УДК 517.5

РОЗСІЮВАННЯ ЗНАЧЕНЬ ОДНІЄЇ ФРАКТАЛЬНОЇ НЕПЕРЕРВНОЇ НЕМОНОТОННОЇ ФУНКЦІЇ КАНТОРІВСЬКОГО ТИПУ

М. В. Працьовитий, О. В. Свинчук

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна
e-mail: prats4444@gmail.com
7011990@ukr.net

We consider the Q_5^*-representation of numbers,

$$[0,1] \ni x = \beta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)j}\right) = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}.$$

It is determined by the quinary alphabet $A_5 \equiv \{0,1,2,3,4\}$ and an infinite stochastic matrix $\|q_{ik}\|$, $i \in A_5$, $k \in N$, with positive elements ($q_{0k}+q_{1k}+q_{2k}+q_{3k}+q_{4k} = 1$) such that $\prod_{k=1}^{\infty}\max_i\{q_{ik}\} = 0$, and $\beta_{0k} = 0$, $\beta_{i+1,k} = \beta_{ik} + q_{ik}$, $i = \overline{0,4}$. Using this representation we define continuous function of Cantor type by the equality

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}\right) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right) \equiv \Delta^{G}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

where $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = \dfrac{2+\varepsilon_n}{4}$, $\delta_{2n} = \dfrac{2}{4} = \delta_{3n}$, $\delta_{4n} = \dfrac{2-\varepsilon_n}{4}$, i.e., $\delta_{i+1,n} = \delta_{in} + g_{in}$, $n \in N$, and (ε_n) is a given sequence of real numbers such that $0 \le \varepsilon_n \le 1$.

We prove that this function is well defined, continuous and has no monotonicity intervals except for the intervals where it is a constant. Criterion for the variation of the function to be bounded is also found. We are particularly interested in the question about level sets of the function and topological and metric properties of images of sets of Cantor type.

С использованием Q_5^*-представления чисел

$$[0,1] \ni x = \beta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)j}\right) = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

которое определяется пятеричным алфавитом $A_5 \equiv \{0,1,2,3,4\}$ и бесконечной стохастической матрицей $\|q_{ik}\|$, $i \in A_5$, $k \in N$, с положительными элементами ($q_{0k}+q_{1k}+q_{2k}+q_{3k}+q_{4k} = 1$) такой, что $\prod_{k=1}^{\infty}\max_i\{q_{ik}\} = 0$, $\beta_{0k} = 0$, $\beta_{i+1,k} = \beta_{ik} + q_{ik}$, $i = \overline{0,4}$, непрерывная функция канторовского типа определяется равенством

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}\right) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right) \equiv \Delta^{G}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

где $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = \dfrac{2+\varepsilon_n}{4}$, $\delta_{2n} = \dfrac{2}{4} = \delta_{3n}$, $\delta_{4n} = \dfrac{2-\varepsilon_n}{4}$, т. е. $\delta_{i+1,n} = \delta_{in} + g_{in}$, $n \in N$, при этом (ε_n) — наперед заданная последовательность действительных чисел такая, что $0 \le \varepsilon_n \le 1$.

В работе обоснованы корректность определения, непрерывность функции, отсутствие промежутков монотонности, за исключением интервалов постоянства, критерий ограниченности вариации функции. Основное внимание уделяется вопросу уровней функции и топологометрических свойств образов множеств канторовского типа.

Вступ. Більшість функцій простору $C[0;1]$ мають у певному сенсі фрактальні властивості. Одні з них мають самоафінні або автомодельні графіки, інші — фрактальні множини нестабільності (несталості), треті — фрактальні рівні і т. д. Останнім часом збільшився інтерес до сингулярних функцій (неперервних функцій, відмінних від констант, похідна яких майже скрізь у розумінні міри Лебега дорівнює нулю) і насамперед до немонотонних. Серед них і функції канторівського типу (функції, що мають ніде не щільну множину нестабільності). Цим функціям було приділено увагу у роботах [9, 10]. Рівні таких функцій можуть бути істотно масивними (мати додатну фрактальну розмірність Гаусдорфа – Безиковича). Тому розподіли їх значень потенційно є сумішами розподілів чистих лебегівських типів (дискретного, абсолютно неперервного, сингулярного).

У даній роботі ми акцентуємо увагу на образах фрактальних множин канторівсього типу (досконалих ніде не щільних множин) під дією неперервної немонотонної функції канторівського типу, залежної від параметрів, яка має необмежену варіацію.

Нехай $A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ — алфавіт п'ятіркової системи числення, $L_5 \equiv A_5 \times A_5 \times \ldots$ — простір послідовностей алфавіту, $Q_5^* = \|q_{ij}\|$, $j \in N$, $i \in A_5$, — нескінченна стохастична матриця з додатними елементами, що має такі властивості:

1) $q_{0j} + q_{1j} + q_{2j} + q_{3j} + q_{4j} = 1$, $j \in N$;

2) $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \max\{q_{0j}, q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}, q_{4j}\} = 0$.

Теорема 1 [5]. *Для будь-якого $x \in [0,1]$ існує послідовність (α_k), $\alpha_k = \alpha_k(x) \in L_5$, така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right], \tag{1}$$

де $\beta_{0j} = 0$, $\beta_{ij} = \sum_{k=0}^{i-1} q_{kj}$, $i \in A_5 \setminus \{0\}$, $j \in N$.

Подання числа x у вигляді ряду (1) називається його Q_5^**-представленням*, а його символічний запис $x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ — Q_5^**-зображенням*. При цьому $\alpha_j(x)$ називається j-ю Q_5^**-цифрою* зображення числа x.

Поняття j-ї Q_5^*-цифри числа x, взагалі кажучи, не є коректно означеним, оскільки деякі числа мають два Q_5^*-зображення. Це числа із зображеннями

$$\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](4)},$$

де круглі дужки символізують період. Такі числа називають Q_5^**-раціональними*, а числа, що не містять період (0) або (4), мають єдине Q_5^*-зображення і називаються Q_5^**-ірраціональними*.

В геометрії зображень важливим є поняття циліндра. Нагадаємо його.

Означення 1. *Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — фіксований набір символів, $c_i \in A_5$. Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, яка складається з усіх точок $x \in [0,1]$, які мають Q_5^*-зображення таке, що $\alpha_j(x) = c_j$, $j = \overline{1,m}$.*

Циліндри мають такі властивості:

1) циліндр $\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком з кінцями

$$a = \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m(0)} = \beta_{c_1 1} + \sum_{k=2}^{m}\left[\beta_{c_k k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j j}\right], \quad b = \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m(4)} = a + \prod_{i=1}^{m} q_{c_i i};$$

2) $\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{4}\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$;

3) $\left|\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i i}$;

4) $\max\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m i} = \min\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m [i+1]}, i = \overline{0,3}$;

5) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m} = x = \Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} \in [0,1]$ для довільної послідовності (c_i), $c_i \in A_5$.

Якщо для всіх $i \in A_5$, $j \in N$ виконується $q_{ij} = q_i$, тобто всі стовпці матриці $\|q_{ij}\|$ однакові, то Q_5^*-зображення називається Q_5-*зображенням*; якщо ж при цьому $q_i = \dfrac{1}{5}$, то Q_5-зображення є звичайним *п'ятірковим зображенням*.

Відомо [5], що множина

$$C = C\,[Q_5^*, V] \equiv \{x\colon x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots}, \text{ де } \alpha_n \in V \subset A_5 \neq V\}$$

є досконалою ніде не щільною множиною, міра Лебега якої обчислюється за формулою

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - W_k), \quad \text{де} \quad W_k = \sum_{i\in A_5\setminus V} q_{ik}.$$

Остання дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $\sum_{k=1}^{\infty} W_k = \infty$.

1. Основний об'єкт дослідження. Нехай (ε_n) — задана послідовність додатних дійсних чисел, до того ж $0 \le \varepsilon_n \le 1$; $(\overline{g_n}) = (g_{0n}, g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, g_{4n})$ — послідовність векторів така, що $g_{0n} = g_{4n} = \dfrac{2+\varepsilon_n}{4}$, $g_{1n} = g_{3n} = \dfrac{-\varepsilon_n}{4}$, $g_{2n} = 0$, $n \in N$.

Розглядається функція f, означена рівністю

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right) \equiv \Delta^{G}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \tag{2}$$

де $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = \dfrac{2+\varepsilon_n}{4}$, $\delta_{2n} = \dfrac{2}{4} = \delta_{3n}$, $\delta_{4n} = \dfrac{2-\varepsilon_n}{4}$, тобто

$$\delta_{[i+1]n} = \delta_{in} + g_{in} = \sum_{j=0}^{i} g_{jn}, \quad n \in N.$$

Коректність означення функції у точках, які мають два Q_5^*-зображення, обґрунтовується рівністю

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}\right) - f\left(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](4)}\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j}\right)\left(\delta_{\alpha_k k} - \delta_{[\alpha_k-1]k} - g_{[\alpha_k-1]k}(\delta_{4[k+1]} + \delta_{4[k+2]}g_{4[k+1]} + \ldots)\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j}\right)\left(\delta_{\alpha_k k} - \left(\delta_{[\alpha_k-1]k} + g_{[\alpha_k-1]k}\right)\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j}\right)(\delta_{\alpha_k k} - \delta_{\alpha_k k}) = 0.$$

Теорема 2 [9]. *Функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[0;1]$, причому*

1) сталою на кожному циліндрі вигляду $\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m2}$ і, крім цього, на циліндрах $\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}1}$ і $\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}3}$, якщо $\varepsilon_n = 0$;

2) монотонною (а точніше, неспадною) тоді і тільки тоді, коли $\varepsilon_n = 0$, $n \in N$.

Вона набуває всіх значень з відрізка $[0,1]$, не має проміжків монотонності, крім проміжків сталості, якщо нерівність $\varepsilon_n \neq 0$ виконується для нескінченної множини значень n.

Наслідок 1. *Для того щоб функція f була сингулярною функцією канторівського типу, необхідно і достатньо, щоб множина $C = C[Q_5^*, \{0,1,3,4\}]$ мала нульову міру Лебега, тобто $\sum_{k=1}^{\infty} q_{2k} = \infty$.*

Теорема 3. *Варіація функції f обчислюється за формулою*

$$V_0^1(f) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+\varepsilon_i).$$

Функція f має обмежену варіацію тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty. \tag{3}$$

Доведення. Оскільки

$$V_1 = \sum_{i=0}^{4}\left| f\left(\Delta^{Q_5^*}_{i+1,(0)}\right) - f\left(\Delta^{Q_5^*}_{i(0)}\right)\right| = 1 + \varepsilon_1,$$

$$V_2 = (1+\varepsilon_1) \sum_{i=1}^{4} \left| f\left(\Delta^{Q_5^*}_{j+1,i+1,(0)}\right) - f\left(\Delta^{Q_5^*}_{j,i(0)}\right) \right| = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2),$$

. . . .

$$V_n = \prod_{i=1}^{n}(1+\varepsilon_i),$$

то

$$V_n \le V_0^1(f).$$

Більш того, можна довести, що

$$V_0^1(f) = \lim_{n\to\infty} V_n.$$

Тоді

$$V_0^1(f) = \lim \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n}(1+\varepsilon_i) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+\varepsilon_i).$$

Враховуючи зв'язок між збіжністю нескінченних добутків та рядів, а саме,

$$0 < \prod_{i=1}^{\infty}(1+\varepsilon_i) < \infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i < \infty,$$

можемо стверджувати, що функція $f(x)$ є функцією обмеженої варіації тоді і тільки тоді, коли виконується (3).

Теорему 3 доведено.

Наслідок 2. *Якщо послідовність* (ε_n) *є відокремленою від нуля, тобто* $0 < \varepsilon_0 \le \varepsilon_n$, *зокрема* $\varepsilon_n = \mathrm{const} > 0$, *то функція* f *є функцією необмеженої варіації.*

Наслідок 3. *Якщо* $\varepsilon_n = b^n$, $0 < b < 1$, *то функція* f *є функцією обмеженої варіації.*

Теорема 4. *Якщо* $\varepsilon_n = 1$, *то множина всіх рівнів функції* f, *які містять відрізки сталості, є зліченною множиною, причому:*

1) рівень $y_0 = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{(2)}\right) = \dfrac{1}{2}$ *містить лише один відрізок сталості;*

2) кожен із рівнів вигляду

$$y_0 = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m0(2)}\right) = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m3(2)}\right) \quad i \quad y_0 = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m1(2)}\right) = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m4(2)}\right)$$

містить два відрізки сталості;

3) рівень функції більше двох відрізків містити не може.

Доведення. Очевидно, що проміжки сталості функції вичерпуються циліндрами: $\Delta^{Q_5^*}_2$, $\Delta^{Q_5^*}_{02}$, $\Delta^{Q_5^*}_{12}$, $\Delta^{Q_5^*}_{32}$, $\Delta^{Q_5^*}_{42}$ і т. д., загальний вигляд яких $\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m(2)}$, де $c_i \ne 2$, $i = \overline{1,m}$, $m \in N$, тобто рівні, які містять проміжки, мають вигляд $f^{-1}\left(f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m(2)}\right)\right)$. Оскільки

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}(2)}\right) \ne f\left(\Delta^{Q_5^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(2)}\right)$$

при $m \neq k$, то таких рівнів зліченна кількість.

1. Доведемо, що рівень $y_0 = \frac{1}{2} = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{(2)}\right)$ містить лише один відрізок сталості. Припустимо, що знайдеться такий циліндр, для якого виконується рівність $f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m(2)}\right) = \frac{1}{2}$. Значення функції у внутрішніх точках циліндра $\Delta^{Q_5^*}_1$ більші за $\frac{1}{2}$, а на $\Delta^{Q_5^*}_3$ менші за $\frac{1}{2}$. Тому далі досить провести аналіз лише на циліндрах $\Delta^{Q_5^*}_0$ і $\Delta^{Q_5^*}_4$. Оскільки графік функції f симетричний відносно точки $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, то зосередимось на дослідженні циліндра $\Delta^{Q_5^*}_0$. Отже,

$$\frac{3}{4}\left(\delta_{c_2} + \delta_{c_3} g_{c_2} + \ldots + \delta_{c_m}\prod_{j=2}^{m-2} g_{c_j} + \frac{1}{2}\prod_{j=2}^{m-1} g_{c_j}\right) = \frac{1}{2},$$

$$3\left(\delta_{c_2} + \delta_{c_3} g_{c_2} + \ldots + \delta_{c_m}\prod_{j=2}^{m-2} g_{c_j} + \frac{1}{2}\prod_{j=2}^{m-1} g_{c_j}\right) = 2.$$

Оскільки добуток $\prod_{j=2}^{m-1} g_{c_j}$ є правильним звичайним дробом зі знаменником 4^{m-2}, а δ_{c_i} — зі знаменником 4, то, домноживши останню рівність на 4^m, отримаємо

$$3\left(4^m\delta_{c_2} + 4^m\delta_{c_3} g_{c_2} + \ldots + 4^m\delta_{c_m}\prod_{j=2}^{m-2} g_{c_j} + 4^m\frac{1}{2}\prod_{j=2}^{m-1} g_{c_j}\right) = 2\cdot 4^m.$$

Звідси видно, що ліва частина рівності ділиться на 3, а права — ні. Отримана суперечність доводить, що рівень $\frac{1}{2}$ містить лише один відрізок сталості.

2. Доведемо, що всі інші рівні містять два відрізки сталості. Нехай

$$A \equiv \delta_{c_1} + \sum_{k=2}^{m}\left(\delta_{c_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{c_j}\right).$$

Розглянемо різницю значень функції:

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m0(2)}\right) - f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m3(2)}\right) = A + g_0\prod_{j=1}^{m} g_{c_j}\frac{1}{2} - A - \delta_3\prod_{j=1}^{m} g_{c_j}\frac{1}{2} - g_3\prod_{j=1}^{m} g_{c_j}\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{8}\prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} g_{c_j} + \frac{1}{8}\prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = 0,$$

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m1(2)}\right) - f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m4(2)}\right) =$$

$$= A + \delta_1 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} + g_1 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \frac{1}{2} - A - \delta_4 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - g_4 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{1}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{1}{4} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{3}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = 0.$$

Відповідні значення збігаються. Отже, дані рівні містять два відрізки.

3. Тепер доведемо, що такі рівні містять не більше двох відрізків. Розглянемо два випадки.

1. Припустимо, що знайдеться такий циліндр, для якого виконується рівність

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m0(2)}\right) = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots c_{m+k}(2)}\right)$$

або

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}\ldots c_m0(2)}\right) = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}\right), \quad k \in N, \quad k < m.$$

1.1. Нехай

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m0(2)}\right) = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_mc_{m+1}\ldots c_{m+k}(2)}\right).$$

Тоді

$$\frac{3}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \left(\delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j} \right),$$

$$\frac{3}{8} = \delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j},$$

$$3 = 8 \left(\delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j} \right).$$

Оскільки добуток $\prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j}$ є правильним звичайним дробом зі знаменником 4^{k-1}, а δ_{c_i} — зі знаменником 4, то, домноживши останню рівність на 4^k, отримаємо

$$3 \cdot 4^k = 8 \left(4^k \delta_{c_{m+1}} + \ldots + 4^k \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + 4^k \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j} \right).$$

Звідси видно, що ліва частина рівності ділиться на 3, а права — ні. Прийшли до суперечності.

1.2. Тепер нехай

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}c_{m-k+1}\ldots c_m0(2)}) = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}).$$

Тоді

$$\prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j} \left(\delta_{c_{m-k+1}} + \ldots + \delta_0 \prod_{j=m-k+1}^{m} g_{c_j} + \frac{3}{8} \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} \right) = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j},$$

$$\delta_{c_{m-k+1}} + \delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + \frac{3}{8} \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = \frac{1}{2},$$

$$2\delta_{c_{m-k+1}} + 2\delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + 3 \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = 1.$$

Оскільки добуток $\prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j}$ є правильним звичайним дробом із знаменником 4^k, а δ_{c_i} — зі знаменником 4, то, домноживши останню рівність на 4^k, отримаємо

$$2 \cdot 4^k \delta_{c_{m-k+1}} + 2 \cdot 4^k \delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + 3 \cdot 4^k \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = 4^k.$$

Звідси видно, що права частина рівності ділиться на 2, а ліва — ні, оскільки останній доданок виразу не ділиться на 2. Прийшли до суперечності.

2. Припустимо, що знайдеться такий циліндр, для якого виконується рівність

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m4(2)}\right) = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots c_{m+k}(2)}\right)$$

або

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m4(2)}\right) = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}\right).$$

2.1. Нехай

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m4(2)}\right) = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m c_{m+1}\ldots c_{m+k}(2)}\right).$$

Тоді

$$\frac{5}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \left(\delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j} \right).$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо

$$5 \cdot 4^k = 8 \left(4^k \delta_{c_{m+1}} + \ldots + 4^k \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + 4^k \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j} \right).$$

Ліва частина рівності ділиться на 5, а права — ні. Прийшли до суперечності.

2.2. Тепер нехай

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}c_{m-k+1}\ldots c_m4(2)}\right) = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}).$$

Тоді

$$\prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j}\left(\delta_{c_{m-k+1}}+\ldots+\delta_0\prod_{j=m-k+1}^{m} g_{c_j}+\frac{5}{8}\prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j}\right)=\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j}.$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо

$$2\cdot 4^k\delta_{c_{m-k+1}}+2\cdot 4^k\delta_{c_{m-k+2}}g_{c_{m-k+1}}\ldots+5\cdot 4^k\prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j}=4^k.$$

Права частина рівності ділиться на 2, а ліва — ні, оскільки останній доданок виразу не ділиться на 2. Прийшли до суперечності.

Отже, рівень функції f більше двох відрізків містити не може.

Теорему 4 доведено.

Зауваження. Далі в цій роботі ми розглядаємо випадок $\varepsilon_n = 1$.

2. Образи множин канторівського типу.

Теорема 5. *При відображенні f образом множини канторівського типу:*

1) $C_1 \equiv C\,[Q_5^*;\{1,3\}]$ є множина канторівського типу $C_2 \equiv C[4;\{1,2\}]$, причому відображення множини C_1 у множину C_2 є бієктивним;

2) $C_3 \equiv C\,[Q_5^*;\{1,2,3\}]$ є множина $E = C_2\bigcup M$, де M — дискретна підмножина множини четвірково-раціональних чисел, а саме,

$$M=\left\{y\colon y=\Delta^4_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}2(0)},\ \alpha_i\in\{1;2\},\ m\in N\right\}.$$

Доведення. 1. Нехай $x\in C_1$, тобто $x=\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n\in\{1,3\}$.

Оскільки $g_1=-\dfrac{1}{4}=g_3$, $\delta_1=\dfrac{3}{4}$, $\delta_3=\dfrac{2}{4}=\delta_2$, то $\delta_{\alpha_n}=\dfrac{a_n}{4}$, де

$$a_n=\begin{cases}4-\alpha_n, & \text{якщо}\quad \alpha_n=1,\\ 5-\alpha_n, & \text{якщо}\quad \alpha_n=3,\end{cases}\qquad a_n\in\{3;2\},\quad \forall n\in N. \tag{4}$$

Тоді

$$\delta_{\alpha_n}\prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j}=\frac{(-1)^{n-1}a_n}{4^n}$$

і

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a_1}{4}-\frac{a_2}{4^2}+\frac{a_3}{4^3}-\frac{a_4}{4^4}+\ldots+\frac{a_{2k-1}}{4^{2k-1}}-\frac{a_{2k}}{4^{2k}}+\ldots=\\&=\frac{a_1}{4}-\frac{4-(4-a_2)}{4^2}+\frac{a_3}{4^3}-\frac{4-(4-a_4)}{4^4}+\ldots=\\&=\frac{a_1-1}{4}+\frac{4-a_2}{4^2}+\frac{a_3-1}{4^3}+\frac{4-a_4}{4^4}+\ldots=\\&=\frac{c_1}{4}+\frac{c_2}{4^2}+\frac{c_3}{4^3}+\frac{c_4}{4^4}+\ldots=\Delta^4_{c_1c_2\ldots c_n\ldots},\end{aligned}$$

де

$$c_n = \begin{cases} a_n - 1, & \text{якщо } n \text{ — непарне}, \\ 4 - a_n, & \text{якщо } n \text{ — парне}, \quad \forall n \in N. \end{cases} \tag{5}$$

Оскільки $c_n \in \{1; 2\}$, то $f(x) \in C_2$.

Якщо ж $y \in C_2$, тобто

$$f(x) = y = \Delta^4_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}, \quad \text{де} \quad c_n \in C_2,$$

то

$$f^{-1}(y) = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots},$$

де

$$\alpha_n = \begin{cases} 4 - a_n, & \text{якщо} \quad a_n = 3, \\ 5 - a_n, & \text{якщо} \quad a_n = 2, \end{cases} \qquad \alpha_n \in \{1; 3\}, \tag{6}$$

$$a_n = \begin{cases} c_n - 1, & \text{якщо } n \text{ — непарне}, \\ 4 - c_n, & \text{якщо } n \text{ — парне}, \quad \forall n \in N. \end{cases} \tag{7}$$

Оскільки $\alpha_n \in \{1, 3\}$, то $x \in C_1$. Отже, $f(C_1) = C_2$.

Бієктивність відображення $f \colon C_1 \to C_2$ є наслідком єдиності Q_5^*-представлення чисел множини C_1 і четвіркового представлення чисел множини C_2 та наведених вище міркувань.

2. Очевидно, що $C_2 \bigcap M = \varnothing$. Оскільки $C\,[Q_5^*; \{1, 3\}] \equiv C_1 \subset C_3$, то для $f(C_3) \subset E$ досить показати, що для $x \in C_3 \setminus C_1$ маємо $f(x) \in M$.

Нехай $\alpha_m(x) = 2$ і $\alpha_j(x) \neq 2$ при $j < m$. Тоді

$$f(x) = \Delta^4_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} 2(0)} = \Delta^4_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} 1(3)} = y \in M,$$

де c_i обчислюється за формулами (4), (5).

Враховуючи попередні міркування, досить довести, що з $y \in M$ маємо $f^{-1}(y) \in C_3$.

Нехай $y = \Delta^4_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} 2(0)}$, де $c_i \in \{1, 2\}$. Тоді $f(x) = f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} 2 \alpha_{m+1} \ldots})$, де α_j, $j < m$, можна обчислити за формулами (6), (7), а α_{m+j} — довільні цифри з $\{1; 2; 3\}$, належить множині C_3. Таким чином, кожна точка множини E є прообразом принаймні однієї точки множини C_3.

Отже, $f(C_3) = E$, що й потрібно було довести.

Теорему 5 доведено.

Теорема 6. *Нехай* $X = \Delta^{Q_5^*}_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n \ldots}$ *— випадкова величина, цифри* (τ_n) Q_5^**-зображення якої є незалежними і мають розподіли* $\mathrm{P}\{\tau_n = i\} = p_{in}$, $i = \overline{0, 4}$, *причому*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} = 0. \tag{8}$$

Розподіл випадкової величини $Y = f(X)$ *є:*

1) чисто дискретним, якщо

$$c = \sum_{n=1}^{\infty}\left[p_{2n}\prod_{k=1}^{n-1}(1-p_{2k})\right] = 1;$$

2) нетривіальною сумішшю дискретного і неперервного розподілів, якщо

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty}\left[p_{2n}\prod_{k=1}^{n-1}(1-p_{2k})\right] < 1,$$

причому

$$F_Y(x) = cF_d(x) + (1-c)F_c(x),$$

де

$$F_d(x) = \sum_{\substack{\Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)}=x_i<x \\ c_j\in\{0,1,3,4\}}} p_{x_i}, \quad p_{x_i} = \mathrm{P}\left\{Y = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)}\right\};$$

3) сингулярним розподілом канторівського типу, якщо для будь-якого натурального n мають місце рівності $p_{0n} = p_{2n} = p_{4n} = 0$.

Доведення. Як відомо з теореми 4, множина рівнів функції f, які містять відрізки, є зліченною. Більш того, рівень не може містити більше двох відрізків. Тому подія

$$\mathrm{P}\left\{Y = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2}) = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)}\right\}$$

рівносильна події

$$X \in \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2},$$

якщо рівень $y_0 = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)}$ містить один відрізок, або ж

$$X \in \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2}\bigcup \Delta^{Q_5^*}_{c'_1\ldots c'_m 2},$$

де $f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2(0)}\right) = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c'_1\ldots c'_m 2(0)}\right)$, якщо рівень містить два відрізки.

У першому випадку, внаслідок незалежності цифр випадкової величини X, маємо

$$\mathrm{P}\left\{Y = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2(0)})\right\} = \mathrm{P}\left\{X \in \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2}\right\} \equiv \left(\prod_{i=1}^{m} p_{c_i i}\right) p_{2,m+1}.$$

У другому випадку вважатимемо, що число $y = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2(0)}\right)$ має дві „складові” y і y^*, які є формально різними числами.

Тому $y = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2(0)}\right)$ є атомом розподілу тоді і тільки тоді, коли

$$p_{c_i i} \neq 0 \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,m\} \quad \text{і} \quad p_{2,m+1} \neq 0.$$

Сумарна маса атомів розподілу Y обчислюється за формулою

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{2n} \prod_{k=1}^{n-1} (p_{0k} + p_{1k} + p_{3k} + p_{4k}) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{2n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - p_{2k}) \right].$$

Очевидно, що остання сума є скінченним числом, причому вона містить скінченну кількість доданків, якщо існує $p_{2k} = 1$, і нескінченну — у протилежному випадку.

Якщо $p_{0n} = p_{1n} = p_{2n} = p_{3n} = p_{4n}$ для всіх $n \in N$, то $S = 1$ і розподіл є чисто атомарним (дискретним). Якщо ж всі p_{in} різні і $S < 1$, то, враховуючи теорему Лебега про структуру ймовірнісної міри, робимо висновок, що розподіл Y, маючи атоми, має і нетривіальну неперервну компоненту.

Зауважимо, що $S \neq 0$, що є наслідком неперервного розподілу X.

Оскільки $p_{0n} = p_{2n} = p_{4n} = 0$, то для будь-якого $n \in N$ спектром розподілу випадкової величини Y є множина канторівського типу $C_2 = C[4; \{1, 2\}]$, якщо $p_{1n}^2 + p_{3n}^2 \neq 1$ для всіх $n \in N$, або її підмножина, якщо для деякого m виконується рівність $p_{1m}^2 + p_{3m}^2 = 1$. Тому згідно з теоремою 5 міра Лебега спектра розподілу Y дорівнює нулю.

Розподіл випадкової величини X є неперервним, тобто

$$\prod_{n=1}^{\infty} \max_k \{p_{kn}\} = M = 0 = \prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{1n}, p_{3n}\}.$$

Тоді внаслідок бієктивності відображення $f\colon C_1 \to C_2$ розподіл Y атомів не має. Отже, він є сингулярним розподілом канторівського типу.

Теорему 6 доведено.

Лема 1. *Має місце рівність*

$$\Delta^{G_2^*}_{c_1c_2\ldots c_m 01(0)} = \Delta^{G_2^*}_{c_1c_2\ldots c_m 11(0)}. \tag{9}$$

Доведення. Нехай $\varphi_m \equiv \delta_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} \left(\delta_{c_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{c_j} \right)$. Розглянемо різницю

$$\Delta^{G_2^*}_{c_1c_2\ldots c_m 01(0)} - \Delta^{G_2^*}_{c_1c_2\ldots c_m 11(0)} = \varphi_m + \delta_1 g_0 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \varphi_m - \delta_1 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \delta_1 g_1 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} =$$

$$= \frac{3^2}{4^2} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{3}{4} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} + \frac{3}{4^2} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = 0.$$

Отже, рівність (9) виконується.

Теорема 7. *Образом множини* $C_4 \equiv C\left[Q_5^*; \{0, 1\}\right]$ *при відображенні* f *є відрізок* $\left[0, \frac{3}{4}\right]$, *більшість точок якого мають єдине* G_2^**-зображення і лише точки його зліченної підмножини мають два формально різні зображення* $\Delta^{G_2^*}_{c_1c_2\ldots c_m 01(0)} = \Delta^{G_2^*}_{c_1c_2\ldots c_m 11(0)}$.

Доведення. Нехай $E = f\left(C\left[Q_5^*; \{0, 1\}\right]\right)$. Доведемо, що $E = \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

1. Нехай $x \in C_4$, тобто $x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n \in \{0,1\}$. Тоді

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)}\right) \leq g_0 = \frac{3}{4}.$$

Отже, $E \subset \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

2. Нехай тепер $y \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$, тобто $y = \Delta^{G_2^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n \in \{0,1\}$;

$$\Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m} = \left[\inf \Delta^{G_2^*}_{c_1c_2\ldots c_m}; \sup \Delta^{G_2^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right],$$

де $c_i \in \{0,1\}$.

Оскільки

$$\left[0, \frac{3}{4}\right] = \Delta^*_0 \cup \Delta^*_1 = (\Delta^*_{00} \cup \Delta^*_{01}) \cup (\Delta^*_{11} \cup \Delta^*_{10}) = \ldots = \bigcup_{c_1=0}^{1} \ldots \bigcup_{c_m=0}^{1} \Delta^*_{c_1\ldots c_m},$$

до того ж ці формально різні циліндричні відрізки не перекриваються (в цьому легко переконатись, наприклад, $\Delta^*_0 = \left[0; g_0^2\right]$, $\Delta^*_1 = \left[g_0^2; g_0\right]$, $\Delta^*_{00} = \left[0; g_0^3\right]$, $\Delta^*_{01} = \left[g_0^3; g_0^2\right]$, $\Delta^*_{10} = \left[g_0(1+g_0g_1); g_0\right]$, $\Delta^*_{11} = \left[g_0^2; g_0(1+g_0g_1)\right], \ldots$), то $\left[0, \frac{3}{4}\right] = E$.

Враховуючи попередню лему, завершуємо доведення теореми 7.

Теорема 8. *Нехай* $X = \Delta^{Q_5^*}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ — *випадкова величина, цифри* (τ_n) Q_5^*-*зображення якої є незалежними і мають розподіли* $\mathrm{P}\{\tau_n = i\} = p_{in}$, $i = \overline{0,4}$.

Якщо $p_{2n} = p_{3n} = p_{4n} = 0$ *для будь-якого* $n \in N$, *то розподіл випадкової величини* $Y = f(X) = \Delta^{G_2^*}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots}$, *яка закодована засобами двосимвольного алфавіту* $A_2 = \{0,1\}$ *у системі з нульовою надлишковістю, цифри* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ *зображення якої є незалежними, має чистий лебегівський тип, до того ж абсолютно неперервний, тоді і тільки тоді, коли*

$$W = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1 - \frac{4}{3}p_{0n}\right)^2 + (1 - 4p_{0n})^2\right] < \infty,$$

і сингулярний, коли $W = \infty$.

Доведення. Згідно з лемою 7, випадкова величина Y набуває всіх значень з відрізка $\left[0; \frac{3}{4}\right]$, майже всі точки якого (за винятком зліченної множини) мають єдине G_2^*-зображення, до того ж

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_0\right) = \Delta^{G_2^*}_0 = \left[0; \frac{9}{16}\right], \quad f\left(\Delta^{Q_5^*}_1\right) = \Delta^{G_2^*}_1 = \left[\frac{9}{16}; \frac{3}{4}\right],$$

$$P_Y\left(\Delta^{G_2^*}_0\right) = P_X\left(\Delta^{Q_5^*}_0\right) = p_{01}, \quad P_Y\left(\Delta^{G_2^*}_1\right) = P_X\left(\Delta^{Q_5^*}_1\right) = p_{11}.$$

Більш того,

$$P_Y\left(f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}\right)\right) = P_X\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}\right) = p_{i[m+1]},$$

$$F'_Y(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{P_Y\left(f\left(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)\right)}{\left|f\left(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right)\right|} = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n+1}\left(\frac{p_{\alpha_i i}}{|g_{\alpha_i}|}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n+1}\left(\frac{p_{\alpha_i i}}{\frac{2-(-1)^{1-\alpha_i}}{4}}\right) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(\frac{4p_{\alpha_i i}}{2-(-1)^{1-\alpha_i}}\right).$$

Для збіжності останнього нескінченного добутку необхідно і достатньо, щоб збігався ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{4p_{\alpha_i i}}{2-(-1)^{1-\alpha_i}}\right)$.

Оскільки кожна точка $y \in \left[0;\dfrac{3}{4}\right]$ є образом єдиної точки $x \in C\left[Q_5^*, \{0,1\}\right]$, де $y = f(x)$, і більше того, цифри зображень x та y перебувають у співвідношенні

$$\alpha_i(f(x)) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_i(x) = 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad \alpha_i(x) = 1, \end{cases}$$

то цифри G_2^*-зображення випадкової величини Y є незалежними, як і цифри X, до того ж

$$P_Y\{\eta_n = 0\} = P_X\{\tau_n = 0\} = p_{0n}, \quad P_Y\{\eta_n = 1\} = P_X\{\tau_1 = 1\} = p_{1n}.$$

G_2^*-зображення є самоподібним зображенням, як і Q_2-зображення чисел. Між вказаними зображеннями легко встановлюється зв'язок (бієкція, яка переводить одне в інше, зберігає міру Лебега і фрактальну розмірність Гаусдорфа – Безиковича). Це є основою для висновку: методи обґрунтування чистоти розподілу випадкової величини Y, її критерій абсолютної неперервності (а отже, і сингулярності) переносяться на дану ситуацію. А отже, з відомих результатів [5] для Q_2-зображення отримуємо заключну частину теореми.

Теорему 8 доведено.

Література

1. *Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С. 92 – 102.
2. *Торбин Г. М., Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q^*-знаками // Случайные эволюции: теор. и прикл. задачи. — Киев, 1992. — С. 95 – 104.
3. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.
4. *Працьовитий М. В.* Розподіли сум випадкових степеневих рядів // Доп. НАН України. — 1996. — № 5. — С. 32 – 37.
5. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
6. *Працьовитий М. В., Замрій І. В.* Сингулярність інверсора цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, № 1. — С. 55 – 70.

7. *Працьовитий М. В., Ратушняк С. П.* Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2014. — № 16 (2). — С. 150 – 160.
8. *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*-зображення аргумента // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2013. — № 15 (1). — С. 134 – 144.
9. *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Про одну сім'ю неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2015. — № 17. — С. 37 – 48.
10. *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Розподіл значень однієї сингулярної немонотонної функції канторівського типу // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, № 2. — С. 110 – 121.
11. *Працьовитий М. В., Торбін Г. М., Гончаренко Я. В.* Сучасні задачі та проблеми сингулярних розподілів ймовірностей // Наук. зап.: Зб. наук. статей НПУ ім. М. П. Драгоманова. — 2001. — Вип. 42. — С. 18 – 20.
12. *Працьовитий М. В., Фещенко О. Ю.* Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів і Q-представлення чисел // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. — 2003. — № 4. — С. 260 – 269.

Одержано 04.01.18