*(x) = \lambda^{**}(x)$, $\mu^*(t) = \mu^{**}(t)$ и $\widetilde{u}^*(t,x) = \widetilde{u}^{**}(t,x)$.

Таким образом, решение задачи (1.1) – (1.5) единственно.

Из эквивалентности задач (1) – (3) и (1.1) – (1.5) следует существование единственного решения задачи (1) – (3) — функции $u^*(t,x)$, определяемой равенством

$$u^*(t,x) = \widetilde{u}^*(t,x) + \lambda^*(x) + \mu^*(t).$$

Теорема 3.1 доказана.

Литература

1. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложении к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. — 1982. — **18**, № 1. — С. 72 – 81.
2. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев: Наук. думка, 1984. — 264 с.
3. *Нахушева З. А.* Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1986. — **22**, № 1. — С. 171 – 174.
4. *Жестков С. В.* О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 1. — С. 132 – 135.
5. *Kiguradze T.* Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type // Mem. Different. Equat. and Math. Phys. — 1994. — **1**. — P. 1 – 144.

6. *Голубева Н. Д., Пулькина Л. С.* Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями // Мат. заметки. — 1996. — **59**, № 3. — С. 171 – 174.
7. *Bouziani A.* Solution forte d'un probleme mixte avec conditions non locales pour une classe d'equations hyperboliques // Bull. CI. Sci. Acad. Roy. Belg. — 1997. — **8**. — P. 53 – 70.
8. *Пулькина Л. С.* О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. — 2000. — **36**, № 2. — С. 279 – 280.
9. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006. — 287 с.
10. *Асанова А. Т.* О нелокальной задаче с интегральным смещением для систем гиперболических уравнений со смешанной производной // Мат. журн. — 2008. — **8**, № 1. — С. 9 – 16.
11. *Ткач Б. П., Урманчева Л. Б.* Численно-аналитический метод отыскания решений систем с распределенными параметрами с интегральным условием // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 1. — С. 110 – 119.
12. *Пулькина Л. С., Кечина О. М.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2009. — **68**, № 2. — С. 80 – 88.
13. *Сабитова Ю. К.* Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. — 2009. — № 12. — С. 49 – 58.
14. *Кечина О. М.* Нелокальная задача для гиперболического уравнения с условиями, заданными внутри характеристического прямоугольника // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2009. — **72**, № 6. — С. 50 – 56.
15. *Уткина Е. А.* О единственности решения полуинтегральной задачи для одного уравнения четвертого порядка // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2010. — **78**, № 4. — С. 98 – 102.
16. *Сабитов К. Б.* Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференц. уравнения. — 2010. — **46**, № 10. — С. 1468 – 1478.
17. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.* Well-posedness of nonlocal boundary-value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // J. Math. Anal. and Appl. — 2013. — **402**, № 1. — P. 167 – 178.
18. *Моисеев Е. И., Корзюк В. И., Козловская И. С.* Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. — 2014. — **50**, № 10. — С. 1373 – 1385.
19. *Сабитова Ю. К.* Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Мат. заметки. — 2015. — **98**, № 3. — С. 393 – 406.
20. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2002. — **42**, № 11. — С. 1673 – 1685.
21. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 10. — С. 1343 – 1354.
22. *Абрамов А. А., Юхно Л. Ф.* Нелинейная спектральная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальным условием // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2012. — **52**, № 2. — С. 231 – 236.
23. *Абрамов А. А., Юхно Л. Ф.* Решение системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с избыточными условиями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2014. — **54**, № 4. — С. 585 – 590.
24. *Абрамов А. А., Юхно Л. Ф.* Метод решения нелокальной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2014. — **54**, № 11. — С. 1752 – 1755.
25. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1989. — **29**, № 1. — С. 50 – 66.
26. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

Получено 19.12.16,
после доработки — 01.11.17